УДК 517.958:532.72

Моделювання випадкових потоків маси у двофазній шаруватій смузі за рівномірного розподілу фаз з урахуванням парного взаємовпливу шарів

Анастасія Давидок

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3*б*, Львів, 79060; Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: davydoka@gmail.com

Досліджено випадковий дифузійний потік домішкової речовини у двофазній багатошаровій смузі за рівномірного розподілу фаз. Крайову задачу сформульовано для функції потоку маси, розглянуто випадок нульової початкової концентрації домішки у тілі. Вихідну задачу зведено до еквівалентного інтегро-диференціального рівняння, розв'язок якого знайдено у вигляді ряду Неймана. Під час отримання функції кореляції фаз прийнято, що випадковою величиною є координата верхньої межі прошарку та враховано, що включення мають характерну товщину. Одержано розрахункову формулу для усередненого за ансамблем конфігурацій фаз дифузійного потоку маси, яка враховує як збурення потоку, що виникають внаслідок наявності у тілі шарів із фізичними характеристиками, відмінними від характеристик матриці, так і парний взаємовплив підшарів. Показано, що зменшення характерної товщини прошарків нівелює ефект парного взаємовпливу шарів, а зменшення приведеного коефіцієнта дифузії цей ефект підсилює.

Ключові слова: випадковий дифузійний потік, ряд Неймана, усереднення за ансамблем конфігурацій фаз, парний взаємовплив включень, функція кореляції фаз.

Вступ. Під час моделювання процесів масоперенесення важливо враховувати вплив внутрішньої неоднорідної структури середовища. Окрім того, характеристики внутрішніх неоднорідностей тіла (кількість, розміри, просторове розташування включень) можуть бути невідомими. Тоді такі структури, а також і фізичні процеси, які у них протікають, розглядають як випадкові.

Для опису теплових, дифузійних і механічних процесів у двофазних середовищах у багатьох випадках використовують підхід «гомогенізації» неоднорідних структур [1-3]. За такого підходу, вважають, що характерні відстані, на яких відбуваються зміни фізичних параметрів, значно більші за характерні розміри неоднорідностей тіла, тоді вводять середні за елементарними макрооб'ємами параметри й описують процеси у просторі, кожна точка якого містить дві компоненти одночасно, пропорційно до об'ємної частки [4]. Проблему врахування багатомасштабності деяких природних утворень, зокрема з використанням підходу до опису процесів фільтрації у стохастично неоднорідному середовищі на основі законів Дарсі, досліджено у роботі [5]. У працях Є. Я. Чаплі та

О. Ю. Чернухи запропоновано підхід до математичного опису процесів масоперенесення у випадково неоднорідних структурах, розміри неоднорідностей яких можуть бути співвимірними з розмірами тіла. Цей підхід полягає у зведенні крайової задачі масопернесення до відповідного інтегро-диференціального рівняння або системи рівнянь, а розв'язок знаходять у вигляді ряду Неймана, зручного для проведення процедури усереднення за ансамблем конфігурацій фаз [6-8]. Проте під час виконання процедури просторового усереднення зазвичай обмежуються двома першими доданками цього ряду [7, 8], а отже недослідженим залишається парний вплив включень, у тому числі й кількісний, на процеси переносу. Ця робота стосується дослідження випадкових дифузійних потоків у двофазній стохастично неоднорідній смузі з урахуванням парного взаємовпливу включень на основі моделі, в рамках якої рівняння переносу формулюються для функції потоку маси, а крайові умови можуть накладатись як на потік, так і на концентрацію домішкової речовини.

1. Об'єкт дослідження та формулювання задачі

Нехай у смузі товщини z_0, що містить n_0 підшарів фази $j=0$ (матриці) та n_1 підшарів фази $j=1$ (включення), відбувається процес дифузії домішкової речовини (рис. 1). Приймаємо, що координати розташування підшарів включення є невідомі, а фази у тілі розташовані за рівномірним законом розподілу. Окрім того, коефіцієнти дифузії прийнято сталими у межах кожної з фаз. Вважаємо, що об'ємні частки фаз, з яких складене тіло, можуть бути як співвимірні, так і об'ємна частка матриці v_0 може значно перевищувати об'ємну частку включень v_1 .

Відповідно до праці [8] постановку крайової задачі сформулюємо для функції потоку маси $J(z,t)$ в одновимірному за просторовою координатою випадку, за нульової початкової умови й умов підтримання сталого значення потоку домішки на верхній границі тіла т нульового значення концентрації домішкової речовини на границі $z=z_0$, що означає рівність дифузійного потоку на цій межі деякій функції $F(t)$:

$$\frac{\partial J(z,t)}{\partial t}=D(z)\frac{\partial^2 J(z,t)}{\partial z^2}; \tag{1}$$

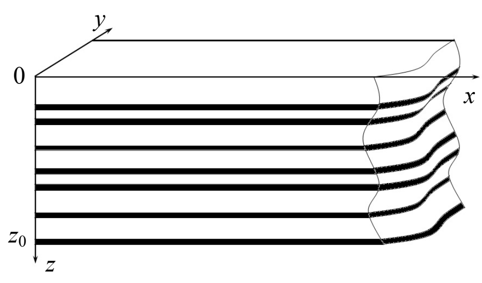

Рис. 1. Двофазна смуга випадково неоднорідної шаруватої структури

$$J(z,t)\big|_{t=0}=0; \quad (2)$$

$$J(z,t)\big|_{z=0}=J_* \equiv const; \quad J(z,t)\big|_{z=z_0}=F(t), \quad (3)$$

де $D(z)=\begin{cases} D_0,\, z\in\Omega_0; \\ D_1,\, z\in\Omega_1, \end{cases}$ — випадковий коефіцієнт дифузії, Ω_j — багатозв'язна область j-ої фази ($j=0,1$).

Початкова умова на функцію потоку маси (2) означає, що в нульовий момент часу концентрація домішки може дорівнювати нулю або бути рівною деякій сталій, відмінній від нуля. Надалі розглянемо перший випадок.

2. Розв'язання вихідної крайової задачі

Розглядаючи неоднорідність структури тіла як внутрішні джерела, за допомогою здійснення певних перетворень, вихідну задачу (1)-(3) можна звести до еквівалентного інтегро-диференціального рівняння з випадковим ядром [9]

$$J(z,t)=J_0(z,t)+\int_0^t\int_0^{z_0} G\left(z,z',t,t'\right)L_s\left(z'\right)J\left(z',t'\right)dz'dt', \quad (4)$$

де $L_s(z)=\sum_{i=1}^{n_1}\left(D_1-D_0\right)\eta_{i1}(z)\partial^2/\partial z^2$; $\eta_{i1}(z)=\begin{cases} 1,\ z\in\Omega_{i1}; \\ 0,\ z\notin\Omega_{i1}, \end{cases}$ — випадкова «функція структури»; Ω_{i1} — i-та однозв'язна область фази $j=1$; $\sum_{i=1}^{n_1}\Omega_{i1}=\Omega_1$; $J_0(z,t)$ — розв'язок однорідної крайової задачі; $G\left(z,z',t,t'\right)$ — функція Гріна крайової задачі з точковим джерелом. Відповідно до роботи [8]

$$J_0(z,t)=J_*\left(1-\frac{2}{z_0}\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n^{-1}e^{-D_0\xi_n^2 t}\sin\left(\xi_n z\right)\right), \quad (5)$$

$$G\left(z,z',t,t'\right)=\frac{\theta\left(t-t'\right)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-D_0 y_k^2\left(t-t'\right)}\left[\cos\left(y_k\left(z-z'\right)\right)-\cos\left(y_k\left(z+z'\right)\right)\right]. \quad (6)$$

Тут $\xi_n=\pi(2n-1)/2z_0$, $y_k=k\pi/z_0$. Для $z=z_0$ одержимо крайову умову для функції дифузійного потоку $J_0(z,t)\big|_{z=z_0}\equiv F(t)=J_*\left(1-\frac{2}{z_0}\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n^{-1}(-1)^{n+1}e^{-D_0\xi_n^2 t}\right)$.

Розв'язок рівняння (4) знайдено методом послідовних ітерацій у вигляді ряду Неймана [9]

$$J(z,t)=J_0(z,t)+\int_0^t\int_0^{z_0} G\left(z,z',t,t'\right)L_s\left(z'\right)J_0\left(z',t'\right)dz'dt'+$$

$$+\int_0^t\int_0^{z_0} G(z,z',t,t')L_s(z')\int_0^{t'}\int_0^{z_0} G(z',z'',t',t'')L_s(z'')J_0(z'',t'')dz''dt''dz'dt'+$$
$$+\int_0^t\int_0^{z_0} G(z,z',t,t')L_s(z')\int_0^{t'}\int_0^{z_0} G(z',z'',t',t'')L_s(z'')\int_0^{t''}\int_0^{z_0} G(z'',z''',t'',t''')L_s(z''')\times$$
$$\times J_0(z''',t''')dz'''dt'''dz''dt''dz'dt'+\ldots \tag{7}$$

Зазначимо, що перший член ряду Неймана (7) — дифузійний потік $J_0(z,t)$ в однорідному середовищі з фізичними характеристиками базової фази, другий доданок є сума збурень потоку, що виникають у разі вміщення у тіло включення з фізичними характеристиками, відмінними від характеристик матриці. Третій доданок ряду (7) відповідає збуренням, що виникають, якщо у середовище з коефіцієнтом дифузії матриці поміщати почергово по два включення з іншими фізичними характеристиками, тобто описує ефекти парного взаємовпливу включень на потік маси і т. п. [6]. Окрім того, інтегральний ряд (7) є абсолютно та рівномірнозбіжним, якщо коефіцієнти дифузії є обмежені: $D_0, D_1 \le K < \infty$ і $D_0 \ne 0$.

3. Усереднення випадкового потоку маси за ансамблем конфігурацій фаз

Для дослідження ефектів парного взаємовпливу підшарів, з яких складається тіло, обмежимося трьома першими членами ряду Неймана (7). Припускаємо, що характерна (середня) товщина підшарів включення становить h_1, а випадковою координатою, яка характеризує їх положення, є координата верхньої межі прошарку. Проведемо усереднення за ансамблем конфігурацій фаз випадкового дифузійного потоку з рівномірною функцією розподілу

$$\langle J(z,t)\rangle \approx \langle J_0(z,t)\rangle + \int_0^t\int_0^{z_0} G(z,z',t,t')\langle L_s(z')\rangle J_0(z',t')dz'dt'+$$
$$+\int_0^t\int_0^{z_0} G(z,z',t,t')\left\langle L_s(z')\int_0^{t'}\int_0^{z_0} G(z',z'',t',t'')L_s(z'')J_0(z'',t'')dz''dt''\right\rangle dz'dt'. \tag{8}$$

Зазначимо, що $\langle J_0(z,t)\rangle = J_0(z,t)$, $\langle L_s(z')\rangle = (D_1-D_0)\sum_{i=1}^{n_j}\langle \eta_{i1}(z')\rangle \partial^2/\partial z'^2$, а

$$\langle L_s(z')G(z',z'',t',t'')L_s(z'')\rangle = (D_1-D_0)^2\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_1}\langle \eta_{i1}(z')\eta_{j1}(z'')\rangle \frac{\partial^2 G}{\partial z'^2}\frac{\partial^2}{\partial z''^2}.$$

Після усереднення випадкової функції $\eta_{i1}(z')$ одержимо

$$\sum_{i=1}^{n_1}\langle \eta_{i1}(z')\rangle = \begin{cases} v_1 z'/h_1, & z'\le h_1,\\ v_1, & z'\ge h_1.\end{cases}$$

Окрім того,

$$\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_1}\left\langle \eta_{i1}(z')\eta_{j1}(z'')\right\rangle = \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_1}\left\langle \eta_{i1}(z')\right\rangle\left\langle \eta_{j1}(z'')\right\rangle + n_1^2\psi_\eta(z',z''),$$

де $\psi_\eta(z',z'')$ — функція кореляції фаз, яка для рівномірного розподілу має вигляд [10]

$$\psi_\eta(z',z'') = \int_0^{z_0-h_1}\int_0^{z_0-h_1}\frac{z'z''}{V^2}dz''dz' = \frac{(z_0-h_1)^4}{4V^2}.$$

Тут V — об'єм всього тіла.

Враховуючи у співвідношенні (8) знайдені вирази та приймаючи, що $n_1^2/V^2 = v_1^2/h_1^2$, одержимо формулу для потоку маси домішкової речовини у двофазній багатошаровій смузі з рівномірним розподілом фаз з урахуванням парного взаємовпливу шарів

$$\begin{aligned}
&\left\langle J(z,t)\right\rangle_{conf} = J_0(z,t) + (D_1-D_0)v_1\int_0^t\left[\frac{1}{h_1}\int_0^{h_1} z'G(z,z',t,t')\frac{\partial^2 J_0(z',t')}{\partial z'^2}dz' + \right.\\
&\left.+\int_{h_1}^{z_0} G(z,z',t,t')\frac{\partial^2 J_0(z',t')}{\partial z'^2}dz'\right]dt' + (D_1-D_0)^2\int_0^t\left[\frac{v_1^2}{h_1^2}\int_0^{h_1} z'G(z,z',t,t')\times\right.\\
&\times\int_0^{t'}\left(\int_0^{h_1} z''\frac{\partial^2 G(z',z'',t',t'')}{\partial z'^2}\frac{\partial^2 J_0(z'',t'')}{\partial z''^2}dz'' + h_1\int_{h_1}^{z_0}\frac{\partial^2 G(z',z'',t',t'')}{\partial z'^2}\times\right.\\
&\left.\times\frac{\partial^2 J_0(z'',t'')}{\partial z''^2}dz''\right)dt''dz' + \int_{h_1}^{z_0} G(z,z',t,t')\int_0^{t'}\left(\frac{v_1^2}{h_1}\int_0^{h_1} z''\frac{\partial^2 G(z',z'',t',t'')}{\partial z'^2}\times\right.\\
&\left.\left.\times\frac{\partial^2 J_0(z'',t'')}{\partial z''^2}dz'' + v_1^2\int_{h_1}^{z_0}\frac{\partial^2 G(z',z'',t',t'')}{\partial z'^2}\frac{\partial^2 J_0(z'',t'')}{\partial z''^2}dz''\right)dt''dz'\right]dt' +\\
&+(D_1-D_0)^2\frac{(z_0-h_1)^4 v_1^2}{2h_1^2}\int_0^t\int_0^{z_0}\int_0^{t'}\int_0^{z_0} G(z,z',t,t')\frac{\partial^2 G(z',z'',t',t'')}{\partial z'^2}\times\\
&\times\frac{\partial^2 J_0(z'',t'')}{\partial z''^2}dz''dt''dz'dt'. \qquad (9)
\end{aligned}$$

Підставимо у співвідношення (9) вирази для функції Гріна (6) і дифузійного потоку домішки в однорідному шарі (5), тоді отримаємо

$$\frac{1}{J_*}\left\langle J(z,t)\right\rangle_{conf} = J_0(z,t) + J_1(z,t) + J_2(z,t), \qquad (10)$$

де

$$J_0(z,t) = 1 - \frac{2}{z_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\xi_n}e^{-D_0\xi_n^2 t}\sin(\xi_n z);$$

$$J_1(z,t) = \frac{2v_1(D_1 - D_0)}{z_0^2 D_0}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}c_{nk}A_{kn}\left(e^{-D_0 y_k^2 t} - e^{-D_0\xi_n^2 t}\right)\sin(y_k z);$$

$$J_2(z,t) = -\frac{2(D_1 - D_0)^2 v_1^2}{z_0 D_0 \pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sin(y_k z)\left\langle\sum_{n=1}^{\infty}c_{nk}\, y_k^2\left[te^{-D_0 y_k^2 t} - \frac{e^{-D_0 y_k^2 t} - e^{-D_0\xi_n^2 t}}{D_0\left(\xi_n^2 - y_k^2\right)}\right]\times\right.$$

$$\times\left\{A_{kn}\left[z_0 - \frac{h_1}{2} + \frac{1-\cos(2y_k h_1)}{4h_1 y_k^2}\right] + \frac{(-1)^{k+n}\overline{c}_{nk}z_0(z_0 - h_1)^4}{2h_1^2}\right\} +$$

$$\left. + \sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{kl}c_{nl}y_l^2 A_{ln}\left[\frac{e^{-D_0 y_k^2 t} - e^{-D_0 y_l^2 t}}{D_0\left(y_l^2 - y_k^2\right)} - \frac{e^{-D_0 y_k^2 t} - e^{-D_0\xi_n^2 t}}{D_0\left(\xi_n^2 - y_k^2\right)}\right]\right\rangle.$$

Тут $c_{nk} = \dfrac{\xi_n}{\xi_n^2 - y_k^2}$, $\overline{c}_{nk} = \dfrac{y_k}{y_k^2 - \xi_n^2}$; $a_{kn} = \dfrac{\cos\left[(y_k - \xi_n)h_1\right] - 1}{h_1(y_k - \xi_n)^2} - \dfrac{\cos\left[(y_k + \xi_n)h_1\right] - 1}{h_1(y_k + \xi_n)^2}$;

$A_{kn} = a_{kn} + (-1)^{k+n}\dfrac{2y_k}{y_k^2 - \xi_n^2}$; $c_{nl} = c_{nk}\big|_{k=l}$, $a_{kl} = a_{kn}\big|_{\xi_n = y_l}$, $A_{ln} = A_{kn}\big|_{l=n}$.

Вираз (10) є розрахункова формула для усередненого за ансамблем конфігурацій фаз дифузійного потоку домішкової речовини у двофазній шаруватій смузі за нульової початкової концентрації з урахуванням парного взаємовпливу шарів.

4. Числовий аналіз впливу третього доданка ряду Неймана на усереднений потік маси

Дослідження впливу фізичних характеристик і геометричних параметрів випадкової структури тіла на усереднений дифузійний потік, обчислений за двома першими доданками (10), проведено у роботі [9]. Дослідимо тут кількісну та якісну поведінку третього доданка усередненого ряду Неймана $J_2(z,t)$, що описує ефект парного взаємовпливу шарів, із яких складається тіло.

Числові розрахунки проводились у безрозмірних змінних [11] $\eta = z/z_0$, $\tau = D_0 t/z_0^2$, а ряди у формулі (10) обчислювалися з точністю 10^{-9}. За базові параметри прийнято $\tau = 0{,}1$; $D_1/D_0 = 0{,}01$; $v_1 = 0{,}5$; $h_1 = 0{,}01$.

У таблиці 1 наведено розрахункові дані для доданків $J_0(\eta,\tau)$, $J_1(\eta,\tau)$, $J_2(\eta,\tau)$ усередненого дифузійного потоку $\langle J(\eta,\tau)\rangle / J_*$ на різних безрозмірних глибинах η. Розбиття інтервалу $\eta \in [0;1]$ проведено з кроком 0,04.

Таблиця 1

Розрахункові дані складових усередненого потоку з урахуванням парного взаємовпливу шарів

	$D_1/D_0 = 0{,}01$; $v_1 = 0{,}5$; $h_1 = 0{,}01$			$D_1/D_0 = 0{,}03$; $v_1 = 0{,}6$; $h_1 = 0{,}02$		
η	J_0	J_1	J_2	J_0	J_1	J_2
0,00	1,000000000	0,000000000	0,000000000	1,000000000	0,000000000	0,000000000
0,04	0,928736720	– 0,017587332	0,000000105	0,928736720	– 0,020665135	0,000000769
0,08	0,858041962	– 0,034754605	0,000000169	0,858041962	– 0,040839731	0,000001104
0,12	0,788470848	– 0,051097602	0,000000241	0,788470848	– 0,060045747	0,000001524
0,16	0,720552246	– 0,066244473	0,000000302	0,720552246	– 0,077846162	0,000001843
0,20	0,654776972	– 0,079869127	0,000000366	0,654776972	– 0,093857766	0,000002222
0,24	0,591587520	– 0,091702432	0,000000411	0,591587520	– 0,107764265	0,000002426
0,28	0,531369687	– 0,101540267	0,000000457	0,531369687	– 0,119325783	0,000002663
0,32	0,474446379	– 0,109248031	0,000000492	0,474446379	– 0,128384146	0,000002822
0,36	0,421073777	– 0,114761542	0,000000521	0,421073777	– 0,134863913	0,000002954
0,40	0,371438937	– 0,118084326	0,000000537	0,371438937	– 0,138769222	0,000002990
0,44	0,325665596	– 0,119281619	0,000000551	0,325665596	– 0,140176718	0,000003042
0,48	0,283807606	– 0,118471518	0,000000552	0,283807606	– 0,139225159	0,000003005
0,52	0,245863787	– 0,115813820	0,000000546	0,245863787	– 0,136102406	0,000002937
0,56	0,211779873	– 0,111497657	0,000000530	0,211779873	– 0,131030597	0,000002815
0,60	0,181457608	– 0,105727559	0,000000509	0,181457608	– 0,124250164	0,000002681
0,64	0,154763808	– 0,098710070	0,000000478	0,154763808	– 0,116003797	0,000002475
0,68	0,131539993	– 0,090640479	0,000000442	0,131539993	– 0,106521010	0,000002264
0,72	0,111612186	– 0,081690682	0,000000399	0,111612186	– 0,096003776	0,000002020
0,76	0,094800565	– 0,071998627	0,000000352	0,094800565	– 0,084614182	0,000001765
0,80	0,080929228	– 0,061659629	0,000000298	0,080929228	– 0,072464198	0,000001476
0,84	0,069831629	– 0,050719923	0,000000244	0,069831629	– 0,059608094	0,000001201
0,88	0,061364043	– 0,039172510	0,000000184	0,061364043	– 0,046037710	0,000000898
0,92	0,055405893	– 0,026955401	0,000000124	0,055405893	– 0,031680142	0,000000597
0,96	0,051867796	– 0,013954086	0,000000060	0,051867796	– 0,016399998	0,000000278
1,00	0,050694637	0,000000000	0,000000000	0,050694637	0,000000000	0,000000000

Зазначимо, що величина доданка $J_2(\eta,\tau)$ на 5-6 порядків менша абсолютних значень потоку в однорідному шарі $J_0(\eta,\tau)$ та вкладу доданка $J_1(\eta,\tau)$, який описує збурення потоку внаслідок наявності включень для вхідних даних, наведених у табл. 1. Проте параметри задачі можуть змінюватись у широких межах, тому дослідимо їхній вплив на кількісну та якісну поведінку функції $J_2(\eta,\tau)$.

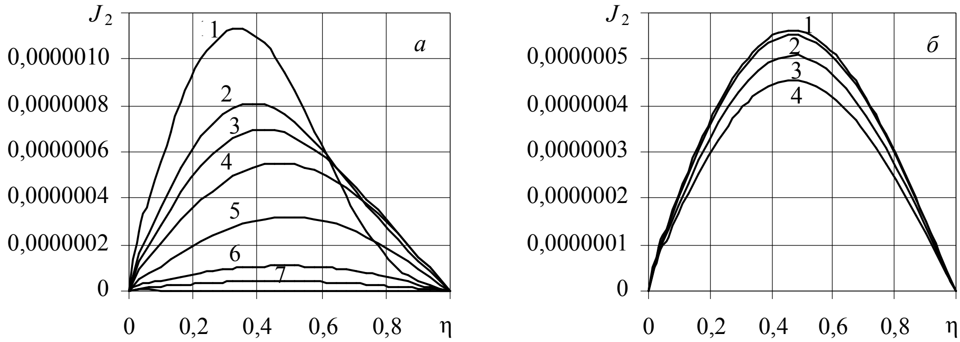

Рис. 2. Розподіли третього доданка ряду Неймана для різних значень часу (*а*) та для різних значень відношення D_1/D_0 (*б*)

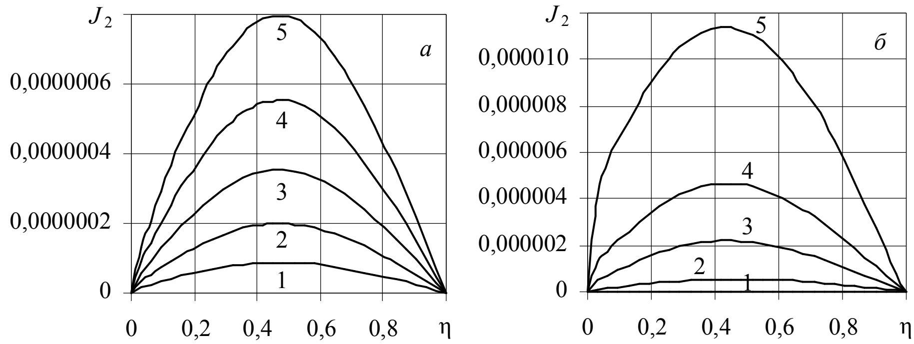

Рис. 3. Третій доданок ряду Неймана для різних значень об'ємної частки включення (*а*) та для різних значень характерної товщини прошарків (*б*)

На рис. 2 показані розподіли доданка $J_2(\eta,\tau)$ у різні моменти часу $\tau = 0{,}05$; 0,08; 0,1; 0,15; 0,2; 0,3; 0,5 (криві 1-7, рис. 2*а*) та для різних значень відношення коефіцієнтів дифузії $D_1/D_0 = 0{,}001$; 0,01; 0,05; 0,1 (криві 1-4, рис. 2*б*). На рис. 3 проілюстровано залежність третього доданка усередненого ряду Неймана від об'ємної частки включень $v_1 = 0{,}2$; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6 (криві 1-5, рис. 3*а*) та їх характерної товщини $h_1 = 0{,}001$; 0,01; 0,02; 0,03; 0,05 (криві 1-5, рис. 3*б*).

Слід зауважити, що зі зростанням часу протікання процесу та значень відношення D_1/D_0, відбувається зменшення величини третього доданка усередненого ряду Неймана (рис. 2). Протилежна ситуація спостерігається за зміни значень v_1 та h_1 — збільшення вказаних параметрів викликає зростання величини $J_2(\eta,\tau)$ (рис. 3). Окрім того, ефект парного взаємовпливу шарів є найбільш значимим для малих значень часів (крива 1, рис. 2*а*) та великих значень характерної товщини прошарків h_1 (крива 5, рис. 3*б*).

Зазначимо, що максимальні значення, які досягає функція $J_2(\eta,\tau)$, наприклад, для малих значень τ, великих v_1 та h_1, є на декілька порядків меншими, ніж абсолютні значення доданків $J_0(\eta, \tau)$ та $J_1(\eta, \tau)$. Оскільки кількісні дослідження проведені для широкого інтервалу параметрів задачі, то можна стверджувати, що ефектом парного взаємовпливу шарів можна нехтувати.

Висновки. На основі рівняння дифузії для функції потоку маси сформульовано крайову задачу дифузії домішки у двофазному шаруватому випадково неоднорідному тілі за умови рівномірного розподілу включень. Побудовано еквівалентне інтегро-диференціальне рівняння, розв'язок якого знайдено методом послідовних ітерацій у вигляді ряду Неймана. Обмежившись трьома першими членами цього ряду, одержано вираз для усередненого за ансамблем конфігурацій фаз випадкового потоку маси з урахуванням парного взаємовпливу шарів. Знайдено розрахункову формулу для усередненого дифузійного потоку в двофазній шаруватій смузі за нульової початкової концентрації. Проаналізовано вплив вхідних параметрів задачі на величину третього доданка ряду Неймана. Показано, що найбільший ефект від парного взаємовпливу прошарків спостерігається у випадку малих часів досліджень і великих значень характерної товщини прошарків. Проте для цієї задачі, навіть для таких випадків, якщо значення третього доданка ряду Неймана в межах заданої точності є нехтовно мале.

Підкреслимо, що, зазвичай, під час формулювання задач переносу у випадково неоднорідних тілах накладається умова превалюючої об'ємної частки однієї з фаз, оскільки розв'язок будується у вигляді розкладу в ряд в околі розв'язку однорідної крайової задачі з характеристиками цієї фази. Числовий аналіз третього члена ряду Неймана, який описує парний взаємовплив підшарів, показав, що умова наявності в тілі превалюючої фази не є необхідна, тобто під час дослідження потоків у випадково неоднорідних шаруватих тілах врахування двох перших членів ряду Неймана є достатнє як для співвимірних об'ємних часток фаз, так і за наявності в структурі матриці.

Також зазначимо, що в роботі розглядалась умова нульової початкової концентрації домішки в тілі, у той же час наявність дифундуючої речовини в нульовий момент часу збільшує значення потоку, що потребує дослідження ефекту парного взаємовпливу підшарів для цього випадку, так само як і за значної концентрації включень біля джерела маси.

Література

[1] *Гамбин Б., Назаренко Л.В., Телега Е.* Стохастическая гомогенизация уравнений стационарной термоупругости // Доповіді НАН України. — 2002. — № 10. — С. 31-44.

[2] *Lidzba D., Shao J.F.* Study of poroelasticity material coefficients as response of microstructure // Mech. of Cohasive-Fractional Mat. — 2000. — Vol. 5. — P. 149-171.

[3] *Matysiak S. J., Mieszkowski R.* On homogenization of diffusion proccesses in microperiodic stratified bodies // Int. J. Heat and Mass Trans. — 1999. — Vol. 26. — P. 539-547.

[4] *Хорошун Л. П., Солтанов Н. С.* Термоупругость двухкомпонентных смесей. — Киев: Наук. думка, 1984. — 112 с.

[5] Фильтрация жидкостей в многомасштабных пористых средах / *Кузнецов О. Л., А. В. Каракин, Ю. А. Кухаренко, П. Ю. Кухаренко* // Геоинформатика. — 2001. — № 4. — С. 11-15.

[6] *Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю.* Математичне моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах. — Київ: Наук. думка, 2009. — 302 с.

[7] *Chaplya Y. Y., Chernukha O. Y., Bilushchak Y. I.* Contact initial boundary value problem of the diffusion of admixture particles in a two-phase stochastically inhomogeneous stratified strip // Journal of Mathematical Sciences. — 2012. — Vol. 183, No 1. — P. 83-99.

[8] *Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю., Давидок А. Є.* Математичне моделювання дифузійних потоків у випадково неоднорідній шаруватій смузі // Доповіді НАН України. — 2012. — № 11 — С. 40-46.

[9] *Чернуха О. Ю., Давидок А. Є.* Моделювання дифузійних потоків у двофазній багатошаровій випадково неоднорідній смузі за рівномірного розподілу фаз // Прикладні проблеми механіки і математики. — 2013. — Вип. 11. — С. 142-150.

[10] *Білущак Ю., Чапля Є., Чернуха О.* Двоточкова функція кореляції та дисперсія випадкового дифузійного поля концентрації в смузі з рівномірним розподілом шаруватих включень // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2012. — Вип. 16. — С. 7-22.

[11] *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. — Москва: Высшая школа, 1978. — 480 с.

Modeling random mass flows in a two-phase stratified strip with the uniform phase distribution taking into account the mutual influence of sublayer pairs

Anastasiia Davydok

An admixture random diffusion flow is investigated in a two-phase multilayered strip at the uniform phase distribution. The initial-boundary value problem is formulated for the function of the mass flow, the case of zero initial concentration of admixture in the strip is considered. The initial problem is reduced to an equivalent integro-differential equation, its solution is found in the form of Neumann series. The correlation function of the phase is obtained under the assumptions that the random variable is the coordinate of the upper boundary layer and inclusions have a characteristic thickness. Calculation formula is obtained for the averaged over the ensemble of phase configurations of the diffusion mass flow. This formula takes into account the flow disturbances arising due to the presence of body layers with physical characteristics which are different from those of the matrix, and also takes into account the mutual influence of sublayers. It is shown that the decrease of the layer's characteristic thickness negates the effect of the mutual influence of sublayers, but the decrease of the reduced diffusion coefficient intensifies this one.

Моделирование случайных потоков массы в двухфазной слоистой полосе при равномерном распределении фаз с учетом парного взаимовлияния слоев

Анастасия Давидок

Исследован случайный диффузионный поток примесного вещества в двухфазной многослойной полосе при равномерном распределении фаз. Краевая задача сформулирована для функции потока массы, рассмотрен случай нулевой начальной концентрации примеси в теле. Исходная задача сведена к эквивалентному интегро-дифференциальному уравнению, решение которого найдено в виде ряда Неймана. При получении функции корреляции фаз принято, что случайной величиной является координата верхней границы слоя, и учтено, что включения имеют характерную толщину. Получена расчетная формула для усредненного по ансамблю конфигураций фаз диффузионного потока массы, которая учитывает как возмущения потока, возникающие за счет наличия в теле слоев с физическими характеристиками, отличными от характеристик матрицы, так и парное взаимовлияние слоев. Показано, что уменьшение характерной толщины слоев нивелирует эффект парного взаимного влияния слоев, а уменьшение приведенного коэффициента диффузии этот эффект усиливает.

Представлено професором О. Чернухою Отримано 22.05.14