УДК 539.3

Моделювання термопружного двовимірного стану спаяних різнорідних півплощин із включеннями та тріщинами

Володимир Зеленяк[1], Богдан Слободян[2]

[1] к. т. н., доцент, Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013
[2] к. ф.-м. н., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.. Я. С. Підстригала НАН України, вул. Наукова, 3*б*, Львів, 79060

Розглянуто двовимірну задачу термопружності для двох спаяних різнорідних півплощин із криволінійними включеннями та тріщинами. Задачу зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь на замкнених (межі включень) і розімкнених (тріщини) контурах. Числові розв'язки інтегральних рівнянь одержано методом механічних квадратур. Досліджено вплив теплофізичних, механічних властивостей півплощин і еліптичного включення на розподіл напружень в околі вершин тріщини. Визначено коефіцієнти інтенсивності напружень на кінцях тріщини.

Ключові слова: плоска задача, включення, тріщини, температурне поле, коефіцієнт інтенсивності напружень.

Вступ. Двовимірні задачі теорії пружності або термопружності для кусково-однорідних тіл із тріщинами за використання методу сингулярних інтегральних рівнянь розв'язували раніше. Зокрема досліджували напружено-деформований стан в обмеженій [1], півобмеженій [2] і необмеженій [3, 4] плоскій області з чужорідними включеннями та криволінійними тріщинами. Задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для аналогічних областей вивчали у працях [5-9]. Тут єдиним підходом із застосуванням цього методу побудовано інтегральні рівняння двовимірної задачі теорії пружності та термопружності для спаяних різнорідних півплощин, що містять криволінійні включення та тріщини. Задачу пружності для спаяних півплощин із круговим включенням і тріщиною досліджено в [10], а задачу термопружності для такої області — в [11]. Числовий аналіз для коефіцієнтів інтенсивності напружень у вершинах тріщини у розглянутій задачі проведено для спаяних різнорідних півплощин з еліптичним включенням і тріщиною в одній із півплощин під час нагрівання до сталої температури.

1. Формулювання задачі

Нехай нескінченне тіло (площина) складається з матриці (двох спаяних півплощин S^+ і S^- із лінією поділу L_0), послабленої $N-M$ криволінійними розрізами $L_k\left(k=\overline{M+1,N}\right)$, і включень S_k з гладкими замкненими межами $L_k\left(k=\overline{1,M}\right)$.

Вважаємо, що контури $L_k\left(k=\overline{0,N}\right)$ не мають спільних точок. Кожний контур $L_k\left(k=\overline{1,N}\right)$ віднесено до локальної системи координат $x_k O_k y_k$, вісь $O_k x_k$ якої утворює кут α_k з віссю Ox, що збігається з контуром L_0. Точки O_k визначають у системі xOy комплексні координати $z_k^0 = x_k^0 + i y_k^0$, а зв'язок між координатами точок на площині дають співвідношення $z = z_k e^{i\alpha_k} + z_k^0$, $z = x + iy$, $z_k = x_k + i y_k$. Додатним напрямком обходу контурів $L_k\left(k=\overline{0,M}\right)$ вважаємо той, за якого область включення $\left(k=\overline{1,M}\right)$ або верхня півплощина ($k = 0$) залишається зліва (рис. 1).

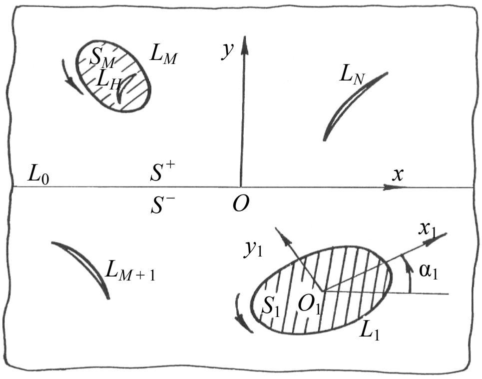

Рис. 1. Геометрія двох спаяних різнорідних півплощин із включеннями та тріщинами

Вважаємо, що площину нагріто до сталої температури $T_c = const$, а на безмежності розтягнуто зусиллями. Окрім цього, на лініях спаю включень і матриці та контурі L_0 напруження неперервні, а переміщення мають розриви (окрім контуру L_0)

$$\left[N_n\left(t_n\right)+iT_n\left(t_n\right)\right]^+ = \left[N_n\left(t_n\right)+iT_n\left(t_n\right)\right]^-, \quad t_n \in L_n, \quad n=\overline{0,M}\ ; \tag{1}$$

$$\left(u_n + iv_n\right)^+ - \left(u_n + iv_n\right)^- = \left(1-\delta_{n0}\right) g_n^*\left(t_n\right), \quad t_n \in L_n, \quad n=\overline{0,M}\ . \tag{2}$$

Береги тріщин не контактують і на них задано самозрівноважене навантаження

$$\left[N_n\left(t_n\right)+iT_n\left(t_n\right)\right]^\pm = p_n\left(t_n\right), \quad t_n \in L_n, \quad n=\overline{M+1,N}\ , \tag{3}$$

а на нескінченності відсутні напруження та повороти.

Приймаємо також, що коефіцієнти теплового розширення різнорідних півплощин є рівні $\left(\alpha_+^t = \alpha_-^t\right)$, що дає змогу задовольнити умови ідеального механічного контакту на лінії з'єднання півплощин у нескінченості.

У формулах (1)-(3) $N_n\left(t_n\right), T_n\left(t_n\right)$ — нормальна та дотична компоненти зусиль, u_n, v_n — компоненти переміщень, δ_{n0} — символ Кронеккера, t_n — комплексні координати точок на контурах L_n у локальних системах координат.

Запишемо крайові умови (1)-(3) через комплексні потенціали напружень $\Phi(z), \Psi(z)$ [6]

$$\Phi^+(t) + \overline{\Phi^+(t)} + \frac{\overline{dt}}{dt}\left[t\Phi'^+(t) + \overline{\Psi^+(t)}\right] = \Phi^-(t) + \overline{\Phi^-(t)} +$$

$$+\frac{\overline{dt}}{dt}\left[t\Phi'^-(t) + \overline{\Psi^-(t)}\right], \quad t \in L_n, \quad n=\overline{1,M}\ ; \tag{4}$$

$$\frac{1}{2G_n}\left\{\chi_n\Phi^+(t)-\overline{\Phi^+(t)}-\frac{\overline{dt}}{dt}\left[\overline{t\Phi'^+(t)}+\overline{\Psi^+(t)}\right]+\beta_n^t T_c\right\}=\frac{1}{2G}\left\{\chi\Phi^-(t)-\overline{\Phi^-(t)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\overline{dt}}{dt}\left[\overline{t\Phi'^-(t)}+\overline{\Psi^-(t)}\right]+\beta^t T_c\right\}+\left(1-\delta_{n0}\right)g_n^{*\prime}(t),\quad t\in L_n,\quad n=\overline{1,M}\,; \tag{5}$$

$$\Phi^\pm(t)+\overline{\Phi^\pm(t)}+\frac{\overline{dt}}{dt}\left[\overline{t\Phi'^\pm(t)}+\overline{\Psi^\pm(t)}\right]=p_n(t),\qquad t\in L_n,\quad n=\overline{M+1,N}\,. \tag{6}$$

Тут позначено: $\chi=3-4\mu,\ \beta^t=\alpha^t E\left(\chi_n=3-4\mu_n,\beta_n^t=\alpha_n^t E_n, n=\overline{1,M}\right)$ — для плоскої деформації; $\chi=(3-\mu)/(1+\mu),\beta^t=\alpha^t E(1+\mu)\left(\chi_n=(3-\mu_n)/(1+\mu_n),\beta_n^t=\alpha_n^t E_n/(1+\mu_n)\right.$, $\left.n=\overline{1,M}\right)$ — для плоского напруженого стану; $\alpha^t, G, E,\ \mu\ \left(\alpha_n^t,\ G_n,\ E_n,\ \mu_n\right)$ — коефіцієнт лінійного теплового розширення, модуль зсуву, модуль пружності (Юнга), коефіцієнт Пуассона матриці S (відповідно включення S_n);

$$\alpha^t, G, E,\ \mu=\begin{cases}\alpha_+, G_+, E_+, \mu_+ \text{ — для верхньої півплощини,}\\ \alpha_-, G_-, E_-, \mu_- \text{ — для нижньої півплощини.}\end{cases}$$

У рівності (5) у випадку задачі пружності потрібно покласти $\beta^t=\beta_n^t=0$. Рискою зверху позначено спряжену величину.

2. Інтегральні рівняння

Виберемо комплексні потенціали напружень $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ у вигляді

$$\Phi(z)=\Phi_0(z)+\Phi_1(z)+\Phi_2(z),\qquad \Psi(z)=\Psi_0(z)+\Psi_1(z)+\Psi_2(z),$$

де $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$ — величини, що визначають напружений стан однорідної площини під час її розтягу на безмежності, а $\Phi_1(z)$, $\Psi_1(z)$, $\Phi_2(z)$, $\Psi_2(z)$ одержано в [12].

Задовольнивши з використанням потенціалів $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ крайові умови (4)-(6) на кожному з контурів $L_k\left(k=\overline{1,N}\right)$, отримаємо систему N сингулярних інтегральних рівнянь відносно N невідомих функцій $Q_k(t_k)$

$$A_n Q_n(t_n')+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{L_k}\left[R_{nk}(t_k,t_n')Q_k(t_k)dt_k+S_{nk}(t_k,t_n')\overline{Q_k(t_k)}\overline{dt_k}\right]=$$

$$=P(t_n')+F(t_n'),\quad t_n'\in L_n,\quad n=\overline{1,N}\,. \tag{7}$$

Тут

$$P(t_n')=(1-\delta_n)\left\{p_n(T_n')-\Phi_0(T_n')-\overline{\Phi_0(T_n')}-\frac{\overline{dt_n'}}{dt_n'}e^{-2i\alpha_n}\left[\overline{T_n'\Phi_0'(T_n')}+\overline{\Psi_0(T_n')}\right]\right\},$$

$$F(t_n')=\delta_n\left\{\left[\left(\Gamma_n\beta_\pm^t-\beta_n^t\right)T_c+2G_n g_n^{*'}(t_n')\right]-B_n\Phi_0(T_n')+\right.$$

$$\left.+D_n\left[\overline{\Phi_0(T_n')}+\frac{\overline{dt_n'}}{dt_n'}e^{-2i\alpha_n}\left(\overline{T_n'\Phi_o'(T_n')}+\overline{\Psi_0(T_n')}\right)\right]\right\},$$

$$R_{nk}\left(t_k,t'_n\right)=K_{nk}\left(t_k,t'_n\right)+\Delta e^{i\alpha_k}\left\{\frac{B_n}{T'_n-\overline{T_k}}+D_n\frac{T_k-\overline{T_k}}{\left(T_k-\overline{T'_n}\right)^2}+D_n\frac{\overline{dt'_n}}{dt'_n}e^{-2i\alpha_n}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{T_k-\overline{T_k}}+\frac{\left(T_k-\overline{T_k}\right)\left(2T'_n-T_k-\overline{T'_n}\right)}{\left(T_k-\overline{T'_n}\right)^3}\right]\right\},$$

$$S_{nk}\left(t_k,t'_n\right)=L_{nk}\left(t_k,t'_n\right)+\Delta e^{-i\alpha_k}\left[B_n\frac{T_k-\overline{T'_k}}{\left(\overline{T_k}-T'_n\right)^2}+\frac{D_n}{T_k-\overline{T'_n}}-D_n\frac{\overline{dt'_n}}{dt'_n}e^{-2i\alpha_n}\frac{T_k-T'_n}{\left(T_k-\overline{T'_n}\right)^2}\right],$$

$z,T_k\in S^-$ або $z,T_k\in S^+$;

$$R_{nk}\left(t_k,t'_n\right)=K_{nk}\left(t_k,t'_n\right)+\Delta e^{i\alpha_k}\left[\frac{B_n}{T'_n-T_k}-D_n\frac{\overline{dt'_n}}{dt'_n}e^{-2i\alpha_n}\frac{1}{\overline{T'_n}-\overline{T_k}}\right], \qquad (8)$$

$$\Delta=\begin{cases}\left(G_- - G_+\right)/\left(G_- + \chi_- G_+\right), z\in S^-,\\ \left(G_+ - G_-\right)/\left(G_+ + \chi_- G_-\right), z\in S^+,\end{cases}$$

$$S_{nk}\left(t_k,t'_n\right)=L_{nk}\left(t_k,t'_n\right)+\Delta e^{-i\alpha_k}\left[\frac{D_n}{\overline{T_k}-\overline{T'_n}}-D_n\frac{\overline{dt'_n}}{dt'_n}e^{-2i\alpha_n}\frac{\overline{T_k}-T'_n}{\left(\overline{T_k}-\overline{T'_n}\right)^2}\right],$$

$z\in S^-,\quad T_k\in S^+$ або $z\in S^+,\quad T_k\in S^-$, (9)

$$K_{nk}\left(t_k,t'_n\right)=e^{i\alpha_k}\left(\frac{B_n}{T_k-T'_n}-\frac{D_n e^{-2i\alpha_n}}{\overline{T_k-T'_n}}\cdot\frac{\overline{dt'_n}}{dt'_n}\right),$$

$$L_{nk}\left(t_k,t'_n\right)=-D_n e^{-i\alpha_k}\left(\frac{1}{\overline{T_k}-\overline{T'_n}}-\frac{\left(T_k-T'_n\right)e^{-2i\alpha_n}}{\left(\overline{T_k}-\overline{T'_n}\right)^2}\cdot\frac{\overline{dt'_n}}{dt'_n}e^{-2i\alpha_n}\right), \qquad (10)$$

$$A_n=\frac{i\delta_n\left[1+\chi_n+\Gamma_n\left(1+\chi\right)\right]}{2},\ B_n=\left(\chi_n-\Gamma_n\chi-1\right)\delta_n+1,\ \delta_n=\begin{cases}1, & n=\overline{1,M},\\ 0, & n=\overline{M+1,N},\end{cases}$$

$$D_n=\left(2-\Gamma_n\right)\delta_n-1,\quad \Gamma_n=G_n/G,\quad T'_n=t'_n e^{i\alpha_n}+z_n^0,\quad T_k=t_k e^{i\alpha_k}+z_k^0,$$

$$Q_k\left(t_k\right)=\begin{cases}g_k\left(t_k\right),\ t_k\in L_k,\ k=\overline{1,M},\\ g'_k\left(t_k\right),\ t_k\in L_k,\ k=\overline{M+1,N},\end{cases}$$

де $g_k\left(t_k\right)$ — невідомі функції на контурах включень $L_k\left(k=\overline{1,M}\right)$; $g'_k\left(t_k\right)$ — невідомі похідні від стрибка переміщень за переходу через лінію тріщин $L_k\left(k=\overline{M+1,N}\right)$.

Слід зазначити, що комплексні потенціали напружень для задачі пружності для розглядуваної області було одержано в [13] іншим підходом: шляхом граничного переходу за прямування до безмежності радіуса кругового включення, яке знаходиться в безмежній кусково-однорідній площині.

Система рівнянь (7) має єдиний розв’язок для довільної правої частини за додаткових умов

$$\int_{Ln} g_n'\left(t_n\right) dt_n = 0, \quad n = \overline{M+1, N}, \tag{11}$$

які забезпечують неперервність переміщень за обходу контурів тріщин.

Коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) K_{I} і K_{II} у вершинах розрізу L_k знаходимо за формулою [14]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = \mp \lim_{t_k \to l_k^{\pm}} \left[\sqrt{2\pi \left| t_k - l_k^{\pm} \right|} g_k'\left(t_k\right) \right], \quad k = \overline{M+1, N}. \tag{12}$$

3. Еліптичне включення та тріщина в одній із півплощин

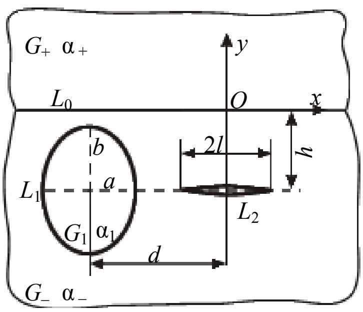

Рис. 2. Геометрія трикомпонентної області з тріщиною

Нехай тріщину завдовжки $2l$ із центром у точці $(0, -h)$ розташовано паралельно до лінії спаю півплощин L_0. Береги тріщини не контактують і вільні від навантажень $\left(p_2(t_2) = 0, t_2 \in L_2\right)$, а на лінії спаю включення та матриці переміщення неперервні $\left(g_1^*(t_1) = 0, t_1 \in L_1\right)$. Центр еліптичного включення з півосями a та b знаходиться на лінії тріщини на віддалі d від центра тріщини (рис. 2). Площину нагріто до сталої температури $T_c = const$. У цьому випадку з системи інтегральних рівнянь (7) одержимо два інтегральні рівняння на контурах L_1 і L_2

$$\begin{gathered}
A_1 Q_1\left(t_1'\right) + \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \left\{ \left[R_{11}\left(t_1, t_1'\right) g_1\left(t_1\right) dt_1 + S_{11}\left(t_2, t_1'\right) \overline{g_2'\left(t_2\right)} \overline{dt_2} \right] + \right. \\
\left. + \left[R_{12}\left(t_2, t_1'\right) g_1\left(t_1\right) dt_1 + S_{12}\left(t_2, t_1'\right) \overline{g_2'\left(t_2\right)} \overline{dt_2} \right] \right\} = \left(\Gamma_1 \beta_-^t - \beta_1^t \right) T_c, \\
\frac{1}{2\pi} \int_{L_2} \left\{ \left[R_{21}\left(t_1, t_2'\right) g_1\left(t_1\right) dt_1 + S_{21}\left(t_2, t_2'\right) \overline{g_2'\left(t_2\right)} \overline{dt_2} \right] + \right. \\
\left. + \left[R_{22}\left(t_1, t_2'\right) g_1\left(t_1\right) dt_1 + S_{22}\left(t_2, t_2'\right) \overline{g_2'\left(t_2\right)} \overline{dt_2} \right] \right\} = 0,
\end{gathered} \tag{13}$$

де R_{nk}, S_{nk}, $k = 1,2$; $n = 1,2$, знаходять із рівностей (8), (10).

Система інтегральних рівнянь (13) має єдиний розв’язок для довільної правої її частини, якщо виконується умова, яка забезпечує однозначність переміщень за обходу контуру тріщини L_2

$$\int_{L_2} g_2'\left(t_2\right) dt_2 = 0. \tag{14}$$

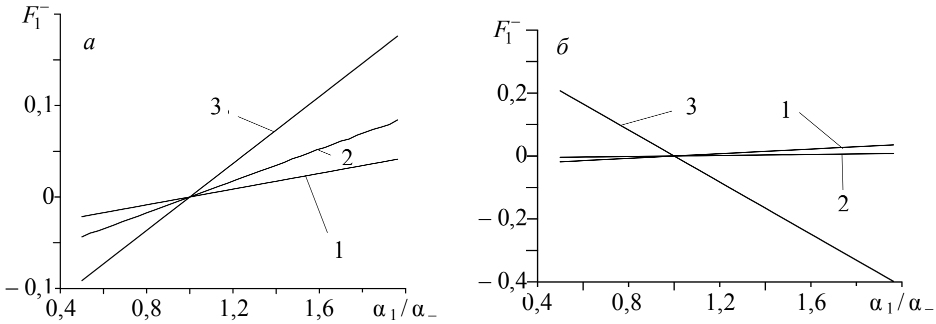

Рис. 3. Залежність коефіцієнта інтенсивності напружень F_1^- від параметра α_1/α_- за $a/h = 0{,}5$, $G_+/G_- = 0{,}5$, $b/h = 0{,}8$ (*а*); $b/h = 0{,}3$ (*б*)

Графіки для безрозмірних коефіцієнтів інтенсивності напружень $F_1^- = K_1^-/K_T$, де $K_T = T_c\beta_-^t\sqrt{\pi l}/(1+\chi_-)$ у лівій вершині тріщини $x_2 = -l$ (ближче до включення) зображені на рис. 3-5. Криві 1-3 відповідають значенням $G_1/G_- = 0{,}5$; 1; 2. Числові результати одержано методом механічних квадратур [14] для $l/h = 0{,}5$; $d/h = 2$; $\chi_+ = \chi_- = \chi_1 = 2$ та різних значень теплофізичних, механічних і геометричних параметрів задачі.

Якщо коефіцієнт лінійного теплового розширення включення α_1 збільшується, то коефіцієнт інтенсивності напружень F_1^- зростає лінійно зі збільшенням відношення α_1/α_- . Збільшення жорсткості включення (модуля зсуву G_1) істотно підсилює зростання F_1^- для різних форм витягнутості еліптичного включення (рис. 3). При цьому, якщо $\alpha_1 < \alpha_-$, то $F_1^- < 0$, якщо ж $\alpha_1 > \alpha_-$, то $F_1^- > 0$, окрім випадку, якщо більша вісь жорсткішого за матрицю включення є паралельна до лінії тріщини (рис. 3*б*). Слід зазначити, що тут не враховується можливий контакт берегів тріщини. Тому в деяких випадках коефіцієнт інтенсивності напружень F_1^- має від'ємне

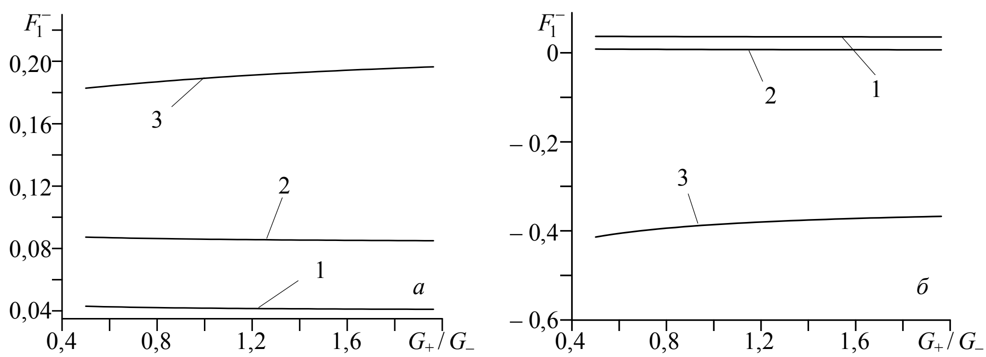

Рис. 4. Залежність коефіцієнта інтенсивності напружень F_1^- від параметра G_+/G_- за $a/h = 0{,}5$, $\alpha_1/\alpha_- = 2$, $b/h = 0{,}8$ (*а*), $b/h = 0{,}3$ (*б*)

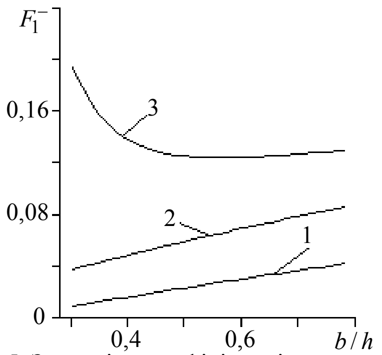

Рис. 5. Залежність коефіцієнта інтенсивності напружень F_1^- від форми включення b/h за $G_+/G_- = 0,5$; $\alpha_1/\alpha_- = 2$, $a/h = 0,5$

значення. Такий результат можна використати для отримання розв'язку задачі методом суперпозиції за дії, окрім заданого температурного поля, інших температурних або силових чинників, які в сукупності не спричинять контакту берегів тріщини. У разі врахування контакту берегів тріщини задачу слід формулювати як змішану задачу на берегах розрізу. При цьому її розв'язування істотно ускладнюється, хоча розв'язок також можна одержати методом сингулярних інтегральних рівнянь. Збільшення жорсткості верхньої півплощини (модуля зсуву G_+) змінює F_1^- незначно (рис. 4).

Зміна форми включення діє таким чином: F_1^- зростає зі збільшенням тієї осі еліптичного включення, яка перпендикулярна до лінії тріщини, якщо жорсткість включення менша або дорівнює жорсткості нижньої півплощини (рис. 5).

Висновки. Якщо кусково-однорідне трикомпонентне тіло знаходиться в умовах однакової сталої температури, то в межах зміни механічних і теплофізичних параметрів, які розглядаються, основний вплив на збільшення коефіцієнтів інтенсивності напружень F_1^- у вершині тріщини (ближчої до включення) має збільшення жорсткості еліптичного включення для різних форм витягнутості цього включення, а також зміна форми включення (зокрема, F_1^- збільшується зі збільшенням тієї осі еліптичного включення, яка перпендикулярна до лінії тріщини). Вплив жорсткості верхньої півплощини на F_1^- незначний.

Література

[1] *Саврук, М. П.* Напряженное состояние композитного двухкомпонентного кольца с трещинами / *М. П. Саврук, Н. В. Тимощук, И. В. Прокопчук* // Пробл. прочности. — 1988. — № 6. — С. 27-31.

[2] *Саврук, М. П.* Плоская задача теории упругости для кусочно-однородной полубесконечной пластины с упругими включениями и трещинами / *М. П. Саврук, Н. В. Тимощук* // Физ.-хим. механика материалов. — 1987. — Т. 23, № 2. — С. 55-61.

[3] *Зеленяк, В.* Напруження в пластині з тріщиною і двокомпонентним круглим включенням за дії розтягу / *В. Зеленяк, Б. Слободян* // Машинознавство. — 2007. — № 2. — С. 23-26.

[4] *Саврук, М. П.* Сингулярные интегральные уравнения плоской задачи теории упругости для бесконечного кусочно-однородного тела с трещинами / *М. П. Саврук, Н. В. Тимощук* // Физ.-хим. механика материалов. — 1984. — Т. 20, № 6. — С. 73-79.

[5] *Зеленяк, В. М.* Інтегральні рівняння стаціонарних задач теплопровідності і термопружності для півпростору з циліндричними включеннями та криволінійними тріщинами / *В. М. Зеленяк, О. О. Євтушенко* // Прикладні проблеми механіки і математики. — 2005. — Вип. 3 — С. 140-146.

[6] *Саврук, М. П.* Сингулярные интегральные уравнения плоских задач теплопроводности и термоупругости для кусочно-однородной плоскости с трещинами / *М. П. Саврук, В. М. Зеленяк* // Физ.-хим. механика материалов. — 1986. — Т. 22, № 3. — С. 82-88.

[7] *Саврук, М. П.* Плоская задача теплопроводности и термоупругости для конечного кусочно-однородного тела с трещинами / *М. П. Саврук, В. М. Зеленяк* // Физ.-хим. механика материалов. — 1987. — Т. 23, № 5. — С. 70-78.

[8] *Саврук, М. П.* Термопружний стан двокомпонентного порожнистого циліндра з крайовими радіальними тріщинами / *М. П. Саврук, В. М. Зеленяк* // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 1994. — № 4. — С. 76-80.

[9] *Кит, Г. С.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / *Г. С. Кит, М. Г. Кривцун*. — Киев: Наук. думка, 1983. — 229 с.

[10] *Зеленяк, В.* Напруження в спаяних різнорідних півплощинах з включенням і тріщиною за дії розтягу / *В. Зеленяк, Р. Мартиняк, Б. Слободян* // Вісник НУ «Львівська політехніка». Фіз.-мат. науки. — 2008. — № 625. — С. 54-58.

[11] *Зеленяк, В.* Температурні напруження у кусково-однорідній трикомпонентній області з тріщиною / *В. Зеленяк, Р. Мартиняк, Б. Слободян* // Машинознавство. — 2007. — № 11. — С. 13-17.

[12] *Саврук, М. П.* Плоская задача теплопроводности и термоупругости для двух спаянных разнородных полуплоскостей с криволинейными включениями и трещинами / *М. П. Саврук, В. М. Зеленяк* // Физ.-хим. механика материалов. — 1988. —Т. 24, № 2. — С. 23-28.

[13] *Savruk, M. P.* Crack problem solution for piece-wise homogeneous plates / *M. P. Savruk, M. V. Kuznyak* // Future trends in applied mechanics. National technical university of Athens. — 1989. — P. 185-234.

[14] *Саврук, М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / *М. П. Саврук*. — Киев: Наук. думка, 1981. — 324 с.

Modelling of thermoelastic two-dimensional state of bonded heterogeneous halfplanes with inclusions and cracks

Volodymyr Zelenyak, Bohdan Slobodyan

A two-dimensional problem of elasticity and steady thermoelasticity for two bonded heterogeneous half-planes with curvilinear inclusions and cracks is considered. The problem is reduced to the system of singular integral equations on closed (boundary of inclusions) and unclosed (cracks) contours. Numerical solutions of integral equations were obtained by the method of mechanical quadratures. The effect of thermophysical, mechanical properties and the elliptic inclusion on stresses distribution at the crack tip is established. Numerical results of the problem are presented in the form of stress intensity factors at the tips of crack.

Моделирование термоупругого двумерного состояния спаянных разнородных полуплоскостей с включениями и трещинами

Владимир Зеленяк, Богдан Слободян

Рассмотрена двумерная задача упругости и термоупругости для двух спаянных разнородных полуплоскостей с криволинейными включениями и трещинами. Задача сведена к системе сингулярных интегральных уравнений по замкнутым (границы включений) и разомкнутым (трещины) контурам. Численные решения интегральных уравнений получены методом механических квадратур. Исследовано влияние теплофизических, механических свойств полуплоскостей и эллиптического включения на распределение напряжений в окрестности вершин трещины. Определены коэффициенты интенсивности напряжений на концах трещины.

Представлено член-кореспондентом НАН України Я. Бураком

Отримано 17.05.10