УДК 539.3

Крайові задачі локально-моментної теорії пружності. Варіаційні формулювання

Ярослав Бурак[1], Галина Мороз[2]

[1] д. ф.-м. н., професор, член кореспондент НАН України, Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: burak@cmm.lviv.ua
[2] к. ф.-м. н., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: moros@cmm.lviv.ua

На основі повних функціоналів запропоновано два варіанти варіаційного формулювання крайових задач нелінійної локально-моментної теорії пружності. У першому випадку базовий потенціал (функція Гамільтона) задається на фазовому просторі векторів силових імпульсів поступальної й обертальної форм руху та тензорів ґрадієнта місця і ґрадієнта локальних поворотів. У другому випадку спряжений потенціал Гамільтона є функцією, яка задана на фазовому просторі векторів швидкостей поступального і обертального рухів та відповідних тензорів силових і моментних напружень. Отримані фізичні співвідношення сконкретизовані для випадків, коли кінетичні рівняння є лінійними, але враховується фізична нелінійність процесів деформування.

Ключові слова: локально-моментна теорія пружності, повний функціонал Гамільтона, функція Гамільтона, поступальна і обертальна форми руху, тензор ґрадієнта місця, тензор ґрадієнта локальних поворотів, тензор силових напружень, тензор моментних напружень.

Вступ. Математичні моделі механіки деформівного пружного тіла є науковою основою розробки інженерних методів раціонального проектування і технологій виготовлення сучасних конструкцій та приладів. Найпоширенішою у літературі моделлю механічної системи є класична модель механіки ідеально пружного (термопружного) тіла. Модель ґрунтується на базових постулатах механіки Ньютона про інерційність поступального руху, а також класичної термодинаміки про локальний рівноважний стан. Такий рівноважний стан (за нормування адитивних параметрів відносно геометричних характеристик фізично малих підсистем в однорідному природному стані) характеризується тензором ґрадієнта місця та відповідно тензором напружень Піоли-Кірхгофа першого роду [1, 2]. Варіаційне формулювання відповідних крайових задач нелінійної теорії пружності в такій постановці на основі повного функціонала Гамільтона зроблено у роботі [3]. У цій статті, зокрема, одержано необхідні та достатні умови еквівалентності варіаційного формулювання крайових задач та їхньої локальної постановки на основі повних функціоналів Гамільтона.

Узагальненням такого варіаційного підходу до побудови математичних моделей нелінійної механіки пружних тіл є врахування додатково інерційності процесів локального згину та кручення в межах фізично малих підсистем [4].

У даній статті запропоновано два варіанти варіаційного формулювання крайових задач нелінійної локально-моментної теорії пружності на основі повних функціоналів. У першому випадку функція Гамільтона (базовий потенціал) задається на фазовому просторі векторів силових імпульсів поступальної і обертальної форм руху та тензорів ґрадієнта місця і ґрадієнта локальних поворотів. У другому випадку спряжений потенціал Гамільтона є функцією, яка задана на фазовому просторі векторів швидкостей поступального і обертального рухів та відповідних тензорів силових і моментних напружень. Отримані фізичні співвідношення сконкретизовані для випадку, коли лінійними є лише кінетичні рівняння, але враховується фізична нелінійність процесів деформування.

1. Варіаційне формулювання математичної моделі в термінах силових імпульсів та узагальнених переміщень

Розглядається пружно деформівне ізотропне тверде тіло K^*. У відліковій конфігурації $(t < t_1)$ тіло ненавантажене, однорідне та в евклідовому просторі займає область X_0^* з поверхнею ∂X_0^*. Місце довільної точки $k \in K^*$ у відліковій конфігурації характеризується радіус-вектором $\vec{r}_0$.

На проміжку часу $[t_1, t_2]$ тіло перебуває під дією поверхневих та об'ємних сил і в актуальній конфігурації $(t_1 \le t \le t_2)$ займає область $X^*(t) \bigcup \partial X^*(t)$. Місце точки $k \in K^*$ у довільний момент часу t визначається радіус-вектором $\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t) = \vec{r}_0 + \vec{u}$, де $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}_0, t)$ — вектор переміщення матеріальної точки з відлікової конфігурації в актуальну.

Побудова математичної моделі нелінійної локально-моментної теорії пружності реалізується за допомогою повного енергетичного функціонала Гамільтона, який формується за підходом Лагранжа для області тіла X_0^* на проміжку часу $[t_1, t_2]$ [3-5]

$$F\left[\vec{p}, \vec{q}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\varphi}\right] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{X_0^*} \left[H\left(\vec{p}, \vec{q}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\varphi}\right) + \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{u} + \frac{d\vec{q}}{dt} \cdot \vec{\varphi} - \vec{f}^+ \cdot \vec{u} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \vec{\mu}^+ \cdot \vec{\varphi} \right] dV_0 - \int_{\partial X_0^*} \left[\vec{\sigma}_n^+ \cdot \vec{u} + \vec{\tau}_n^+ \cdot \vec{\varphi} \right] d\Sigma_0 \right\} dt - \int_{X_0^*} \left[\vec{u}_{(2)}^+ \cdot \vec{p}_{(2)} + \vec{\varphi}_{(2)}^+ \cdot \vec{q}_{(2)} \right] dV_0 \,, \qquad (1)$$

де $H\left(\vec{p}, \vec{q}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\varphi}\right)$ — функція Гамільтона; $\vec{p} = \int_{t_1}^{t} \left(\vec{\nabla}_0 \cdot \hat{\sigma} + \vec{f}^+\right) d\tilde{t}$ — вектор густини силового імпульсу; $\vec{q} = \int_{t_1}^{t} \left(\vec{\nabla}_0 \cdot \hat{\tau} + \vec{\mu}^+\right) d\tilde{t}$ — вектор густини моментного імпульсу; $\hat{\sigma}$ - тензор напружень Піоли-Кірхгофа першого роду; $\hat{\tau}$ — тензор моментних напружень; $\vec{\varphi}$ — вектор кута повороту фізично малого елемента; $\vec{\nabla}_0 \equiv \partial / \partial \vec{r}_0$ — оператор Гамільтона; $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} = \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r} - \hat{I}$; $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}$ — тензор ґрадієнта місця; $\hat{I}$ — одиничний тензор; $\vec{\sigma}_n^+ = \vec{\sigma}_n^+(\vec{r}_0, t)$, $\vec{\tau}_n^+ = \vec{\tau}_n^+(\vec{r}_0, t)$ — задані вектори поверхневих зусиль та моментного поверхневого навантаження; $\vec{f}^+ = \vec{f}^+(\vec{r}_0, t)$, $\vec{\mu}^+ = \vec{\mu}^+(\vec{r}_0, t)$ — задані вектори густини масових сил та моментних зусиль; $\vec{u}_{(2)}^+(\vec{r}_0)$, $\vec{\varphi}_{(2)}^+(\vec{r}_0)$ — задані вектори переміщення кутів повороту в момент часу $t = t_2$; $\vec{p}_{(2)} \equiv \vec{p}(\vec{r}_0, t_2)$, $\vec{q}_{(2)} \equiv \vec{q}(\vec{r}_0, t_2)$.

Тут і надалі всі адитивні параметри фізично малої області $\delta K \subset K^*$ нормуються за геометричними характеристиками — об'ємом δV_0 цієї області та площею $\delta\Sigma_0$ елементарної поверхні $\delta\partial K \subset \partial K^*$ у відліковій конфігурації. Зокрема

$$\delta \mathrm{H} = H \delta V_0, \ \delta \vec{P} = \vec{p} \delta V_0,$$
$$\vec{\sigma}_n^+ d\Sigma_0 = \vec{\sigma}_n^{+*} d\Sigma^*, \ \vec{\tau}_n^+ d\Sigma_0 = \vec{\tau}_n^{+*} d\Sigma^*, \ \vec{f}^+ dV_0 = \vec{f}^{+*} dV^*, \ \vec{\mu}^+ dV_0 = \vec{\mu}^{+*} dV^*,$$

де H і $\vec{p}$ — густини адитивних параметрів $\delta \mathrm{H}$ та $\delta \vec{P}$; $\vec{\sigma}_n^{+*}$, $\vec{\tau}_n^{+*}$ — вектори поверхневих зусиль і $\vec{f}^{+*}$, $\vec{\mu}^{+*}$ — вектори об'ємних масових та моментних сил, які нормовані за об'ємом δV фізично малої області $\delta K \subset K^*$ та площею $\delta\Sigma$ поверхні елементарної площадки $\delta\partial K \subset \partial K^*$ в актуальній конфігурації.

Необхідною умовою мінімуму функціонала Гамільтона є рівність нулеві його першої варіації

$$\delta F\left[\vec{p}, \vec{q}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\varphi}\right] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{X_0^*} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \vec{p}} - \vec{v} \right) \cdot \delta \vec{p} + \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{q}} - \vec{\omega} \right) \cdot \delta \vec{q} + \right.\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}} - \hat{\sigma} \right) \cdot\cdot\, \delta\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}\right)^{\mathrm{T}} + \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\varphi}} - \hat{\tau} \right) \cdot\cdot\, \delta\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\varphi}\right)^{\mathrm{T}} \right] dV_0 +$$
$$\left. + \int_{\partial X_0^*} \left[\left(\vec{\sigma}_n - \vec{\sigma}_n^+ \right) \cdot \delta \vec{u} + \left(\vec{\tau}_n - \vec{\tau}_n^+ \right) \cdot \delta \vec{\varphi} \right] d\Sigma_0 \right\} dt +$$
$$+ \int_{X_0^*} \left[\left(\vec{u}_{(2)} - \vec{u}_{(2)}^+ \right) \cdot \delta \vec{p}_{(2)} - \vec{u}_{(1)} \cdot \delta \vec{p}_{(1)} + \left(\vec{\varphi}_{(2)} - \vec{\varphi}_{(2)}^+ \right) \cdot \delta \vec{q}_{(2)} - \vec{\varphi}_{(1)} \cdot \delta \vec{q}_{(1)} \right] dV_0 = 0. \quad (2)$$

Тут $\vec{v} = d\vec{u} / dt$, $\vec{\omega} = d\vec{\varphi} / dt$.

З незалежності варіацій $\delta \vec{p}$, $\delta \vec{q}$, $\delta\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}\right)$, $\delta\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\varphi}\right)$, $\delta \vec{u}$, $\delta \vec{\varphi}$ одержуємо наступні визначальні фізичні співвідношення математичної моделі

$$\vec{v} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \equiv \vec{v}\left(\vec{p}, \vec{q}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\varphi}\right), \quad \vec{\omega} = \frac{\partial H}{\partial \vec{q}} \equiv \vec{\omega}\left(\vec{p}, \vec{q}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\varphi}\right); \tag{3}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\partial H}{\partial \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}} \equiv \hat{\sigma}\left(\vec{p}, \vec{q}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\varphi}\right), \ \hat{\tau} = \frac{\partial H}{\partial \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\varphi}} \equiv \hat{\tau}\left(\vec{p}, \vec{q}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\varphi}\right); \tag{4}$$

природні граничні умови на поверхні тіла

$$\vec{\sigma}_n \equiv \vec{n} \cdot \hat{\sigma} = \vec{\sigma}_n^+\left(\vec{r}_0, t\right), \qquad \vec{\tau}_n \equiv \vec{n} \cdot \hat{\tau} = \vec{\tau}_n^+\left(\vec{r}_0, t\right) \tag{5}$$

та граничні умови в часовому інтервалі

$$\vec{u}\Big|_{t=t_1} = 0, \quad \vec{u}\Big|_{t=t_2} = \vec{u}_{(2)}^+\left(\vec{r}_0, t_2\right), \quad \vec{\varphi}\Big|_{t=t_1} = 0, \quad \vec{\varphi}\Big|_{t=t_2} = \vec{\varphi}_{(2)}^+\left(\vec{r}_0, t_2\right). \tag{6}$$

Із співвідношень (3), (4) випливає, що функція Гамільтона $H\left(\vec{p}, \vec{q}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\varphi}\right)$ є функцією локального стану на фазовому просторі параметрів $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}$, $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\varphi}$. Рівняння (3)-(4) є вихідними фізичними співвідношеннями моделі і, відповідно, диференціальна 1-форма

$$dH = \vec{v} \cdot d\vec{p} + \vec{\omega} \cdot d\vec{q} + \hat{\sigma} \cdot\cdot d\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}\right)^T + \hat{\tau} \cdot\cdot d\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\varphi}\right)^T \tag{7}$$

є повним диференціалом для пружного потенціалу $H\left(\vec{p}, \vec{q}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\varphi}\right)$.

1.1. Достатні умови опуклості функціонала. Достатньою умовою мінімуму функціонала Гамільтона (1) є умова його опуклості

$$\delta^2 F = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\partial X_0^*} \left(\delta\vec{\sigma}_n \cdot \delta\vec{u} + \delta\vec{\tau}_n \cdot \delta\vec{\varphi}\right) d\Sigma_0 \right] dt +$$
$$+ \int_{X_0^*} \left[\delta\vec{u}_{(2)} \cdot \delta\vec{p}_{(2)} - \delta\vec{u}_{(1)} \cdot \delta\vec{p}_{(1)} + \delta\vec{\varphi}_{(2)} \cdot \delta\vec{q}_{(2)} - \delta\vec{\varphi}_{(1)} \cdot \delta\vec{q}_{(1)}\right] dV_0 > 0, \tag{8}$$

яка може бути подана так

$$\delta^2 F = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{X_0^*} \left\{ \delta\vec{v} \cdot \delta\vec{p} + \delta\vec{\omega} \cdot \delta\vec{q} + \delta\hat{\sigma} \cdot\cdot \delta\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}\right)^T + \delta\hat{\tau} \cdot\cdot \delta\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\varphi}\right)^T + \right.\right.$$
$$\left.\left. + 2\left(\vec{\nabla}_0 \cdot \delta\hat{\sigma}\right) \cdot \delta\vec{u} + 2\left(\vec{\nabla}_0 \cdot \delta\hat{\tau}\right) \cdot \delta\vec{\varphi} \right\} dV_0 \right] dt =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{X_0^*} \left\{ \delta^2 H + 2\left(\vec{\nabla}_0 \cdot \delta\hat{\sigma}\right) \cdot \delta\vec{u} + 2\left(\vec{\nabla}_0 \cdot \delta\hat{\tau}\right) \cdot \delta\vec{\varphi} \right\} dV_0 \right] dt > 0. \tag{9}$$

За достатні умови опуклості функціонала F можна прийняти, зокрема, умови

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{X_0^*}\delta^2 H dV_0 dt > 0, \quad \int_{t_1}^{t_2}\int_{X_0^*}\left(\vec{\nabla}_0\cdot\delta\hat{\sigma}\right)\cdot\delta\vec{u}dV_0 dt \ge 0, \quad \int_{t_1}^{t_2}\int_{X_0^*}\left(\vec{\nabla}_0\cdot\delta\hat{\tau}\right)\cdot\delta\vec{\varphi}dV_0 dt \ge 0. \quad (10)$$

Співвідношення (3)-(6) та достатні умови опуклості (9) складають повну систему рівнянь математичної моделі динамічних процесів у нелінійних пружних тілах.

1.2. Формулювання крайових задач. Вважаємо, що розглянута модель пружного континуума відповідає моделі ізотропного середовища. Приймемо також, що потенціал $H\left(\vec{p},\vec{q},\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u},\vec{\nabla}_0\otimes\vec{\varphi}\right)$ з достатньою ступінню точності може бути поданий сумою двох складових

$$H\left(\vec{p},\vec{q},\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u},\vec{\nabla}_0\otimes\vec{\varphi}\right)=K\left(\vec{p},\vec{q}\right)+\Phi\left(\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u},\vec{\nabla}_0\otimes\vec{\varphi}\right),$$

де $K\left(\vec{p},\vec{q}\right)$ — густина кінетичної енергії фізично малої підсистеми; $\Phi\left(\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u},\vec{\nabla}_0\otimes\vec{\varphi}\right)$ — нелінійний пружний потенціал [6]. В ізотропному випадку вказані потенціали є функціями скалярних інваріантів векторів $\vec{p}$, $\vec{q}$ і $\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}$, $\vec{\nabla}_0\otimes\vec{\varphi}$ відповідно.

Надалі приймемо, що густина кінетичної енергії є функцією незалежних скалярних інваріантів другого порядку для векторів $\vec{p}$ та $\vec{q}$, а також відповідного скалярного інваріанта, який враховує взаємозв'язок енергій поступальної та обертальної форм руху, тобто

$$K\left(\vec{p},\vec{q}\right)=\frac{1}{2\rho}I\left(\vec{p}\otimes\vec{p}\right)+\frac{1}{2\rho_*}I\left(\vec{q}\otimes\vec{q}\right)-\frac{\alpha}{\sqrt{\rho\rho_*}}I\left(\vec{p}\otimes\vec{q}\right), \quad (11)$$

де $I(\cdot)$ — перший інваріант тензора другого рангу, ρ, ρ_* — міри інерції поступального та обертального рухів відповідно; $\alpha>0$ — коефіцієнт взаємозв'язку енергій поступальної та обертальної форм руху.

За такого подання функції Гамільтона, фізичні співвідношення (3)-(4) для векторів швидкості поступального руху $\vec{v}$ та кутової швидкості $\vec{\omega}$ і тензорів напружень $\hat{\sigma}$ та $\hat{\tau}$ набувають вигляду

$$\vec{v}=\frac{1}{\rho}\vec{p}-\frac{\alpha}{\sqrt{\rho\rho_*}}\vec{q}, \quad \vec{\omega}=\frac{1}{\rho_*}\vec{q}-\frac{\alpha}{\sqrt{\rho\rho_*}}\vec{p}, \quad (12)$$

$$\hat{\sigma}=\frac{\partial\Phi\left(\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u},\vec{\nabla}_0\otimes\vec{\varphi}\right)}{\partial\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}}, \quad \hat{\tau}=\frac{\partial\Phi\left(\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u},\vec{\nabla}_0\otimes\vec{\varphi}\right)}{\partial\vec{\nabla}_0\otimes\vec{\varphi}}. \quad (13)$$

З метою формулювання крайових задач у переміщеннях запишемо співвідношення (12) таким чином

$$\vec{v}=\frac{1}{\rho}\int_{t_1}^{t}\left[\vec{\nabla}_0\cdot\hat{\sigma}+\vec{f}^{+}\right]d\tilde{t}-\frac{\alpha}{\sqrt{\rho\rho_*}}\int_{t_1}^{t}\left[\vec{\nabla}_0\cdot\hat{\tau}+\vec{\mu}^{+}\right]d\tilde{t}\,,$$

$$\vec{\omega}=\frac{1}{\rho_*}\int_{t_1}^{t}\left[\vec{\nabla}_0\cdot\hat{\tau}+\vec{\mu}^{+}\right]d\tilde{t}-\frac{\alpha}{\sqrt{\rho\rho_*}}\int_{t_1}^{t}\left[\vec{\nabla}_0\cdot\hat{\sigma}+\vec{f}^{+}\right]d\tilde{t}\,.$$

Із записаних співвідношень для векторів $\vec{v}$ та $\vec{\omega}$ отримаємо наступні рівняння руху

$$\vec{\nabla}_0\cdot\hat{\sigma}+\vec{f}^{+}=\frac{1}{1-\alpha^2}\left(\rho\frac{d^2\vec{u}}{dt^2}+\alpha\sqrt{\rho\rho_*}\frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}\right), \tag{14}$$

$$\vec{\nabla}_0\cdot\hat{\tau}+\vec{\mu}^{+}=\frac{1}{1-\alpha^2}\left(\rho_*\frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}+\alpha\sqrt{\rho\rho_*}\frac{d^2\vec{u}}{dt^2}\right). \tag{15}$$

Тут тензори $\hat{\sigma}$ і $\hat{\tau}$ визначаються за рівняннями стану (13).

2. Варіаційне формулювання крайових задач в термінах узагальнених швидкостей та тензорів напружень

З метою варіаційного формулювання визначальних співвідношень математичної моделі нелінійної локально-моментної теорії пружних систем у напруженнях та постановки відповідних крайових задач розглянемо повний функціонал, який заданий на просторі функцій векторів швидкостей $\vec{v}$ та $\vec{\omega}$ поступального та обертального руху, тензора напружень Піоли-Кірхгофа першого роду $\hat{\sigma}$ та тензора моментних напружень $\hat{\tau}$

$$J[\vec{v},\vec{\omega},\hat{\sigma},\hat{\tau}]=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_{X_0^*}\left[G(\vec{v},\vec{\omega},\hat{\sigma},\hat{\tau})+\left(\vec{\nabla}_0\cdot\hat{\sigma}\right)\cdot\vec{u}+\left(\vec{\nabla}_0\cdot\hat{\tau}\right)\cdot\vec{\varphi}+\vec{f}^{+}\cdot\vec{u}+\vec{\mu}^{+}\cdot\vec{\varphi}\right]dV_0-\right.$$
$$\left.-\int_{\partial X_0^*}\left[\vec{u}^{+}\cdot\vec{\sigma}_n+\vec{\varphi}^{+}\cdot\vec{\tau}_n\right]d\Sigma_0\right\}dt-\int_{X_0^*}\left[\vec{p}^{+}_{(2)}\cdot\vec{u}_{(2)}+\vec{q}^{+}_{(2)}\cdot\vec{\varphi}_{(2)}\right]dV_0\,. \tag{16}$$

Тут $G(\vec{v},\vec{\omega},\hat{\sigma},\hat{\tau})$ — додатньовизначена функція; $\vec{p}^{+}_{(2)}(\vec{r}_0)$, $\vec{q}^{+}_{(2)}(\vec{r}_0)$ — задані вектори імпульсів у момент часу $t=t_2$.

Перша варіація функціонала (16) є такою

$$\delta J[\vec{v},\vec{\omega},\hat{\sigma},\hat{\tau}]=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_{X_0^*}\left[\frac{\partial G}{\partial\vec{v}}\cdot\delta\vec{v}+\frac{\partial G}{\partial\vec{\omega}}\cdot\delta\vec{\omega}+\frac{\partial G}{\partial\hat{\sigma}}\cdot\cdot\delta\hat{\sigma}^T+\frac{\partial G}{\partial\hat{\tau}}\cdot\cdot\delta\hat{\tau}^T+\right.\right.$$
$$+\left(\vec{\nabla}_0\cdot\delta\hat{\sigma}\right)\cdot\vec{u}+\left(\vec{\nabla}_0\cdot\hat{\sigma}\right)\cdot\delta\vec{u}+\left(\vec{\nabla}_0\cdot\delta\hat{\tau}\right)\cdot\vec{\varphi}+\left(\vec{\nabla}_0\cdot\hat{\tau}\right)\cdot\delta\vec{\varphi}+\vec{f}^{+}\cdot\delta\vec{u}+\vec{\mu}^{+}\cdot\delta\vec{\varphi}\Big]\,dV_0-$$

$$
\left.-\int\limits_{\partial X_0^*}\left[\vec{u}^+\cdot\delta\vec{\sigma}_n+\vec{\varphi}^+\cdot\delta\vec{\tau}_n\right]d\Sigma_0\right\}dt-\int\limits_{X_0^*}\left[\vec{p}_{(2)}^{+}\cdot\delta\vec{u}_{(2)}+\vec{q}_{(2)}^{+}\cdot\delta\vec{\varphi}_{(2)}\right]dV_0\equiv
$$

$$
\equiv\int\limits_{t_1}^{t_2}\left\{\int\limits_{X_0^*}\left[\left(\frac{\partial G}{\partial\vec{v}}-\vec{p}\right)\cdot\delta\vec{v}+\left(\frac{\partial G}{\partial\vec{\omega}}-\vec{q}\right)\cdot\delta\vec{\omega}+\left(\frac{\partial G}{\partial\hat{\sigma}}-\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}\right)\cdot\cdot\delta\hat{\sigma}^T+\right.\right.
$$

$$
\left.\left.+\left(\frac{\partial G}{\partial\hat{\tau}}-\vec{\nabla}_0\otimes\vec{\varphi}\right)\cdot\cdot\delta\hat{\tau}^T\right]dV_0+\int\limits_{\partial X_0^*}\left[\left(\vec{u}-\vec{u}^+\right)\cdot\delta\vec{\sigma}_n+\left(\vec{\varphi}-\vec{\varphi}^+\right)\cdot\delta\vec{\tau}_n\right]d\Sigma_0\right\}dt+
$$

$$
+\int\limits_{X_0^*}\left[\left(\vec{p}_{(2)}-\vec{p}_{(2)}^{+}\right)\cdot\delta\vec{u}_{(2)}-\vec{p}_{(1)}\cdot\delta\vec{u}_{(1)}+\left(\vec{q}_{(2)}-\vec{q}_{(2)}^{+}\right)\cdot\delta\vec{\varphi}_{(2)}-\vec{q}_{(1)}\cdot\delta\vec{\varphi}_{(1)}\right]dV_0\,. \tag{17}
$$

З необхідної умови мінімуму функціонала (16), тобто рівності нулю його першої варіації $\delta J=0$, отримаємо таку систему рівнянь

$$
\vec{p}=\frac{\partial G(\vec{v},\vec{\omega},\hat{\sigma},\hat{\tau})}{\partial\vec{v}},\qquad \vec{q}=\frac{\partial G(\vec{v},\vec{\omega},\hat{\sigma},\hat{\tau})}{\partial\vec{\omega}}, \tag{18}
$$

— визначальні фізичні співвідношення для вектора імпульсу поступального руху та вектора моментного імпульсу;

$$
\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}=\frac{\partial G(\vec{v},\vec{\omega},\hat{\sigma},\hat{\tau})}{\partial\hat{\sigma}},\qquad \vec{\nabla}_0\otimes\vec{\varphi}=\frac{\partial G(\vec{v},\vec{\omega},\hat{\sigma},\hat{\tau})}{\partial\hat{\tau}} \tag{19}
$$

— визначальні фізичні співвідношення для тензора ґрадієнта вектора переміщення $\vec{u}$ та тензора ґрадієнта вектора повороту $\vec{\varphi}$;

$$
\vec{u}\big|_{\partial X_0}=\vec{u}^+,\qquad \vec{\varphi}\big|_{\partial X_0}=\vec{\varphi}^+ \tag{20}
$$

— крайові умови на границі області ∂X_0^*;

$$
\vec{p}\big|_{t=t_1}=0,\qquad \vec{p}\big|_{t=t_2}=\vec{p}_{(2)}^{+},\qquad \vec{q}\big|_{t=t_1}=0,\qquad \vec{q}\big|_{t=t_2}=\vec{q}_{(2)}^{+} \tag{21}
$$

— крайові умови на границі часового проміжку $[t_1,t_2]$.

2.1. Достатні умови опуклості функціонала. Умова опуклості функціонала (16) є такою

$$
\delta^2 J=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left\{\int\limits_{X_0^*}\left[\delta\left(\frac{\partial G}{\partial\vec{v}}-\vec{p}\right)\cdot\delta\vec{v}+\delta\left(\frac{\partial G}{\partial\vec{\omega}}-\vec{q}\right)\cdot\delta\vec{\omega}+\delta\left(\frac{\partial G}{\partial\hat{\sigma}}-\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}\right)\cdot\cdot\delta\hat{\sigma}^T+\right.\right.
$$

$$+\delta\left(\frac{\partial G}{\partial\hat{\tau}}-\vec{\nabla}_0\otimes\vec{\varphi}\right)\cdot\cdot\,\delta\hat{\tau}^T\Big]dV_0+\int\limits_{\partial X_0^*}[\delta\vec{u}\cdot\delta\vec{\sigma}_n+\delta\vec{\varphi}\cdot\delta\vec{\tau}_n\,]\,d\Sigma_0\Bigg\}dt+$$

$$+\int\limits_{X_0^*}\left[\delta\vec{p}_{(2)}\cdot\delta\vec{u}_{(2)}-\delta\vec{p}_{(1)}\cdot\delta\vec{u}_{(1)}+\delta\vec{q}_{(2)}\cdot\delta\vec{\varphi}_{(2)}-\delta\vec{q}_{(1)}\cdot\delta\vec{\varphi}_{(1)}\right]\,dV_0>0\,.$$

Надалі приймемо, що рівняння (18), (19) виконуються і для допустимих варіацій у відкритій області X_0^*. Тоді умова опуклості функціонала (16) набуває вигляду

$$\delta^2 J=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left\{\int\limits_{\partial X_0^*}[\delta\vec{u}\cdot\delta\vec{\sigma}_n+\delta\vec{\varphi}\cdot\delta\vec{\tau}_n\,]\,d\Sigma_0\right\}dt+$$

$$+\int\limits_{X_0^*}\left[\delta\vec{p}_{(2)}\cdot\delta\vec{u}_{(2)}-\delta\vec{p}_{(1)}\cdot\delta\vec{u}_{(1)}+\delta\vec{q}_{(2)}\cdot\delta\vec{\varphi}_{(2)}-\delta\vec{q}_{(1)}\cdot\delta\vec{\varphi}_{(1)}\right]\,dV_0>0\,. \qquad (22)$$

Після переходу в нерівності (22) від поверхневого інтеграла до об’ємного та застосування операції зінтегровування за часом отримаємо

$$\delta^2 J=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left\{\int\limits_{X_0^*}\left[\delta^2 G+2\left(\vec{\nabla}_0\cdot\delta\hat{\sigma}\right)\cdot\delta\vec{u}+2\left(\vec{\nabla}_0\cdot\delta\hat{\tau}\right)\cdot\delta\vec{\varphi}\right]dV_0\right\}dt>0\,. \qquad (23)$$

За достатні умови опуклості функціонала (16) можна прийняти зокрема, умови

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{X_0^*}\delta^2 G dV_0 dt>0\,,$$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{X_0^*}\left(\vec{\nabla}_0\cdot\delta\hat{\sigma}\right)\cdot\delta\vec{u}dV_0dt\geq 0\,,\quad \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{X_0^*}\left(\vec{\nabla}_0\cdot\delta\hat{\tau}\right)\cdot\delta\vec{\varphi}dV_0dt\geq 0\,. \qquad (24)$$

2.2. Формулювання крайових задач. Надалі приймаємо, що потенціал $G\left(\vec{v},\vec{\omega},\hat{\sigma},\hat{\tau}\right)$ з достатньою ступінню точності може бути поданий сумою двох складових

$$G\left(\vec{v},\vec{\omega},\hat{\sigma},\hat{\tau}\right)=K^*\left(\vec{v},\vec{\omega}\right)+\Psi\left(\hat{\sigma},\hat{\tau}\right),$$

де $K^*\left(\vec{v},\vec{\omega}\right)$ — густина кінетичної енергії поступального й обертального рухів; $\Psi\left(\hat{\sigma},\hat{\tau}\right)$ — нелінійний пружний потенціал. В ізотропному випадку функції $K^*\left(\vec{v},\vec{\omega}\right)$ та $\Psi\left(\hat{\sigma},\hat{\tau}\right)$ є функціями скалярних інваріантів векторів швидкостей $\vec{v}$ і $\vec{\omega}$ та тензорів напружень $\hat{\sigma}$ і $\hat{\tau}$ відповідно.

Для густини кінетичної енергії у квадратичному наближенні приймемо

$$K^*(\vec{v},\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\rho I(\vec{v}\otimes\vec{v}) + \frac{1}{2}\rho_* I(\vec{\omega}\otimes\vec{\omega}) + \frac{\alpha}{1-\alpha^2}\sqrt{\rho\rho_*}\, I(\vec{v}\otimes\vec{\omega}). \tag{25}$$

Тут коефіцієнти ρ, ρ_* — введені вище міри інерційності поступальної й обертальної форм руху, $\alpha > 0$ — введений вище коефіцієнт взаємовпливу обох форм руху.

За вказаного подання густини кінетичної енергії $K^*(\vec{v},\vec{\omega})$ базові фізичні співвідношення (18)-(19) для векторів $\vec{p}$ та $\vec{q}$ і тензорів $\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}$ та $\vec{\nabla}_0\otimes\vec{\varphi}$ є такими

$$\vec{p} = \rho\vec{v} + \frac{\alpha}{1-\alpha^2}\sqrt{\rho\rho_*}\,\vec{\omega}, \quad \vec{q} = \rho_*\vec{\omega} + \frac{\alpha}{1-\alpha^2}\sqrt{\rho\rho_*}\,\vec{v}, \tag{26}$$

$$\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u} = \frac{\partial\Psi(\hat{\sigma},\hat{\tau})}{\partial\hat{\sigma}}, \; \vec{\nabla}_0\otimes\vec{\varphi} = \frac{\partial\Psi(\hat{\sigma},\hat{\tau})}{\partial\hat{\tau}}. \tag{27}$$

Для одержання системи рівнянь локально-моментної теорії відносно тензорів напружень приймемо за основу фізичні співвідношення (26), (27). Зінтегруємо за часом рівняння (26). З урахуванням означення векторів імпульсів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, одержимо

$$\rho\vec{u} + \frac{\alpha}{1-\alpha^2}\sqrt{\rho\rho_*}\;\vec{\varphi} = \int_{t_1}^{t}(t-\tilde{t})\left(\vec{\nabla}_0\cdot\hat{\sigma} + \vec{f}^{\,+}\right)d\tilde{t}, \tag{28}$$

$$\rho_*\vec{\varphi} + \frac{\alpha}{1-\alpha^2}\sqrt{\rho\rho_*}\;\vec{u} = \int_{t_1}^{t}(t-\tilde{t})\left(\vec{\nabla}_0\cdot\hat{\tau} + \vec{\mu}^{+}\right)d\tilde{t}. \tag{29}$$

На співвідношення (28) і (29) подіємо оператором $\vec{\nabla}_0$. В отримані формули підставимо визначальні співвідношення (27) для тензорів деформацій $\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}$, $\vec{\nabla}_0\otimes\vec{\varphi}$. В результаті одержимо рівняння стосовно тензорів напружень $\hat{\sigma}$ і $\hat{\tau}$

$$\rho\,\frac{\partial\Psi(\hat{\sigma},\hat{\tau})}{\partial\hat{\sigma}} + \frac{\alpha}{1-\alpha^2}\sqrt{\rho\rho_*}\;\frac{\partial\Psi(\hat{\sigma},\hat{\tau})}{\partial\hat{\tau}} = \int_{t_1}^{t}(t-\tilde{t})\vec{\nabla}_0\otimes\left[\vec{\nabla}_0\cdot\hat{\sigma} + \vec{f}^{\,+}\right]d\tilde{t}, \tag{30}$$

$$\rho_*\,\frac{\partial\Psi(\hat{\sigma},\hat{\tau})}{\partial\hat{\tau}} + \frac{\alpha}{1-\alpha^2}\sqrt{\rho\rho_*}\;\frac{\partial\Psi(\hat{\sigma},\hat{\tau})}{\partial\hat{\sigma}} = \int_{t_1}^{t}(t-\tilde{t})\vec{\nabla}_0\otimes\left[\vec{\nabla}_0\cdot\hat{\tau} + \vec{\mu}^{+}\right]d\tilde{t}. \tag{31}$$

До рівнянь (30), (31) необхідно долучити крайові умови (20), (21), які в напруженнях є такими

$$\left.\left\{\int_{t_1}^{t}\left(t-\tilde{t}\right)\left(\vec{\nabla}_0\cdot\hat{\sigma}+\vec{f}^{\,+}\right)d\tilde{t}\right\}\right|_{\partial X_0}=\rho\vec{u}^{\,+},\quad \left.\left\{\int_{t_1}^{t}\left(t-\tilde{t}\right)\left(\vec{\nabla}_0\cdot\hat{\tau}+\vec{\mu}^{\,+}\right)d\tilde{t}\right\}\right|_{\partial X_0}=\rho_*\vec{\varphi}^{\,+}, \quad (32)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{\nabla}_0\cdot\hat{\sigma}+\vec{f}^{\,+}\right)d\tilde{t}=\vec{p}^{\,+}_{(2)},\qquad \int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{\nabla}_0\cdot\hat{\tau}+\vec{\mu}^{\,+}\right)d\tilde{t}=\vec{q}^{\,+}_{(2)}. \quad (33)$$

Висновки. Розроблено два варіанти варіаційного формулювання крайових задач нелінійної локально-моментної теорії пружності в термінах силових імпульсів і узагальнених переміщень або, відповідно, узагальнених швидкостей і тензорів напружень. Отримані результати є базовими для загального дослідження розв’язків сформульованих крайових задач методами функціонального аналізу (зокрема, встановлення достатніх умов існування та єдиності слабких розв’язків).

Запропоновані повні функціонали можуть бути прийняті за основу для розробки алгоритмів та схем наближеного розв’язування відповідних крайових задач з використанням варіаційних методів.

Отримані співвідношення варіаційного формулювання крайових задач є вихідними для ітераційної побудови двовимірних та одновимірних математичних моделей механіки елементів тонкостінних конструкцій (оболонки, пластини, стержні).

Робота виконана за часткової фінансової підтримки Фонду фундаментальних досліджень Міністерства науки та освіти України.

Література

[1] *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. — М: Наука, 1980. — 512 с.
[2] *Ciarlet P. G.* Mathematical elasticity. Vol. 1. — North-Holland, 1993. — 452 p.
[3] Фізико-математичне моделювання складних систем / *Бурак Я., Чапля Є.* та ін. Під ред. *Бурака Я., Чаплі Є.* — Львів: Сполом, 2004. — 262 с.
[4] *Бурак Я. Й., Мороз Г. І.* Математичне моделювання крайових задач нелінійної моментної теорії пружності з використанням варіаційного підходу // Доп. НАН України. — 2003. — № 7. — С. 40-45.
[5] *Бурак Я. Й., Мороз Г. І.* Про два варіанти варіаційного формулювання крайових задач нелінійної механіки пружних систем // Мат. методи і фіз.-мех. поля. — 2004. — Т. 47, № 3. — С. 78-86.
[6] *Победря Б. Е.* Лекции по тензорному анализу. — М: Изд-во Моск-го ун-та, 1986. — 262 с.

The Boundary Value Problems of Local Coupled-Stress Elasticity Theory. The Variational Formulations

Yaroslav Burak, Halyna Moroz

On the basis of complete energy functionals the two variants of variational formulations for boundary value problems of nonlinear local coupled-stress elasticity theory are proposed. In the first case the basic potential (Hamilton function) is specified at the phase space of force impulse vectors of translational motion and angular one, and tensors of the position vector gradient and gradient of local rotation. In the second case the conjugate Hamilton potential is the function being specified at phase space of velocity vectors for translational and angular motions, and corresponding tensors of force and coupled stresses. The obtained physical relationships are elaborated on the case when the kinetic equations are linear with considering physical non-linearity of straining processes.

Краевые задачи локально-моментной теории упругости. Вариационные формулирования

Ярослав Бурак, Галина Мороз

Предложены два варианта вариационного формулирования краевых задач нелинейной локально-моментной теории упругости на основании полных функционалов. В первом случае базовый потенциал (функция Гамильтона) задается на фазовом пространстве векторов силовых импульсов поступательной и вращательной форм движения и тензоров градиента места и градиента локальных вращений. Во втором случае сопряженный потенциал Гамильтона является функцией, заданной на фазовом пространстве векторов скоростей поступательного и вращательного движений и соответствующих тензоров силовых и моментных напряжений. Полученные физические соотношения сконкретезированы для случаев, когда кинетические уравнения линейны, но учитывается физическая нелинейность процессов деформирования.

Отримано 01.10.04