

## Еліптичні інтеграли третього роду в задачах контактної взаємодії

Юрій Сачук<sup>1</sup>, Олександр Максимук<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, проспект Волі, 13, Луцьк,  
e-mail: sachuk\_yura@gmail.com

<sup>2</sup> д. ф.-м. н., професор, Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я. С. Підстригача  
НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060

*На прикладі задачі про контактну взаємодію жорсткого штампа із пружною півплощиною розглянуто проблеми обчислення еліптичних інтегралів третього роду. Наведені основні методи для знаходження наближених значень еліптичних інтегралів при різних вхідних параметрах на всьому діапазоні їх значень. Побудовано схеми обчислень та програмні модулі для реалізації математичних моделей контактних задач із використанням спеціальних функцій і засобів візуального відображення результатів. Наведено нові сучасні приклади задач, які зводяться до обчислення еліптичних інтегралів третього роду (знаходження напруженості магнітного поля й обчислення траєкторій меридіанного плавання). Проведено дослідження напружено-деформованого стану всередині півплощини. Побудовано 3D-зображення напружень та їх ізолінії, визначено зони концентрації напружень.*

**Ключові слова:** еліптичні інтеграли, контактна взаємодія, магнітне поле, меридіанне плавання, інтеграли Карлсона, ізолінії.

**Вступ.** Теоретичні та прикладні дослідження в галузі математики є необхідним інструментом для інженерних розрахунків. Дослідження фізичних процесів, математичних моделей теорії пружності часто зводяться до побудови програмних модулів із використанням наближених обчислень і спеціальних математичних функцій. Основною проблемою для отриманих математичних моделей є розробка математичних і програмних засобів для числової реалізації задач у всьому діапазоні значень вхідних параметрів і особливо важливим є розрахунок результатів у критичних точках.

Розв'язок контактних задач для штампів канонічної форми (циліндричної, еліптичної або гіперболічної) зводиться до еліптичних інтегралів, в т. ч. і третього роду [1, 2]. До недавнього часу були відомі способи їх наближеного обчислення лише для обмеженого інтервалу вхідних параметрів [3, 4]. Для повного набору необхідно було розробляти нові підходи. Дослідження останніх років під час вивчення електромагнітних полів і траєкторій меридіанного плавання також звелися до обчислення еліптичних інтегралів третього роду [5, 6]. У роботі запропоновано методику таких розрахунків.

## 1. Еліптичні інтеграли в контактних задачах

Проблема програмно-чисельної реалізації моделей у задачах контактної взаємодії залишається головною під час розрахунків надійності роботи контактних пар машин і механізмів [7]. Використовуючи відомі методи розв'язування сингулярних інтегральних рівнянь про взаємодію жорстких штампів із пружною півплощиною (плоска задача), отримано розв'язки для контактного тиску, зумовленого дією штампів канонічної форми (параболічний, циліндричний, еліптичний, гіперболічний). Аналітичні розв'язки визначаються через еліптичні інтеграли першого та третього роду. Під час розробки засобів реалізації моделей контактної взаємодії виникає проблема розрахунку значень повних і неповних еліптичних інтегралів третього роду, які входять у ядра функції контактного тиску. Якщо для штампа параболічної форми отримано аналітичний розв'язок для контактного тиску, який не містить у собі еліптичних інтегралів [7], то для інших штампів розв'язки містять еліптичні інтеграли третього роду та мають вигляд [1]:

$$p(x) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi} \frac{E_*}{2} \frac{1}{1 + \varepsilon} (RI_1^\pm - RxI_3^\pm), \quad (1)$$

де  $I_1^\pm, I_3^\pm$  — повні еліптичні інтеграли першого та третього роду,  $2a$  — область контакту,  $E_*$  — приведений модуль пружності,  $R$  — радіус кривизни штампа у точці  $x = 0$ .

$$I_3^\pm = \int_{-a}^a \frac{ds}{\sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{R^2 \pm s^2} (x - s)}. \quad (2)$$

Тут знак « $\leftrightarrow$ » та  $\varepsilon = 0$  відповідає циліндричному штампі; « $\leftarrow$ » та  $\varepsilon > 0$  — еліптичному штампі, знак « $\rightarrow$ » та  $\varepsilon > 0$  — гіперболічному штампі. Застосовуючи відомі тригонометричні заміни та перетворення [8], інтеграли зведено до стандартної форми Лежандра. У загальному випадку перетворений інтеграл має вигляд [9]:

$$P(n, k, \phi) = \int_0^\phi (1 + n \sin^2 t)^{-1} (1 - k^2 \sin^2 t)^{-1/2} dt, \quad (3)$$

де  $\phi = 90^\circ$ , а  $n, k$  — змінні параметри, які залежать від форми штампа.

## 2. Підходи для обчислення повних і неповних еліптичних інтегралів третього роду

У загальному випадку будь-який еліптичний інтеграл третього роду залежить від трьох параметрів  $n, k, \phi$ , де  $n, k$  — числові параметри. Якщо  $k < 1$ , то знаходження еліптичного інтегралу третього роду можна звести до обчислення деякого числового ряду [9], у який розкладається підінтегральна функція. За малих значень  $\phi$  вище описаний метод дає якісні наближення, однак, якщо  $\phi \approx 90^\circ$ , то неможливо

отримати коректне значення еліптичного інтегралу у зв'язку з особливостями побудови обчислюваного ряду. Для вирішення цієї проблеми пропонується використати чисельну інверсію неповних еліптичних інтегралів третього роду. Основна ідея такого методу полягає у поділі вхідних аргументів навпіл згідно теореми додавання для оцінки неповних еліптичних інтегралів [10]. Теоретичний опис і програмну реалізацію цього методу можна знайти у роботі [10], проте як і у попередньому методі обчислення неможливо провести для значення  $\phi \approx 90^\circ$ . Для практичного застосування ці методи є неефективні, а більшість задач прикладної механіки потребують обчислення інтегралів у всьому діапазоні значень параметрів. Тому пропонується використати роботу Б. Карлсона [11], який запропонував метод послідовного обчислення еліптичних інтегралів, що базується на застосуванні теореми про дублювання. Цей метод годиться для обчислення всіх типів еліптичних інтегралів. Для цього стандартна форма еліптичного інтегралу (3) записується через інтеграли Карлсона:

$$\begin{aligned} \Pi(n_0, k, \phi) &= \int_0^\phi (1 + n_0 \sin^2 t)^{-1} (1 - k^2 \sin^2 t)^{-1/2} dt = (\sin \phi) \times \\ &\times R_F(\cos^2 \phi, 1 - k^2 \sin^2 \phi, 1) - \frac{n}{3} (\sin \phi)^3 R_J(\cos^2 \phi, 1 - k^2 \sin^2 \phi, 1, 1 + n_0 \sin^2 \phi), \end{aligned} \quad (4)$$

$$R_J(x, y, z, p) = \frac{3}{2} \int_0^\infty [(t+x)(t+y)(t+z)^{-1/2}(t+p)^{-1}] dt, \quad (5)$$

$$R_F(x, y, z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty [(t+x)(t+y)(t+z)]^{-1/2} dt. \quad (6)$$

Нехай маємо деяку точку  $T_0(x_0, y_0, z_0, p_0)$ , у якій  $x_0 > 0$ ,  $y_0 > 0$ ,  $z_0 > 0$ ,  $p_0 > 0$ , тоді можемо записати:

$$\begin{aligned} R_J(x_0, y_0, z_0, p_0) &= 3 \sum_{m=0}^{n-1} 4^{-m} R_c(\alpha_m, \beta_m) + \sum_{m=0}^{n-1} 4^{-m} R_c(\alpha_m, \beta_m) + \\ &+ 4^{-n} \mu_n^{-3/2} \left[ 1 + \frac{3}{7} s_n^{(2)} + \frac{1}{3} s_n^{(3)} + \frac{3}{22} (s_n^{(2)})^2 \right]^2 + \frac{3}{11} s_n^{(4)} + \frac{3}{13} s_n^{(2)} s_n^{(3)} + \frac{3}{13} s_n^{(5)} + r_n; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\alpha_m = \left[ p_n (x_n^{1/2} + y_n^{1/2} + z_n^{1/2}) + (x_n y_n z_n)^{1/2} \right]^2, \quad \beta_n = p_n (p_n + \lambda_n)^2; \quad (8)$$

$$s_n^{(m)} = (X_n^m + Y_n^m + Z_n^m + 2P_n^m) / (2m), \quad \text{де } m = \overline{2, 5}; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} X_n &= 1 - (x_n / \mu_n), \quad Y_n = 1 - (y_n / \mu_n), \quad Z_n = 1 - (z_n / \mu_n), \quad P_n = 1 - (p_n / \mu_n), \\ x_{n+1} &= (x_n + \lambda_n) / 4, \quad y_{n+1} = (y_n + \lambda_n) / 4, \quad z_{n+1} = (z_n + \lambda_n) / 4, \quad p_{n+1} = (p_n + \lambda_n) / 4; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\lambda_n = (x_n y_n)^{1/2} + (x_n z_n)^{1/2} + (y_n z_n)^{1/2}, \quad \mu_n = (x_n + y_n + z_n + 2p_n) / 5, \quad (11)$$

$$\varepsilon_n = \max \left\{ |X_n^m|, |Y_n^m|, |Z_n^m|, |P_n^m| \right\}, \text{ якщо } n \rightarrow \infty, \text{ то } \varepsilon_n = O(4^{-n});$$

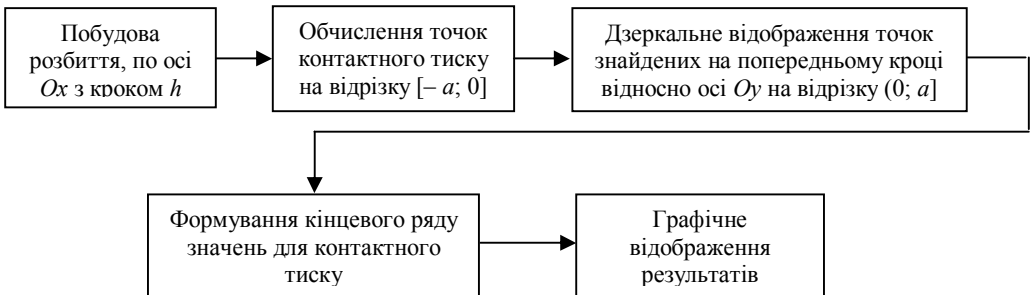
$$|r_n| < \frac{3\varepsilon_n^6}{(1-\varepsilon_n)^{3/2}}, \quad r_n \approx \frac{-1}{10} (s_n^{(2)})^3 + \frac{3}{10} (s_n^{(3)})^2 + \frac{3}{5} s_n^{(2)} s_n^{(4)}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (12)$$

$r_n$  — залишковий член ряду. Інтеграли  $R_c(x, y)$  та  $R_F(x, y, z)$  можна обчислити за схемою, яку описано у роботі [11].

### 3. Програмні засоби, способи обчислення та графічного подання результатів у контактних задачах

Для автоматизації побудови графіків контактних тисків, які в загальному випадку мають вигляд (1), було обрано програму Matlab у якій, на основі вищеописаних інтегралів Карлсона, є вбудовані функції для обчислення значень еліптичних інтегралів першого, другого та третього роду. Зокрема, для побудови графіків контактних тисків було використано спеціальну вбудовану функцію *EllipticK(k)* для обчислення повного еліптичного інтегралу та функцію *EllipticPi(n, k, z)* для повних і неповних еліптичних інтегралів третього роду [12].

Схема отримання графіків контактного тиску



На рис. 1а наведено графік контактного тиску для штампа еліптичної форми для  $a/R = 0,2$  і  $\varepsilon = 0,2$ , рис. 1б для  $a/R = 0,35$ .

Важливим фактором під час застосування методики знаходження еліптичних інтегралів є можливість обчислення їх значень у разі визначення напружень у середині області (у півплощині) у заданих точках розбиття. Особливістю таких обчислень є те, що для побудови 3D-зображення й ізоліній рівня потрібно якісно задати крок розбиття для сітки. Компоненти напружень мають вигляд:

$$\sigma_{xx}(x, y) = -\frac{2y}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(s)(x-s)^2 ds}{[(x-s)^2 + y^2]^2}, \quad \sigma_{yy}(x, y) = -\frac{2y^3}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(s) ds}{[(x-s)^2 + y^2]^2},$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -\frac{2y^2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(s)(x-s) ds}{[(x-s)^2 + y^2]^2}. \quad (13)$$

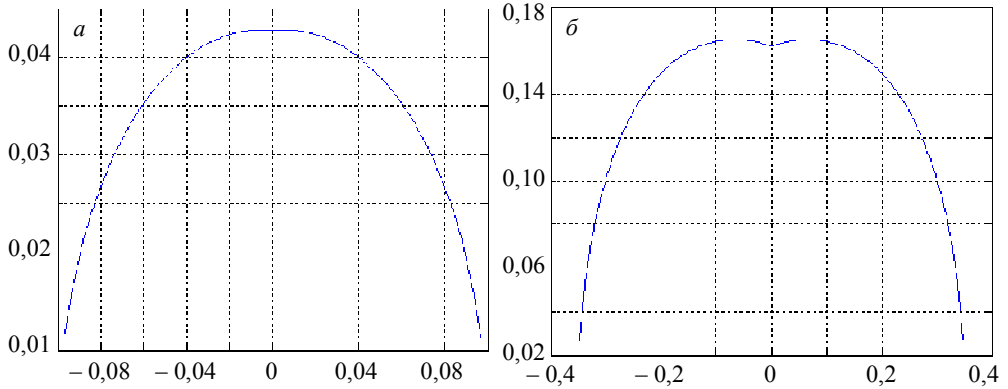


Рис. 1. Контактний тиск для штампа еліптичної форми

Побудову 3D-зображення кожної із компонент напружень було здійснено за допомогою наближеного обчислення інтегралу методом середніх прямокутників у кожній точці розбиття, в якій знаходилося значення еліптичного інтегралу третього роду, будувався ряд інтегральних сум і числове значення інтегралу. Проблемою в таких розрахунках є час отримання зображень, тому що у разі задання великої точності обчислень число операції сумування та добутку зростає в багато разів. Для оптимізації обчислювального процесу було враховано, що контактний тиск разом із підінтегральною функцією в компонентах напружень є парна функція та здійснено відображення точок зображення симетрично щодо осі ординат.

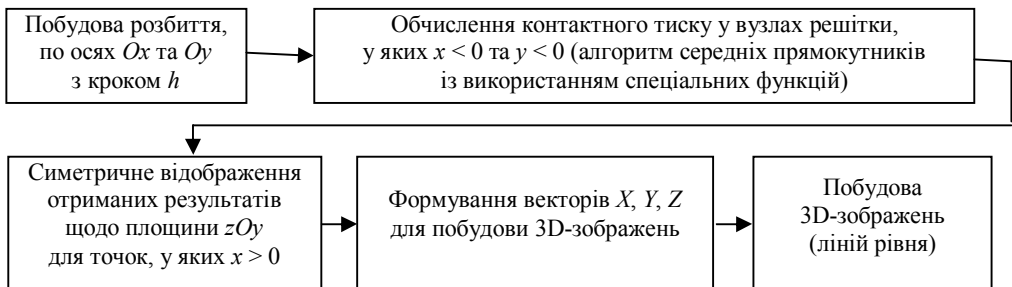


Схема обчислення та побудови компонент напружень у вигляді 3D-зображення й ізоліній рівня

На рис. 2 зображено компоненти напружень для штампа еліптичної форми при  $a/R = 0,5$  і  $\varepsilon = 0,2$  (рис. 2а —  $\sigma_{xx}/E_*$ , рис. 2б —  $\tau_{xy}/E_*$ ).

Для аналізу напружено-деформівного стану в півплощині засобами системи Matlab на основі 3D-графіків було побудовано ізолінії рівня. Можливість побудови таких зображень забезпечує функція  $contour(x,y,z)$ , де вхідні параметри — це масиви даних, отриманих на попередніх кроках. Процес побудови ізоліній рівня можна поділити на 2 етапи: перший етап власне побудови ізоліній

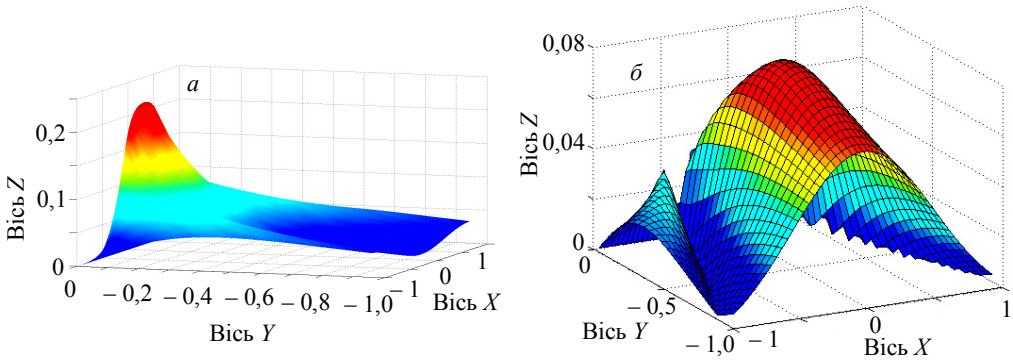


Рис. 2. Компоненти напружень

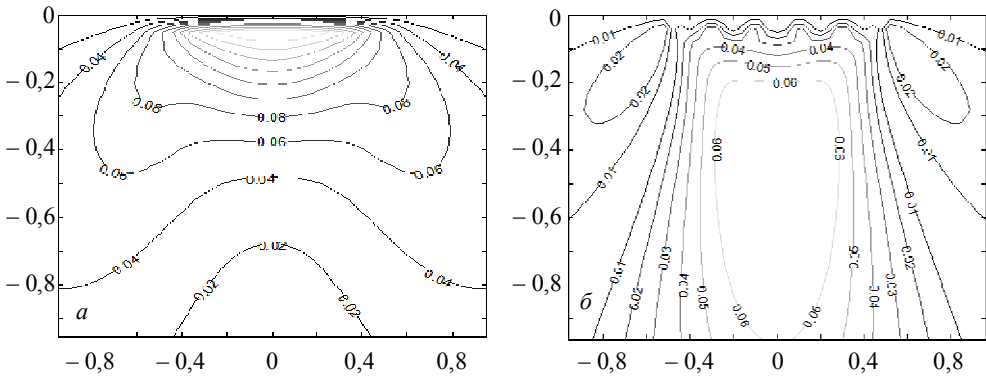


Рис. 3. Компоненти напружень — лінії рівня

із використанням вищеописаних функцій, а другий — це нанесення на лінії рівня числових даних для подальшого їх аналізу. На рис. 3 зображено лінії рівня, які відповідають 3D-зображенням на рис. 2.

**Висновки.** У статті розглянуто основні типи еліптичних інтегралів, через які визначається контактний тиск, особливості вхідних параметрів і розроблено способи обчислення таких інтегралів у всьому діапазоні значень цих параметрів. Із використанням системи Matlab R2013a було розроблено схему обчислення та побудови графіків контактного тиску з використанням спеціальних функцій і вбудованих бібліотек. Також було розроблено та налагоджено схему для обчислення компонент напружень, їх подання у вигляді 3D-зображень та ізолій рівня, що дало змогу визначити зони пластичності та зони пружності у півплощині. Наближені методи обчислень еліптичних інтегралів, їх використання в практичних задачах і графічне подання результатів є актуальною задачею та має окрім контактних задач інші сфери застосування. Зокрема, отримані результати можна використати в теорії електромагнітних полів для обчислень еліптичних інтегралів

третього роду [5], оскільки у вищеописаній задачі про поля напруженості розрахунки зводять до обчислення ряду, який у собі містить повні еліптичні інтеграли третього роду. Ще однією задачею, яка базується на вище описаних результатах, є проблема меридіанного плавання, а саме: визначення навігаційних даних у будь-який момент часу[6].

## Література

- [1] Максимук О. В., Сачук Ю. В. Особливості контактної взаємодії штампів канонічної форми із пружним півпростором // Сучасні проблеми механіки і математики: У 3-х т. / Під заг. ред. Р. М. Кушніра, Б. Й. Пташника. — Львів: Ін-т прикл. Проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2013. — Т. 1. — С. 72-73.
- [2] Кульчицький-Жигайло Р., Роговський Г. Осесиметрична контактна задача про втискування абсолютно жорсткої кулі в пружний півпростір з неоднорідним покривом // Фізико-хімічна механіка матеріалів. — 2009. — Т. 45, № 6. — С. 82-92.
- [3] Приварников А. К., Столярчук І. А. Плоска періодична задача про дію системи гладких штампів на пружну багатоплощину основу // Динамические системы. — 2006. — № 20. — С. 35-42.
- [4] Максимук О. Періодична контактна задача про взаємодію зубчастої та плоскої поверхонь // машинознавство. — 2001. — № 3. — С. 13-17.
- [5] Fontana M. Integration methods for the calculation of the magnetostatic field due to coils // Chalmers Finite Element Center. — 2001. — Vol. 7. — P. 1-30.
- [6] Kos S., Pogany T. On the Mathematics of Navigational Calculations for Meridian Sailing // Electronic Journal of Geography and Mathematics. — 2012. — Vol. 23. — P. 1-19.
- [7] Пелех Б. Л., Максимук А. В., Коровайчук І. М. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. — Киев: Наук. думка. — 1988. — 280 с.
- [8] Корн Г., Корн Т. Справочник по высшей математике для инженеров. — Москва: Наука. — 1974. — 832 с.
- [9] Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матъе. — Москва: Наука. — 1967. — 298 с.
- [10] Fukushima T. Numerical Inversion of General Incomplete Elliptic Integral // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2012. — Vol. 236. — P. 2-39.
- [11] Carlson B. C. Computing Elliptic Integrals by Duplication // Numerische Mathematik. — 1979. — Vol. 33. — P. 1-16.
- [12] David M. MATLAB® Demystified. — New York: Mc Graw Hill, 2007. — 326 p.

## Elliptic integrals of the third kind in problems of contact interaction

Yuriy Sachuk, Oleksandr Maksymuk

*On the example of the problem of contact interaction of stiff punch with elastic half-plane, the problems of computing elliptic integrals of the third kind are considered. The basic techniques for finding approximate values of elliptic integrals for different input parameters in the entire range of their values are represented. Schemes of computing and software modules using special functions and the means of visual display of results are developed to implement mathematical models of contact problems. There are shown new up-to-date examples of problems which are reduced to computing elliptic integrals of the third kind (determination of magnetic field stress and computing trajectories of meridian swimming). A study of the stress-strain state within the half-plane is carried out. 3D-images of stresses and their isolines are drawn, the domains of stress concentration are defined.*

## Эллиптические интегралы третьего рода в задачах контактного взаимодействия

Юрий Сачук, Александр Максимук

*На примере задачи о контактном взаимодействии жесткого штампа с упругой полуплоскостью рассмотрены проблемы вычисления эллиптических интегралов третьего рода. Приведены основные методы для нахождения приближенных значений эллиптических интегралов при различных входных параметрах на всем диапазоне их значений. Построены схемы вычислений и программные модули для реализации математических моделей контактных задач с использованием специальных функций и средств визуального отображения результатов. Приведены новые современные примеры задач, которые сводятся к вычислению эллиптических интегралов третьего рода (нахождения напряженности магнитного поля и вычисления траекторий меридианного плавания). Проведено исследование напряженно-деформированного состояния внутри полуплоскости. Построено 3D-изображение напряжений и их изолинии, определены зоны концентрации напряжений.*

Представлено профессором Т. Нагірним

Отримано 14.07.14