УДК 539.3

Моделювання електромагнетотермомеханічних процесів у в'язкій електропровідній поляризовній рідині з урахуванням необоротності локальних зміщень маси та електричного заряду

Ольга Грицина[1], Василь Кондрат[2]

[1] к. ф.-м. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: gryt@cmm.lviv.ua
[2] д. ф.-м. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: kon@cmm.lviv.ua

З використанням термодинаміки нерівноважних процесів, механіки й електродинаміки суцільних середовищ отримано повну систему рівнянь для опису взаємозв'язаних електромагнетотермомеханічних процесів у в'язкій електропровідній неферомагнетній поляризовній рідині з урахуванням необоротності процесів локального зміщення електричного заряду та маси. З цією метою вектори градієнта приведеної величини енергетичної міри впливу зміщення маси на внутрішню енергію та напруженості електричного поля подані сумами їх оборотних і необоротних складових. Це дозволило отримати диференціальні реологічні визначальні співвідношення для векторів зміщення маси й електричного заряду (поляризації). Побудована модель дозволяє проаналізувати кінетику поверхневої поляризації та становлення приповерхневої неоднорідності напружено-деформованого стану в'язкої рідини.

Ключові слова: в'язка поляризовна рідина, взаємозв'язані електромагнетотермомеханічні процеси, необоротне зміщення маси та електричного заряду, нелокальність.

Вступ. Процес локального зміщення маси, який, зазвичай, пов'язаний із деякою структурною перебудовою речовини, спостерігається при формуванні приповерхневої області тіл, поляризації діелектриків, поверхневій взаємодії різнорідних фаз [1, 2]. Уперше увагу на процес зміщення маси у термомеханічних системах звернуто у праці [3]. У низці робіт, зокрема [4-6], локальне зміщення маси враховано при вивченні приповерхневої неоднорідності та проблем міцності одно- та багатокомпонентних термомеханічних систем на основі лагранжевого опису. У дослідженнях [7, 8] із використанням ейлерового підходу побудовано математичні моделі для опису термомеханічних процесів у в'язкій рідині та твердих розчинах. При цьому процес локального зміщення маси у згаданих роботах описувався у наближенні оборотного. Метою цієї роботи є врахування локального зміщення маси при описі взаємозв'язаних механічних, теплових та електромагнетних процесів у поляризовній електропровідній неферомагнетній в'язкій рідині у припущенні необоротності процесів локального зміщення як маси, так і заряду.

1. Об'єкт дослідження

Об'єктом дослідження є в'язка поляризовна стислива рідина, в якій протікають фізико-механічні процеси, визначальними з яких є деформування, тепло- й електропровідності, а також локального зміщення електричного заряду (поляризація) та маси. Останні два процеси будемо пов'язувати з упорядкуванням молекулярної структури рідини (наприклад, під дією електричного поля) та характеризуватимемо відповідно векторними потоками $\vec{J}_{es}$ та $\vec{J}_{ms}$ [7, 9].

Базові співвідношення пропонованої фізико-математичної моделі, яка описує взаємозв'язані електромагнетотермомеханічні процеси в системі «в'язка рідина – зовнішнє електромагнетне поле», будемо формулювати за підходом Ейлера з орієнтацією на лабораторну систему координат із врахуванням підходів і положень термодинаміки незворотних процесів, механіки й електродинаміки суцільних середовищ.

2. Рівняння електродинаміки

Рівняння, які відображають закони Ампера, Фарадея та збереження електричного заряду, в інтегральній формі є такими [9-11]

$$\oint\limits_{(l)} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int\limits_{(\Sigma_l)} \vec{B}\cdot\vec{n}\, d\Sigma\,, \qquad \oint\limits_{(l)} \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int\limits_{(\Sigma_l)} \vec{J}_{ef}\cdot\vec{n}\, d\Sigma\,,$$

$$\oint\limits_{(\Sigma)} \vec{J}_e\cdot\vec{n}\, d\Sigma = -\frac{d}{dt}\int\limits_{(V)} \rho_e dV\,. \tag{1}$$

Тут $\vec{E}$ та $\vec{H}$ — вектори напруженостей електричного та магнетного полів; $\vec{B}$ — вектор індукції магнетного поля (для неферомагнетного середовища $\vec{B}=\mu_0\vec{H}$, μ_0 — магнетна стала); $\vec{J}_e$ — вектор густини електричного струму; $\vec{J}_{ef}=\vec{J}_e+\vec{J}_{ed}+$ $+\vec{J}_{es}$ — вектор густини повного електричного струму; $\vec{J}_{ed}=\varepsilon_0\left(\partial\vec{E}/\partial t\right)$, де ε_0 — електрична стала; $\vec{J}_{es}$ — вектор густини струму, зумовленого впорядкуванням зарядової системи (поляризаційний струм); ρ_e — густина вільного електричного заряду; t — час; (V), (Σ) — довільно вибрана область і поверхня, яка її обмежує; (l) — контур, який обмежує довільно обрану поверхню (Σ_l); $\vec{n}$ — вектор зовнішньої нормалі до поверхні (Σ_l) або (Σ), «·» — знак скалярного добутку.

Співвідношенням [9]

$$\vec{\Pi}_e\left(\vec{r},t\right)=\int\limits_0^t \vec{J}_{es}\left(\vec{r},t'\right)dt' \tag{2}$$

введемо вектор $\vec{\Pi}_e$ локального зміщення електричного заряду так, що

$$\vec{J}_{es}=\frac{\partial\vec{\Pi}_e}{\partial t}\,. \tag{3}$$

Тут $\vec{r}$ — радіус вектор. Тоді для вектора $\vec{J}_{ef}$ густини повного електричного струму маємо

$$\vec{J}_{ef} = \vec{J}_e + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\Pi}_e}{\partial t}. \tag{4}$$

Введемо також величину $\rho_{e\pi}$ — густину наведеного заряду [9], яка має розмірність густини електричного заряду. Вимагаємо, щоб для довільного тіла скінченних розмірів (область (V)) вектор $\vec{\Pi}_e$ локального зміщення електричного заряду (який має розмірність густини електричного дипольного моменту Кл·м / м^3) та густина $\rho_{e\pi}$ [9] задовольняли співвідношення

$$\int_{(V)} \vec{\Pi}_e \, dV = \int_{(V)} \rho_{e\pi} \vec{r} \, dV . \tag{5}$$

З огляду на довільність області (V), незалежність співвідношення (5) від вибору системи відліку, а також тотожність $\vec{a} \cdot \vec{\Pi}_e = \left(\vec{\Pi}_e \cdot \vec{\nabla}\right)\left(\vec{a} \cdot \vec{r}\right)$ ($\vec{a}$ довільний сталий вектор, $\vec{\nabla}$ — оператор Гамільтона), з виразу (5) маємо [9]

$$\int_{(V)} \rho_{e\pi} \, dV = 0 , \tag{6}$$

$$\rho_{e\pi} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_e . \tag{7}$$

Якщо продиференціювати співвідношення (7) за часом і прийняти до уваги формулу (3), то одержимо рівняння

$$\frac{\partial \rho_{e\pi}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{es} = 0 ,$$

яке має форму закону збереження наведеного електричного заряду [9].

Застосовуючи теореми Остроградського-Гауса та Стокса [12] до рівнянь (1) і використовуючи подання (4), отримуємо таку локальну форму цих рівнянь

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_e + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\Pi}_e}{\partial t} , \tag{8}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_e + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0 . \tag{9}$$

Тут «×» — знак векторного добутку.

Якщо подіяти оператором дівергенції на рівняння (8), врахувати (9) і співвідношення $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{f}\right) \equiv 0$ [12], то одержимо

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)=0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{\nabla}\cdot\left(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{\Pi}_e\right)-\rho_e\right]=0. \tag{10}$$

Введемо вектор $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{\Pi}_e$, який природно назвати вектором індукції електричного поля. Приймемо початкові умови для $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}$ та $\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}-\rho_e\right)$ нульовими. Тоді наслідком співвідношень (10) є рівняння

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho_e, \tag{11}$$

які відображають закони Гауса-Фарадея та Гауса-Кулона і разом із рівняннями (8) складають повну систему рівнянь Максвела [9-11]. Надалі замість вектора $\vec{\Pi}_e$ будемо використовувати загальновживане позначення $\vec{P}$ для вектора поляризації.

3. Рівняння балансу маси

Рівняння балансу маси рідини в інтегральній формі має вигляд [13, 14]

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(V)}\rho dV=-\int\limits_{(\Sigma)}\vec{J}_*\cdot\vec{n}d\Sigma, \tag{12}$$

де ρ — густина маси; $\vec{J}_*$ — вектор густини потоку маси. Зазначимо, що при формулюванні рівняння (12) знехтувано складовими, які зумовлені наявністю електромагнетного поля, оскільки їх вплив стає вагомим лише за дуже великих значень напруженостей електричного та магнетного полів (фактично недосяжних на практиці).

Приймаємо, що вектор $\vec{J}_*$ визначається сумою конвективної складової $\rho\vec{v}_*$ (де $\vec{v}_*$ — середня швидкість частинок тіла за відсутності упорядкування структури) та складової $\vec{J}_{ms}$, тобто $\vec{J}_*=\rho\vec{v}_*+\vec{J}_{ms}$.

Аналогічно до вектора локального зміщення електричного заряду введемо вектор $\vec{\Pi}_m$ локального зміщення маси

$$\vec{\Pi}_m\left(\vec{r},t\right)=\int\limits_0^t\vec{J}_{ms}\left(\vec{r},t'\right)dt', \tag{13}$$

який має розмірність густини масового дипольного моменту кг·м / м^3. Як наслідок, із формули (13) маємо

$$\vec{J}_{ms}=\frac{\partial\vec{\Pi}_m}{\partial t}. \tag{14}$$

Тоді, враховуючи формулу (14), для вектора $\vec{J}_*$ потоку маси отримаємо

$$\vec{J}_* = \rho\vec{v}_* + \frac{\partial\vec{\Pi}_m}{\partial t}. \tag{15}$$

Співвідношенням

$$\vec{v} = \frac{1}{\rho}\left(\rho\vec{v}_* + \frac{\partial\vec{\Pi}_m}{\partial t}\right) \tag{16}$$

означимо вектор $\vec{v}$ швидкості центра мас частинок тіла.

З урахуванням співвідношень (15), (16) і теореми Остроградського-Гаусса рівняння балансу маси (12) у локальній формі набуває стандартного вигляду [12, 13]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0. \tag{17}$$

Якщо врахувати подання (16) і ввести вектор

$$\vec{J}_m = \rho\left(\vec{v}_* - \vec{v}\right), \tag{18}$$

то рівняння (17) балансу маси можна записати так

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{v} + \vec{J}_m + \frac{\partial\vec{\Pi}_m}{\partial t}\right) = 0. \tag{19}$$

Слід зазначити, що зі співвідношень (16) і (18) випливає, що

$$\vec{J}_m = -\frac{\partial\vec{\Pi}_m}{\partial t}. \tag{20}$$

Аналогічно до густини наведеного заряду $\rho_{e\pi}$ введемо величину $\rho_{m\pi}$, яка має розмірність густини маси, і яку назвемо густиною наведеної маси. Приймаємо, що для довільного тіла скінченних розмірів (область (V)) вектор $\vec{\Pi}_m$ локального зміщення маси та густина $\rho_{m\pi}$ задовольняють таке інтегральне співвідношення

$$\int_{(V)} \vec{\Pi}_m dV = \int_{(V)} \rho_{m\pi}\,\vec{r}\,dV. \tag{21}$$

Наслідком формули (21) є

$$\int_{(V)} \rho_{m\pi}\,dV = 0, \tag{22}$$

$$\rho_{m\pi} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}_m. \tag{23}$$

Із співвідношень (14) і (23) одержуємо рівняння

$$\frac{\partial\rho_{m\pi}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_{ms} = 0, \tag{24}$$

яке має форму закону збереження наведеної маси.

4. Рівняння балансу ентропії

Швидкість зміни ентропії елемента тіла визначається притоком ентропії ззовні, конвективною складовою потоку, виникненням ентропії σ_s за одиницю часу та джерелами тепла $\Re$. В інтегральній формі рівняння балансу ентропії має вигляд [13]

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(V)}\rho s dV = -\oint\limits_{(\Sigma)}\vec{J}_s\cdot\vec{n}\,d\Sigma - \oint\limits_{(\Sigma)}\rho s\vec{v}\cdot\vec{n}\,d\Sigma + \int\limits_{(V)}\sigma_s dV + \int\limits_{(V)}\rho\frac{\Re}{T}dV\,, \qquad (25)$$

де s — питома ентропія, $\vec{J}_s$ — вектор густини потоку ентропії, T — абсолютна температура.

Якщо врахувати співвідношення $\vec{J}_s = \vec{J}_q / T$ між векторами густини потоків ентропії $\vec{J}_s$ і тепла $\vec{J}_q$, а також теорему Остроградського-Гаусса, то у локальній формі рівняння (25) є таким

$$\rho T\frac{ds}{dt} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_q + \frac{1}{T}\vec{J}_q\cdot\vec{\nabla}T + T\sigma_s + \rho\Re\,. \qquad (26)$$

Тут $d.../dt = \partial.../\partial t + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}...$ — повна похідна за часом.

5. Рівняння балансу енергії електромагнетного поля

Із рівнянь Максвела випливає рівняння, яке трактують як рівняння балансу енергії електромагнетного поля [9-11],

$$\frac{\partial U_e}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S}_e + \left(\vec{J}_e + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\right)\cdot\vec{E} = 0\,. \qquad (27)$$

Тут $U_e = \left(\varepsilon_0\vec{E}^2 + \mu_0\vec{H}^2\right)/2$ — густина енергії електромагнетного поля, $\vec{S}_e = \vec{E}\times\vec{H}$ — вектор густини потоку енергії електромагнетного поля. Остання складова у рівнянні (27) відображає вплив електромагнетного поля на речовину, яка разом із полем складає єдину матеріальну систему. Перепишемо цей доданок таким чином, щоб у нього входили вектори

$$\vec{E}_* = \vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\,, \quad \vec{P}_* = \vec{P} + \varepsilon_0\mu_0\vec{v}\times\vec{M}\,, \quad \vec{J}_{e*} = \vec{J}_e - \rho_e\vec{v}\,, \qquad (28)$$

напруженості електричного поля $\vec{E}_*$, поляризації $\vec{P}_*$ та густини $\vec{J}_{e*}$ електричного струму провідності, віднесені до системи відліку центрів мас, яка рухається зі швидкістю $\vec{v}$ відносно лабораторної системи відліку. У формулах (28) $\vec{M}$ — вектор намагнеченості, який у випадку немагнетного тіла дорівнює нулеві. Тоді, враховуючи рівняння балансу маси (17) та перетворення Лоренца (28) [9], рівняння (27) балансу енергії електромагнетного поля запишемо так

$$\frac{\partial U_e}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S}_e + \vec{J}_{e*}\cdot\vec{E}_* + \left[\rho_e\vec{E}_* + \left(\vec{J}_{e*} + \frac{\partial(\rho\vec{p})}{\partial t}\right)\times\vec{B} + \right.$$

$$\left. +\rho\left(\vec{\nabla}\otimes\vec{E}_*\right)\cdot\vec{p}\right]\cdot\vec{v} + \rho\vec{E}_*\cdot\frac{d\vec{p}}{dt} - \vec{\nabla}\cdot\left[\rho\left(\vec{E}_*\cdot\vec{p}\right)\hat{I}\cdot\vec{v}\right] = 0\,. \tag{29}$$

Тут $\vec{p} = \vec{P}/\rho$ — вектор питомої поляризації, «$\otimes$» — знак діадного (тензорного) добутку.

6. Рівняння балансу енергії

Приймаємо, що повна енергія системи «в'язка рідина – електромагнетне поле» у довільний момент часу є сумою внутрішньої ρu (u — питома внутрішня енергія), кінетичної $\rho\vec{v}^2/2$ енергій та енергії U_e електромагнетного поля. Її зміна відбувається внаслідок наявності конвективної складової потоку енергії, дії поверхневих сил потужності $\hat{\sigma}\cdot\vec{v}$, потоку енергії електромагнетного поля $\vec{S}_e$, потоку тепла $\vec{J}_q$, роботи, затраченої на масоперенесення $\mu\vec{J}_m$ й «упорядкування» структури тіла $\mu_\pi\,\partial\vec{\Pi}_m/\partial t$, а також дії масових сил $\vec{F}$ і розподілених теплових джерел потужності $\Re$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(V)}\left[\rho\left(u + \frac{1}{2}\vec{v}^2\right) + U_e\right]dV = -\oint\limits_{(\Sigma)}\left[\rho\left(u + \frac{1}{2}\vec{v}^2\right)\vec{v} - \hat{\sigma}\cdot\vec{v} + \vec{S}_e + \vec{J}_q + \right.$$

$$\left. +\mu\vec{J}_m + \mu_\pi\frac{\partial\vec{\Pi}_m}{\partial t}\right]\cdot\vec{n}\,d\Sigma + \int\limits_{(V)}\left(\rho\vec{F}\cdot\vec{v} + \rho\Re\right)dV\,. \tag{30}$$

Тут $\hat{\sigma} = -p\hat{I} + \hat{P}_v$ — тензор напружень, p — тиск, $\hat{P}_v$ — тензор в'язких напружень, $\hat{I}$ — одиничний тензор, μ, μ_π — хімічний потенціал і зміна внутрішньої енергії системи, яка зумовлена локальним зміщенням маси.

Враховуючи формулу (20), рівняння балансу маси (17) та ентропії (26), енергії електромагнетного поля (29), а також теорему Остроградського-Гаусса, з (30) отримуємо таке рівняння балансу енергії у локальній формі

$$\rho\frac{du}{dt} = \rho T\frac{ds}{dt} - \left(p + \rho\vec{E}_*\cdot\vec{p}\right)\frac{de}{dt} + P_{vl}\frac{de}{dt} + \hat{P}_{vt} : \frac{d\hat{e}^d}{dt} + \rho\vec{E}_*\cdot\frac{\partial\vec{p}}{\partial t} - \mu'_\pi\frac{\partial\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}_m}{\partial t} -$$

$$-\vec{\nabla}\mu'_\pi\cdot\frac{\partial\vec{\Pi}_m}{\partial t} - \vec{J}_q\cdot\frac{\vec{\nabla}T}{T} - T\sigma_S - \vec{v}\cdot\left[\rho\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{\nabla}\left(p + \rho\vec{E}_*\cdot\vec{p}\right) - \vec{\nabla}\cdot\hat{P}_v - \right.$$

$$\left. -\rho_e\vec{E}_* - \left(\vec{J}_{e*} + \frac{\partial(\rho\vec{p})}{\partial t}\right)\times\vec{B} - \rho\left(\vec{\nabla}\otimes\vec{E}_*\right)\cdot\vec{p} - \rho\vec{F}\right]. \tag{31}$$

Тут $\hat{P}_v = P_{vl}\hat{I} + \hat{P}_{vt}$, $P_{vl}\hat{I}$ та $\hat{P}_{vt}$ — складові тензора в'язких напружень, зумовлені відповідно зміною об'єму та форми; e, $\hat{e}^d$ — кульова та девіаторна складові тензора деформації $\hat{e} = \left(\vec{\nabla} \otimes \vec{u} + \vec{u} \otimes \vec{\nabla}\right)/2$, $\vec{u}$ — вектор переміщення, $\mu'_\pi = \mu_\pi - \mu$.

З огляду на подання (23) та рівняння балансу маси (17), із (31) приходимо до такого рівняння балансу внутрішньої енергії

$$\rho\frac{du}{dt} = \rho T\frac{ds}{dt} - p_*\frac{de}{dt} + \rho\vec{E}_* \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} + \rho\mu'_\pi\frac{d\rho_m}{dt} - \rho\vec{\nabla}\mu'_\pi \cdot \frac{d\vec{\pi}_m}{dt} +$$
$$+P_{vl}\frac{de}{dt} + \hat{P}_{vt} : \frac{d\hat{e}^d}{dt} + \vec{J}_{e*} \cdot \vec{E}_* - \vec{J}_q \cdot \frac{\vec{\nabla}T}{T} - T\sigma_s -$$
$$-\vec{v} \cdot \left(\rho\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{\nabla}p_* - \vec{\nabla} \cdot \hat{P}_v - \vec{F}_e - \rho\vec{F}_*\right). \qquad (32)$$

Тут введено питомі величини $\vec{\pi}_m = \vec{\Pi}_m / \rho$, $\rho_m = \rho_{m\pi} / \rho$; а приведений тиск p_*, вектори густин приведеної масової $\vec{F}_*$ та пондеромоторної $\vec{F}_e$ сил визначаються такими співвідношеннями

$$p_* = p + \rho\left(\vec{E}_* \cdot \vec{p} - \rho_m\mu'_\pi - \vec{\pi}_m \cdot \vec{\nabla}\mu'_\pi\right), \qquad \vec{F}_* = \vec{F} + \rho_m\vec{\nabla}\mu'_\pi - \vec{\pi}_m \cdot \vec{\nabla} \otimes \vec{\nabla}\mu'_\pi .$$
$$\vec{F}_e = \rho_e\vec{E}_* + \left(\vec{J}_{e*} + \frac{\partial(\rho\vec{p})}{\partial t}\right) \times \vec{B} + \rho\left(\vec{\nabla} \otimes \vec{E}_*\right) \cdot \vec{p} .$$

Подамо вектори $\vec{E}_*$ та $\vec{\nabla}\mu'_\pi$ як суми їх оборотних $\vec{E}^r_*$, $\vec{\nabla}\mu'^r_\pi$ та необоротних $\vec{E}^i_*$, $\vec{\nabla}\mu'^i_\pi$ складових, тобто $\vec{E}_* = \vec{E}^r_* + \vec{E}^i_*$, $\vec{\nabla}\mu'_\pi = \vec{\nabla}\mu'^r_\pi + \vec{\nabla}\mu'^i_\pi$. Тоді рівняння (32) балансу внутрішньої енергії набуде вигляду

$$\rho\frac{du}{dt} = \rho T\frac{ds}{dt} - p_*\frac{de}{dt} + \rho\vec{E}^r_* \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} + \rho\mu'_\pi\frac{d\rho_m}{dt} - \rho\vec{\nabla}\mu'^r_\pi \cdot \frac{d\vec{\pi}_m}{dt} +$$
$$+\rho\vec{E}^i_* \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} - \rho\vec{\nabla}\mu'^i_\pi \cdot \frac{d\vec{\pi}_m}{dt} + P_{vl}\frac{de}{dt} + \hat{P}_{vt} : \frac{d\hat{e}^d}{dt} + \vec{J}_{e*} \cdot \vec{E}_* - \vec{J}_q \cdot \frac{\vec{\nabla}T}{T} - T\sigma_s -$$
$$-\vec{v} \cdot \left(\rho\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{\nabla}p_* - \vec{\nabla} \cdot \hat{P}_v - \vec{F}_e - \rho\vec{F}_*\right). \qquad (33)$$

Якщо врахувати інваріантність рівняння балансу внутрішньої енергії щодо просторових трансляцій і прийняти, що внутрішня енергія u визначається скалярними s, e, ρ_m та векторними $\vec{p}$, $\vec{\pi}_m$ параметрами, тобто $u = u\left(s, e, \rho_m, \vec{p}, \vec{\pi}_m\right)$, то з формули (33) отримаємо рівняння Гіббса

$$du = Tds - \rho^{-1}p_*de + \vec{E}^r_* \cdot d\vec{p} + \mu'_\pi d\rho_m + \vec{\nabla}\mu'^r_\pi \cdot d\vec{\pi}_m , \qquad (34)$$

вираз для виробництва ентропії

$$\sigma_s = P_{vl}\frac{1}{T}\frac{de}{dt} + \hat{P}_{vt} : \frac{1}{T}\frac{d\hat{e}^d}{dt} - \vec{J}_q \cdot \frac{\vec{\nabla}T}{T^2} + \vec{J}_{e*} \cdot \frac{\vec{E}_*}{T} + \rho\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \frac{\vec{E}_*^i}{T} - \rho\frac{d\vec{\pi}_m}{dt} \cdot \frac{\vec{\nabla}\mu_\pi''^i}{T} \qquad (35)$$

та рівняння балансу імпульсу

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}p_* + \vec{\nabla} \cdot \hat{P}_v + \vec{F}_e + \rho\vec{F}_* . \qquad (36)$$

Застосовуючи перетворення Лежандра $f = u - Ts - \vec{p} \cdot \vec{E}_*^r + \vec{\pi}_m \cdot \vec{\nabla}\mu_\pi''^r$ [12], перейдемо у рівнянні (34) до питомої узагальненої вільної енергії Гельмгольца. Приймаючи до уваги, що $f = f\left(T, e, \rho_m, \vec{E}_*^r, \vec{\nabla}\mu_\pi''^r\right)$, отримуємо таке узагальнене рівняння Гіббса

$$df = -sdT - \rho^{-1}p_* de - \vec{p} \cdot d\vec{E}_*^r + \mu_\pi' d\rho_m + \vec{\pi}_m \cdot d\vec{\nabla}\mu_\pi''^r . \qquad (37)$$

Відзначимо, що у простір параметрів $T, e, \vec{E}_*^r$, які визначають термодинамічний стан в'язкої рідини у класичній термомеханіці поляризовних тіл, тепер додатково введено нові параметри, а саме: ρ_m і $\vec{\nabla}\mu_\pi''^r$, які пов'язані з урахуванням локального зміщення маси.

7. Рівняння стану

Враховуючи, що $f = f\left(T, e, \rho_m, \vec{E}_*^r, \vec{\nabla}\mu_\pi''^r\right)$, з рівняння Гіббса (37) одержуємо

$$\left(\frac{df}{de} + \frac{1}{\rho}p_*\right)de + \left(\frac{df}{dT} + s\right)dT + \left(\frac{df}{d\rho_m} - \mu_\pi'\right)d\rho_m +$$
$$+\left(\frac{df}{d\vec{E}_*^r} + \vec{p}\right) \cdot d\vec{E}_*^r + \left(\frac{df}{d\vec{\nabla}\mu_\pi''^r} - \vec{\pi}_m\right) \cdot d\vec{\nabla}\mu_\pi''^r = 0 . \qquad (38)$$

Звідси, в силу незалежності параметрів $T, e, \rho_m, \vec{E}_*^r, \vec{\nabla}\mu_\pi''^r$, маємо такі рівняння стану

$$p_* = -\rho\left.\frac{\partial f}{\partial e}\right|_{T,\,\rho_m,\,\vec{E}_*^r,\,\vec{\nabla}\mu_\pi''^r}, \quad s = -\left.\frac{\partial f}{\partial T}\right|_{e,\,\rho_m,\,\vec{E}_*^r,\,\vec{\nabla}\mu_\pi''^r}, \quad \mu_\pi' = \left.\frac{\partial f}{\partial \rho_m}\right|_{T,\,e,\,\vec{E}_*^r,\,\vec{\nabla}\mu_\pi''^r},$$
$$\vec{p} = -\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{E}_*^r}\right|_{T,\,e,\,\rho_m,\,\vec{\nabla}\mu_\pi''^r}, \quad \vec{\pi}_m = \left.\frac{\partial f}{\partial\left(\vec{\nabla}\mu_\pi''^r\right)}\right|_{T,\,e,\,\rho_m,\,\vec{E}_*^r} . \qquad (39)$$

Розкладемо вільну енергію f у ряд за збуреннями параметрів стану та для малих збурень обмежимося в цьому розвиненні квадратичними членами

$$f = f_0 - s_0\left(T - T_0\right) + \mu'_{\pi 0}\rho_m + \frac{1}{2}\rho_0^{-1}a_1^{\sigma}e^2 + \frac{1}{2}a_T^s\left(T - T_0\right)^2 + \frac{1}{2}a_\rho^{\mu}\rho_m^2 +$$
$$+\frac{1}{2}a_\mu^{\pi}\left(\vec{\nabla}\mu_\pi'^r\right)^2 + \frac{1}{2}a_E^p\left(\vec{E}_*^r\right)^2 + a_{eT}\rho_0^{-1}e\left(T - T_0\right) + a_{\rho T}\rho_m\left(T - T_0\right) +$$
$$+a_{e\rho}\rho_0^{-1}e\rho_m + a_{E\mu}\vec{E}_*^r \cdot \vec{\nabla}\mu_\pi'^r . \tag{40}$$

Тут a_1^{σ}, a_T^s, a_ρ^{μ}, a_E^p, a_μ^{π}, a_{eT}, $a_{\rho T}$, $a_{e\rho}$, $a_{E\mu}$ — характеристики матеріалу; f_0, s_0 і $\mu'_{\pi 0}$ — значення узагальненої вільної енергії, ентропії та приведеного потенціалу μ'_π у вихідному стані, у якому $e = 0,\ T = T_0$, $\rho_m = 0$, $s = s_0$, $p_* = 0$, $\mu'_\pi = \mu'_{\pi 0}$, $\vec{E}_*^r = 0$, $\nabla\mu_\pi'^r = 0$, $\vec{p} = 0$, $\vec{\pi}_m = 0$. Тоді на основі співвідношень (39) та (40) отримаємо такі лінійні рівняння стану

$$p_* = -a_1^{\sigma}e - a_{eT}\left(T - T_0\right) - a_{e\rho}\rho_m ,$$
$$s = s_0 - \left[a_T^s\left(T - T_0\right) + \rho_0^{-1}a_{eT}e + a_{\rho T}\rho_m\right],$$
$$\mu'_\pi = \mu'_{\pi 0} + a_\rho^{\mu}\rho_m + \rho_0^{-1}a_{e\rho}e + a_{\rho T}\left(T - T_0\right),$$
$$\vec{p} = -a_E^p\vec{E}_*^r - a_{E\mu}\vec{\nabla}\mu_\pi'^r ,$$
$$\vec{\pi}_m = a_\mu^{\pi}\vec{\nabla}\mu_\pi'^r + a_{E\mu}\vec{E}_*^r . \tag{41}$$

8. Кінетичні співвідношення

Подамо рівняння (35) для виробництва ентропії так

$$\sigma_s = \sum_{k=1}^{6}\hat{j}_k^{(n)} \overset{n}{\cdot\cdot} \hat{X}_k^{(n)} , \tag{42}$$

де індексом *n*, який набуває значень 0, 1, 2, відзначено валентність відповідного тензора; $\hat{j}_k^{(n)}$, $\hat{X}_k^{(n)}$ — термодинамічні потоки та сили

$$\hat{j}_1^{(0)} = P_{vl},\quad \hat{X}_1^{(0)} = \frac{1}{T}\frac{de}{dt}, \qquad \hat{j}_2^{(2)} = \hat{P}_{vt},\quad \hat{X}_2^{(2)} = \frac{1}{T}\frac{d\hat{e}^d}{dt},$$
$$\hat{j}_3^{(1)} = \vec{J}_q,\quad \hat{X}_3^{(1)} = -\frac{1}{T^2}\vec{\nabla}T; \qquad \hat{j}_4^{(1)} = \vec{J}_{e*},\quad \hat{X}_4^{(1)} = \frac{1}{T}\vec{E}_*,$$
$$\hat{j}_5^{(1)} = \rho\frac{d\vec{p}}{dt},\quad \hat{X}_5^{(1)} = \frac{1}{T}\vec{E}_*^i; \qquad \hat{j}_6^{(1)} = \rho\frac{d\vec{\pi}_m}{dt},\quad \vec{X}_6^{(1)} = -\frac{1}{T}\vec{\nabla}\mu_\pi'^i . \tag{43}$$

Зі співвідношень (42), (43), за врахування принципу Онзагера [13], у лінійному наближенні отримуємо такі кінетичні рівняння

$$\hat{j}_1^{(0)} = L'_{11}\hat{X}_1^{(0)}, \quad \hat{j}_2^{(2)} = L'_{22}\hat{X}_2^{(2)}, \quad \hat{j}_l^{(1)} = \sum_{k=3}^{6} L'_{lk}\hat{X}_k^{(1)}, \; l = \overline{3,6}, \tag{44}$$

де L'_{11}, L'_{22} L'_{lk} $\left(k, l = \overline{3,6}\right)$ — кінетичні коефіцієнти.

Враховуючи позначення (43), запишемо кінетичні рівняння (44) у вигляді

$$P_{vl} = L'_{11}\frac{1}{T}\frac{de}{dt}, \qquad \hat{P}_{vt} = L'_{22}\frac{1}{T}\frac{d\hat{e}^d}{dt}; \tag{45}$$

$$\vec{J}_q = -L'_{33}\frac{1}{T^2}\vec{\nabla}T + L'_{34}\frac{1}{T}\vec{E}_* - L'_{35}\frac{1}{T}\vec{E}_*^i - L'_{36}\frac{1}{T}\vec{\nabla}\mu'^i_\pi,$$

$$\vec{J}_{e*} = -L'_{43}\frac{1}{T^2}\vec{\nabla}T + L'_{44}\frac{1}{T}\vec{E}_* - L'_{45}\frac{1}{T}\vec{E}_*^i - L'_{46}\frac{1}{T}\vec{\nabla}\mu'^i_\pi,$$

$$\rho\frac{d\vec{p}}{dt} = -L'_{53}\frac{1}{T^2}\vec{\nabla}T + L'_{54}\frac{1}{T}\vec{E}_* - L'_{55}\frac{1}{T}\vec{E}_*^i - L'_{56}\frac{1}{T}\vec{\nabla}\mu'^i_\pi,$$

$$\rho\frac{d\vec{\pi}_m}{dt} = -L'_{63}\frac{1}{T^2}\vec{\nabla}T + L'_{64}\frac{1}{T}\vec{E}_* - L'_{65}\frac{1}{T}\vec{E}_*^i - L'_{66}\frac{1}{T}\vec{\nabla}\mu'^i_\pi. \tag{46}$$

Якщо в співвідношеннях (46) врахувати рівняння стану (41), то вони набудуть вигляду

$$\vec{J}_q = -L_{33}\vec{\nabla}T + L_{34}\vec{E}_* + L_{35}\vec{p} - L_{36}\vec{\nabla}\mu'_\pi + L_{37}\vec{\pi}_m$$

$$\vec{J}_{e*} = -L_{43}\vec{\nabla}T + L_{44}\vec{E}_* + L_{45}\vec{p} - L_{46}\vec{\nabla}\mu'_\pi + L_{47}\vec{\pi}_m,$$

$$\rho\frac{d\vec{p}}{dt} = -L_{53}\vec{\nabla}T + L_{54}\vec{E}_* + L_{55}\vec{p} - L_{56}\vec{\nabla}\mu'_\pi + L_{57}\vec{\pi}_m,$$

$$\rho\frac{d\vec{\pi}_m}{dt} = -L_{63}\vec{\nabla}T + L_{64}\vec{E}_* + L_{65}\vec{p} - L_{66}\vec{\nabla}\mu'_\pi + L_{67}\vec{\pi}_m. \tag{47}$$

Тут

$$L_{k3} = \frac{1}{T^2}L'_{k3} \quad L_{k4} = \frac{1}{T}\left(L'_{k4} - L'_{k5}\right), \; L_{k5} = \frac{1}{T}\frac{L'_{k5}a_\mu^\pi - L'_{k6}a_{E\mu}}{a_{E\mu}^2 - a_E^p a_\mu^\pi},$$

$$L_{k6} = \frac{1}{T}L'_{k6}, \; L_{k7} = \frac{1}{T}\frac{L'_{k5}a_{E\mu} - L'_{k6}a_E^p}{a_{E\mu}^2 - a_E^p a_\mu^\pi}, \; k = \overline{3,6}.$$

Відзначимо, що два останні рівняння системи (47) є нелокальними реологічними співвідношеннями для визначення векторів $\vec{p}$ та $\vec{\pi}_m$.

Отримані рівняння Максвелла (8), (11), балансу маси (17) та ентропії (26), визначальні співвідношення (41), (45), (47) разом із відповідними геометричними співвідношеннями складають повну систему рівнянь, яка може бути використана для опису електромагнетотермомеханічних процесів у в'язкій поляризовній рідині з урахуванням необоротності процесів локального зміщення маси та заряду.

Висновки. Побудовано фізико-математичну модель для опису електромагнето-термомеханічних процесів у в'язкій поляризовній неферомагнетній електропровідній стисливій рідині за врахування необоротності процесів локального зміщення електричного заряду та маси. Показано, що наслідком врахування локального зміщення маси є розширення простору параметрів стану скалярним і векторним параметром, а саме — густиною наведеної маси та просторовим градієнтом приведеної величини енергетичної міри впливу локального зміщення маси на внутрішню енергію. З'ясовано також, що врахування необоротності процесів зміщення маси та електричного заряду приводить до нелокальних реологічних визначальних співвідношень для векторів зміщень маси й електричного заряду (поляризації). Повна система рівнянь, яка відповідає побудованій моделі, дозволяє, зокрема, описати процес становлення неоднорідного напружено-деформованого стану та приповерхневої поляризації рідини.

Література

[1] *Френкель Я. И.* Собрание избранных трудов. В 3-х томах. — М.-Л., 1956-1959.

[2] *Киселев В. Ф.* Поверхностные явления в полупроводниках и диэлектриках. — М.: Наука, 1970. — 400 с.

[3] *Бурак Я. Й.* Визначальні співвідношення локально-градієнтної термомеханіки // Доп. АН УССР. Сер. А. — 1987. — № 12. — С. 19-23.

[4] *Бурак Я. Й., Нагірний Т. С.* Теоретичні основи розрахунку локально-градієнтних термомеханічних систем з врахуванням поверхневих явищ // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 1993. — № 4. — С. 24-30.

[5] *Бурак Я. И., Нагирный Т. С., Грицина О. Р., Червинка К. А.* Поверхностные напряжения в слое. Влияние температуры и примесей на прочность // Проблемы прочности. — 2000. — № 6. — С. 35-43.

[6] *Нагірний Т., Грицина О., Червінка К.* Локально-градієнтний підхід у термомеханіці // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2006. — Вип. 3. — С. 72-83.

[7] *Грицина О., Кондрат В.* Термомеханічні процеси у в'язкій рідині з урахуванням локального зміщення маси // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2006. — Вип. 4. — С. 72-83.

[8] *Бурак Я. Й., Кондрат В. Ф., Грицина О. Р.* Математичне моделювання механотермодифузійних процесів у твердих розчинах при врахуванні локального зміщення маси // Доп. НАН України. — 2007. — № 3. — С. 59-64.

[9] *Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н.* Классическая электродинамика. — М.: Наука, 1985. — 400 с.

[10] *Можен Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред. — М.: Мир, 1991. — 560 с.

[11] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982. — 620 с.

[12] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. — М.: Наука, 1974. — 831 с.

[13] *Гроот де С., Мазур П. Ш.* Неравновесная термодинамика. — М.: Мир, 1964. — 456 с.

[14] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. — М.: Наука, 1986. — 736 с.

Modelling Electro-magneto-thermo-mechanical Processes in a Viscous Electrically Conducting Polarized Fluid Taking into Account Irreversibility of a Local Displacements of Mass and Electric Charge

Olha Hrytsyna, Vasyl Kondrat

Using basic principles of thermodynamics of nonequilibrium processes, continuum mechanics and electrodynamics, a complete set of equations for the description of thermomechanical processes in a viscous electrically conducting nonferromagnetic polarized fluid with taking into account irreversibility of the processes of the local displacements of mass and electric charge is obtained. Thus, a gradient vector of an energy measure of the influence of mass displacement on internal energy and an electric force vector are presented as sums of their reversible and irreversible components. It allows one to obtain differential rheological constitutive relations for the mass displacement vector and electric charge. In particular, the proposed model allows one to analyze the history of surface polarization and to establish near-surface inhomogeneity of the stress-strain state of a viscous fluid.

Моделирование электромагнитотермомеханических процессов в вязкой электропроводной поляризированной жидкости с учетом необратимости локальных смещений массы и электрического заряда

Ольга Грицина, Василий Кондрат

С использованием базовых положений термодинамики необратимых процессов и механики сплошных сред получено полную систему уравнений для описания взаимосвязанных термомеханических процессов в вязкой сжимаемой жидкости с учетом обратимого смещения массы. С использованием термодинамики неравновесных процессов, механики и электродинамики сплошных сред получена полная система уравнений для описания взаимосвязанных электромагнитотермомеханических процессов в вязкой электропроводной неферромагнитной поляризуемой жидкости с учетом необратимости процессов локального смещения электрического заряда и массы. С этой целью вектор градиента приведенной величины энергетической меры влияния смещения массы на внутреннюю энергию и вектор напряженности электрического поля представлены в виде сумм их обратимых и необратимых составляющих. Это позволило получить для векторов смещения массы и электрического заряда (поляризации) дифференциальные реологические определяющие соотношения. Построенная модель позволяет исследовать динамику поверхностной поляризации и становления приповерхностной неоднородности напряженно-деформированного состояния вязкой жидкости.

Отримано 4.03.07