УДК 517.926

Двопараметрична модель стійкості стрижня з урахуванням власної ваги

Роман Тацій[1], Олег Пазен[2], Тарас Дячун[3]

[1] д. ф.-м. н., професор, Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, вул. Клепарівська, 35, Львів, 79000
[2] Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, вул. Клепарівська, 35, Львів, 79000, e-mail: opazen@gmail.com
[3] Державна пожежно-рятувальна частина № 16, вул. Заводська, 3, Шумськ, Тернопільська обл., 47104, e-mail: pr0ometey@ukr.net

Запропоновано ефективний метод дослідження стійкості стрижнів з урахуванням їх власної ваги, що полягає на зведенні відповідних двопараметричних задач на власні значення до сукупності двох однопараметричних. Досліджено залежність критичних навантажень від зміни власної ваги та температури на прикладі залізобетонних стрижнів.

Ключові слова: стрижень, стійкість, вітка власних значень, температура, двосторонні оцінки.

Вступ. Поведінка стрижня у процесі повздовжнього згину за умов сумісної дії зосередженого та розподіленого навантажень залежить, зокрема, від модуля пружності (Юнга) матеріалу. Останній, своєю чергою, залежить від зміни температури, що описано в численній спеціальній літературі (див. напр. [1, 2], та бібліографії там). Проблема втрати стійкості стрижнів з урахуванням розподіленого навантаження зводиться до розв'язування двопараметричної задачі на власні значення для диференціальних рівнянь IV порядку зі змінними коефіцієнтами. Такі задачі можна розв'язати лише наближеними методами, при цьому залишається відкритою проблема оцінки точності отриманих результатів.

1. Формулювання задачі та її математична модель

Під час дослідження втрати стійкості прямолінійного стрижня можна враховувати його власну вагу [3]. Розглянемо консольний стрижень довжиною ℓ, який навантажено на вільному кінці зосередженою силою P (див. рис. 1*a*). У роботі [3] показано, що рівняння пружної лінії при цьому описується диференціальним рівнянням III порядку

$$Py' + \int_0^x \gamma F(\xi)\, y'(x)\, d\xi = -\left(EIy''\right)'.$$

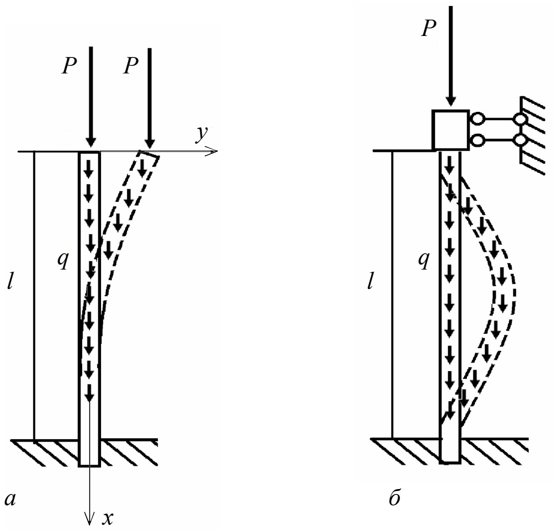

Рис. 1

Після повторного диференціювання отримуємо диференціальне рівняння IV порядку в так званій самоспряженій формі

$$\left(EIy''\right)'' + Py'' + \left(y'\int_0^x \gamma F\left(\xi\right)d\xi\right)' = 0\,. \tag{1}$$

Тут E — модуль пружності (Юнга), $I(x)$ — осьовий момент інерції поперечного перерізу, γ — питома вага матеріалу стрижня, $F(x)$ — площа його поперечного перерізу.

Розглянемо спрощений випадок, якщо E, I, γ, F — сталі величини. Тоді рівняння (1) набуває вигляду

$$EIy^{IV} + Py'' + \gamma F\left(xy'\right)' = 0\,. \tag{2}$$

Зробимо заміну змінної

$$x = z\ell \quad \text{або} \quad z = x/\ell\,. \tag{3}$$

Тоді $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz}\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{\ell}\dfrac{dy}{dz}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{\ell^2}\dfrac{d^2y}{dz^2}$; $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{1}{\ell^3}\dfrac{d^3y}{dz^3}$; $\dfrac{d^4y}{dx^4} = \dfrac{1}{\ell^4}\dfrac{d^4y}{dz^4}$; $\left(xy'\right)'_x = \dfrac{1}{\ell^2}\left(\ell z y'_z\right)'$.

Відтак одержимо рівняння

$$\frac{EIy^{IV}}{\ell^2} + Py'' + \gamma Fl\left(zy'\right)' = 0\,. \tag{4}$$

Позначимо $Q = \gamma F \ell$ — повну вагу стрижня; $\dfrac{P\ell^2}{EI} = \alpha$, $\dfrac{Q\ell^2}{EI} = \lambda$.

Звідси

$$P = \frac{\alpha EI}{\ell^2}, \quad Q = \frac{\lambda EI}{\ell^2}. \tag{5}$$

Тоді рівняння (4) у безрозмірних координатах набуває вигляду

$$y^{IV} + \alpha y'' + \lambda \left(z y' \right)' = 0. \tag{6}$$

До рівняння (6) слід додати умови закріплення стрижня (рис. 1*а*)

$$\begin{cases} y''|_{z=0} = \left(\alpha y' + y''' \right)|_{z=0} = 0, \\ y\big|_{z=1} = y'\big|_{z=1} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Отже, математичною моделлю задачі про втрату стійкості прямолінійного стрижня за сумісної дії зосередженого та розподіленого навантажень є двопараметрична задача на власні значення (6), (7). Необхідно знайти співвідношення між параметрами α та λ (так звані рівняння «кривих власних значень» [3]), за яких існують нетривіальні розв'язки цієї задачі.

2. Зведення двопараметричної задачі на власні значення до розв'язування сукупності двох класичних однопараметричних задач

2.1. Врахування лише зосередженого навантаження. Енергетичним методом у праці [1] показано, що між параметрами α та λ (а значить між параметрами *P* і *Q*) існує лінійна залежність. Цей факт є визначальний, оскільки для побудови такої залежності (рівняння прямої лінії) досить координат двох точок. Звідси випливає простий план побудови координат таких точок.

Для $\lambda = 0$ приходимо до (однопараметричної) задачі на власні значення

$$y^{IV} + \alpha y'' = 0, \tag{8}$$

$$\begin{cases} y''\big|_{z=0} = \left(\alpha y' + y''' \right)\big|_{z=0} = 0, \\ y\big|_{z=1} = y'\big|_{z=1} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Найменше власне значення цієї задачі (див. напр. [3, 4]) $\alpha_1 = \pi^2 / 4 = 2{,}4679...$

Відповідне критичне навантаження згідно із співвідношенням (5) $P_{кр} = \dfrac{\alpha_1 EI_{мін}}{\ell^2} = \dfrac{2{,}4679 EI_{мін}}{\ell^2}$.

2.2. Розв'язування задачі про стійкість вертикального стрижня за урахування лише власної ваги

Для α = 0 приходимо до задачі на власні значення

$$y^{IV} + \lambda\left(zy'\right)' = 0, \tag{10}$$

$$\begin{cases} y''\big|_{z=0} = y'''\big|_{z=0} = 0, \\ y\big|_{z=1} = y'\big|_{z=1} = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Побудуємо спочатку загальний розв'язок рівняння (10), використовуючи методику роботи [5]. Оскільки функція Коші рівняння $y^{IV} = 0$ $k(z,s) = (z-s)^3/6$, то функції $y_k(z)$, $k = 0,1,2,3$, системи інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтера ІІ роду

$$y_k(z) = \frac{z^k}{k!} - \frac{\lambda}{6}\int_0^z (z-s)^3\left(sy'(s)\right)' ds \tag{12}$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння (10), будучи цілими аналітичними функціями параметра λ нульового роду [6].

Розв'язки рівняння (12) шукаємо у вигляді ряду за параметром λ:

$$y_k(z,\lambda) = y_{k0}(z) + y_{k1}(z)\lambda + y_{k2}(z)\lambda^2 + y_{k3}(z)\lambda^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} y_{kn}(z)\lambda^n . \tag{13}$$

Підставляючи вираз (13) у співвідношення (12) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях параметра λ, приходимо до такої рекурентної послідовності формул для визначення невідомих функцій $y_{kn}(z), n = 0,1,2,3...$:

$$y_{k0} = \frac{z^k}{k!},$$

$$y_{k1} = -\frac{1}{6}\int_0^z (z-s)^3\left(sy'_{k0}(s)\right)' ds,$$

$$y_{k2} = -\frac{1}{6}\int_0^z (z-s)^3\left(sy'_{k1}(s)\right)' ds,$$

....

$$y_{kn} = -\frac{1}{6}\int_0^z (z-s)^3\left(sy'_{kn-1}(s)\right)' ds . \tag{14}$$

Інтегруючи послідовно систему (14), отримуємо:

$$y_{ko}(z)=\frac{z^k}{k!},\quad y_{k1}(z)=-\frac{kz^{k+3}}{(k+3)!},\quad y_{k2}(z)=\frac{k(k+3)z^{k+3}}{(k+6)!}.$$

Діючи далі методом математичної індукції, встановлюємо, що для довільного натурального значення n маємо:

$$y_{kn}(z)=(-1)^n\frac{\left[k(k+3)...(k+3(n-1))\right]z^{k+3n}}{\left(k+3n\right)!}=\left(-1\right)^n\frac{\prod_{i=0}^{n-1}(k+3i)z^{k+3n}}{(k+3n)!}. \tag{15}$$

Таким чином ми одержали:

$$y_k(z,\lambda)=\frac{z_k}{k!}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left[k(k+3)...k+3(n-1)\right]z^{k+3n}}{\left(k+3n\right)!}\lambda^n=$$
$$=\frac{z^k}{k!}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\prod_{i=0}^{n-1}(k+3i)z^{k+3n}}{(k+3n)!}\lambda^n. \tag{16}$$

Покладаючи у співвідношенні (16) послідовно $k=0,1,2,3,$ отримуємо:

$$y_0(z,\lambda)=1,$$
$$y_1(z,\lambda)=z-\frac{z^4}{4!}\lambda+\frac{4z^7}{7!}\lambda^2-\frac{4\cdot7z^{10}}{10!}\lambda^3+\frac{4\cdot7\cdot10z^{13}}{13!}\lambda^4-...,$$
$$y_2(z,\lambda)=\frac{z^2}{2!}-\frac{2z^5}{5!}\lambda+\frac{2\cdot5z^8}{8!}\lambda^2-\frac{2\cdot5\cdot8z^{11}}{11!}\lambda^3+\frac{2\cdot5\cdot8\cdot11z^{14}}{14!}\lambda^4-...,$$
$$y_3(z,\lambda)=\frac{z^3}{3!}-\frac{3z^6}{6!}\lambda+\frac{3\cdot6z^9}{9!}\lambda^2-\frac{3\cdot6\cdot9z^{12}}{12!}\lambda^3+\frac{3\cdot6\cdot9\cdot12z^{15}}{15!}\lambda^4-... \tag{17}$$

Загальний розв’язок рівняння (10) має вигляд:

$$y(x)=C_0y_0(x)+C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+C_3y_3(x), \tag{18}$$

де C_0, C_1, C_2, C_3 — довільні невідомі сталі.

Використовуючи крайові умови (11), приходимо до такої системи рівнянь:

$$C_0\cdot0+C_1\cdot0+C_2\cdot1+C_3\cdot0=0,$$
$$C_0\cdot0+C_1\cdot0+C_2\cdot0+C_3\cdot1=0,$$
$$C_0\cdot1+C_1\cdot y_1(1)+C_2\cdot y_2(1)+C_3\cdot y_3(1)=0,$$
$$C_0\cdot1+C_1\cdot y_1'(1)+C_2\cdot y_2'(1)+C_3\cdot y_3'(1)=0. \tag{19}$$

Система рівнянь (19) є лінійна однорідна система чотирьох алгебраїчних рівнянь для визначення чотирьох невідомих сталих C_0, C_1, C_2, C_3. Як відомо (з лінійної алгебри), щоб така система мала нетривіальні розв’язки, необхідно та достатньо, щоб її визначник дорівнював нулеві:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & y_1(1) & y_2(1) & y_3(1) \\ 0 & y_1{}^I(1) & y_2{}^I(1) & y_3{}^I(1) \end{vmatrix} = 0 .$$

Відповідно, спростивши визначник, отримуємо характеристичне рівняння

$$y_1{}^I(1) = 0. \tag{20}$$

Оскільки

$$y_1'(z) = 1 - \frac{\lambda z^3}{3!} + \frac{4z^6\lambda^2}{6!} - \frac{4\cdot 7z^9\lambda^3}{9!} + \frac{4\cdot 7\cdot 10z^{12}\lambda^4}{12!} - \\ - \frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot 13z^{15}\lambda^5}{15!} - \frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot 13\cdot 16z^{18}\lambda^6}{18!} - \ldots ,$$

то характеристичне рівняння (20) набуває вигляду:

$$1 - \frac{\lambda}{3!} + \frac{4\lambda^2}{6!} - \frac{4\cdot 7\lambda^3}{9!} + \frac{4\cdot 7\cdot 10\lambda^4}{12!} - \frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot 13\lambda^5}{15!} + \frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot 13\cdot 16\lambda^6}{18!} - \ldots = 0 . \tag{21}$$

Ліва частина рівняння (21) — ряд, найменший додатній корінь якого λ_1 і необхідно знайти. Обриваючи цей ряд на парному та непарному степенях, отримуємо перші корені двох многочленів, що наближають невідомий корінь «зверху» та «знизу» відповідно [7].

Збільшуючи степені таких многочленів, отримуємо послідовність двосторонніх оцінок λ_1 [7], що збігається до шуканого значення λ_1 з наперед заданою точністю. У цьому випадку, обмежуючись многочленами четвертого та п'ятого степенів отримуємо двосторонню оцінку $7,8373 < \lambda_1 < 7,8382$, тобто з точністю до двох знаків після коми $\lambda_1 = 7,83$, та $Q_{кр} = \dfrac{\lambda_1 EI_{мін}}{\ell^2} = \dfrac{7,83 EI_{мін}}{\ell^2}$.

Оскільки з такою ж точністю $\alpha_1 = \pi^2/4 = 2,46$ (відповідно $P_{кр} = \dfrac{\alpha_1 EI_{мін}}{\ell^2} =$ $= \dfrac{2,46 EI_{мін}}{\ell^2}$), то рівняння шуканої прямої має вигляд:

$$\frac{\alpha}{2,46} + \frac{\lambda}{7,83} = 1 \quad \text{або} \quad \frac{P\ell^2}{2,46 EI_{мін}} + \frac{Q\ell^2}{7,83 EI_{мін}} = 1 . \tag{22}$$

Рівняння (22) носить назву рівняння першої вітки власних значень. Графік цієї вітки у прямокутній системі координат $P0Q$ схематично зображено на рис. 2. Всередині та ззовні трикутника $P_{кр}0Q_{кр}$ умовно позначені зони «стійкості» та «нестійкості» відповідно.

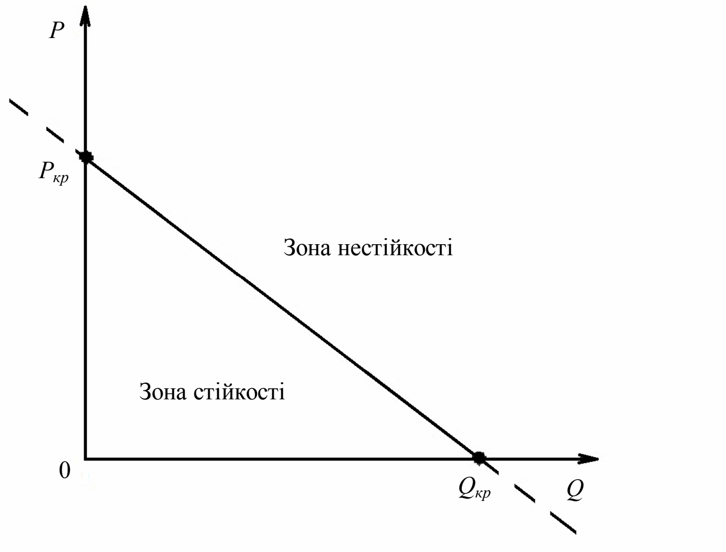

Рис. 2. Графік прямої першої вітки власних значень

3. Випадок жорсткого закріплення стрижня на обох кінцях

Розглянемо випадок, коли нижній кінець стрижня жорстко закріплений і нерухомий, натомість верхній кінець жорстко закріплений у рухомій опорі (див. рис. 1*б*). У цьому випадку до квазідиференціального рівняння (10) слід додати крайові умови

$$\begin{cases} y(0) = y^I(0) = 0, \\ y(1) = y^I(1) = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Аналогічно, як і вище, для визначення λ_1 отримуємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & y_1(1) & y_2(1) & y_3(1) \\ 0 & y_1^I(1) & y_2^I(1) & y_3^I(1) \end{vmatrix} = y_2(1)y_3^I(1) - y_2^I(1)y_3(1) = 0\,, \tag{24}$$

найменший корінь якого з точністю до двох знаків після коми $\lambda_1 = 74{,}62$. Зазначимо, що при цьому необхідно було знайти перші корені многочленів дев'ятого та десятого степенів.

Відповідно $\alpha_1 = 4\pi^2 = 39{,}47$. Тоді

$$\frac{\alpha}{39{,}47} + \frac{\lambda}{74{,}62} = 1 \quad \text{або} \quad \frac{Pl^2}{39{,}47 EI_{мін}} + \frac{Ql^2}{74{,}62 EI_{мін}} = 1 \tag{25}$$

— шукане рівняння першої вітки власних значень.

Таблиця 1

Порівняльні результати обчислення найменшого кореня λ_1

Метод обчислення / λ_1	Функції Бесселя	Енергетичний	Авторський
$\lambda_1(ж, в)$	7,84	8,29	7,83
$\lambda_1(ж, ж)$	—	—	74,62

У табл. 1 наведено порівняльні результати обчислення найменшого кореня λ_1, що отримані різними методами для кожного з двох типів закріплень. При цьому через $\lambda_1(ж, в)$ та $\lambda_1(ж, ж)$ позначені перші власні значення задач (10, 11 та 10, 23).

4. Вплив температури на стійкість стрижнів

Модуль пружності,зокрема, залежить від температури [2, 3]. Розглянемо приклад такої зміни для випадку, коли матеріал стрижня виготовлено із залізобетону певної марки. На основі роботи [8] знайдемо, відповідно, залежність першої вітки прямих власних значень від температури у діапазоні від 50°С до 1200°С. $P_{кр} = \frac{\alpha_1 E_t I_{min}}{l^2}$, $Q_{кр} = \frac{\lambda_1 E_t I_{min}}{l^2}$, де у випадку залізобетону $E_t = \beta_t \cdot 36 \cdot 10^3\,\text{Н}/\text{м}^2$, а значення β_t знаходяться з відповідної табл. 2 (тут індексом «t» підкреслюється залежність відповідних величин від температури).

На рис. 3 зображено перші вітки прямих власних значень залежно від параметра β_t (а значить і від температури). Слід підкреслити, що зі збільшенням температури зона стійкості (як площа відповідного прямокутного трикутника) за даного діапазону температур порівняно з максимальним її значенням зменшується в 44,4 рази.

Таблиця 2

Залежність коефіцієнта β_t від температури

t°C	50	70	100	200	300	500	700	900	1000	1100
β_t	1,00	1,00	1,00	0,9	0,75	0,5	0,32	0,22	0,18	0,15

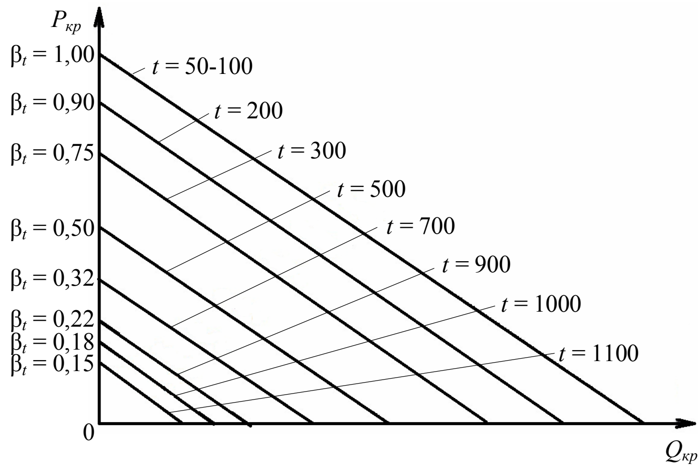

Рис. 3. Залежність першої вітки прямих власних значень від температури в діапазоні від 50^0C до 1200^0C

Висновки. 1. Розроблено математичну модель дослідження стійкості вертикальних стрижнів з урахуванням їх власної ваги, у вигляді двопараметричної задачі на власні значення.

2. Запропоновано ефективний спосіб побудови рівнянь перших віток власних значень, що полягає у дослідженні сукупності двох однопараметричних задач.

3. Під час дослідження однопараметричної задачі, де враховано лише дію розподіленого навантаження, застосовано двосторонній метод, що дозволив обчислити параметри критичної сили з наперед заданою точністю.

4. Встановлено залежність перших віток критичних навантажень від температури на прикладі залізобетонних стрижнів.

5. Результати роботи є нові та поширюються на інші типи закріплень стрижнів та інші види матеріалів за умов, що відомі залежності їх модулів пружності від зміни температури.

Література

[1] *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. — Москва: «Наука», 1967. — 984 с.
[2] *Милованов А. Ф.* Огнестойкость железобетонных конструкций. — Москва: Стройиздат, 1986. — 224 с.
[3] *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения с техническими приложениями. — Москва.: Наука, 1968. — 503 с.
[4] *Ван Цзи-Де.* Прикладная теория упругости. — Москва: Госиздат физ.-мат. лит., 1959. — 400 с.
[5] *Тацій Р. М.* До побудови характеристичних рядів багато параметричних континуальних систем // ДАН УРСР, сер. «А». — 1974. — № 9. — С. 819-821.
[6] *Таций Р. М.* О порядке роста характеристического ряда // Математические методы и физико-механические поля. — 1981. — № 13. — С. 38-40.
[7] *Бернштейн С. А., Керопян К. К.* Определение частот колебаний стержневых систем методом спектральной функции. — Госстройиздат, 1960. — 282 с.
[8] СНиП 2.03.04-84 «Бетонные и железобетонные конструкции, предназначенные для работы в условиях воздействия повышенных и высоких температур». — Москва: Госстрой СССР, 1988. — 116 с.

Two-parameter model of the rod stability with taking into account its own weight

Roman Tatsiy, Oleg Pazen, Taras Dyachun

The effective method of rod durability investigation is suggested with taking into account its own weight, which consists in reduction of corresponding two-parameter eigenvalue problems to the set of two one-parameter problems. The dependency of the critical load on both the rod own weight change and temperature by example of ferroconcrete rods is studied.

Двухпараметрическая модель устойчивости стержня с учетом собственного веса

Роман Таций, Олег Пазен, Тарас Дячун

Предложен эффективный метод исследования устойчивости стержней с учетом их собственного веса, суть которого состоит в сведении соответствующих двупараметрических задач на собственные значения к совокупности двух однопараметрических. Исследовано зависимость критических нагрузок от изменения собственного веса и температуры на примере железобетонных стержней.

Представлено професором Б. Герою

Отримано 10.02.14