

Контактна задача про взаємодію жорстких штампів із пружною півплощиною, захищеною покриттям Вінклера

Юрій Сачук¹, Олександр Максимук²

¹ Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, проспект Волі, 13, Луцьк, e-mail: sachykyra@gmail.com

² д. ф.-м. н., професор, Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060

Зроблено постановку задач про контактну взаємодію штампів канонічної форми (циліндричної, еліптичної, гіперболічної) з пружною півплощиною, яка захищена пружним шаром Вінклера. Побудована математична модель дає змогу дослідити вплив фізико-механічних властивостей покриттів на процес експлуатації деталей. Побудовано сингулярне інтегро-диференціальне рівняння для визначення контактної тиску між штампом і покриттям. Розроблено методику його розв'язування із використанням поліномів Чебишова, яка зводить задачу до системи лінійних алгебричних рівнянь. Проведено числові розрахунки контактної тиску для фіксованих областей контакту за змінних параметрів, таких як жорсткість покриття та товщина пружного шару Вінклера. Проаналізовано особливості поведінки контактних напружень для великих і малих областей контакту.

Ключові слова: контактна взаємодія, пружна півплощина, покриття Вінклера, сингулярні інтегро-диференціальні рівняння, поліноми Чебишова.

Вступ. У поліграфічній промисловості, авіації, машинобудуванні та інших галузях для підвищення надійності та продуктивності роботи деталей машин використовуються різні технологічні методи і способи захисту від пошкодження та руйнування їх у процесі експлуатації. Одним з основних способів є застосування захисних покриттів у вигляді тонких накладок, напилень і пружних шарів. Наприклад, покриття з нестискуваних еластомерів завдяки своїм властивостям здатні поглинати велику кількість енергії та відновлюватися до попередньої форми [1].

Для моделювання процесу роботи деталей із нанесеними на них тонкими покриттями в даний час продуктивно використовується апарат механіки контактної взаємодії, тому що експериментальне вивчення властивостей покриттів є складною та дорогавартісною технічною задачею. Застосовуються математичні моделі з використанням задач контактної взаємодії штампів різних за формою із півплощиною з покриттям. Як пружний шар у таких задачах часто використовується покриття Вінклера з одним або двома коефіцієнтами постелі. Одними з перших робіт, у яких описані основні співвідношення для покриття Вінклера, є [2, 3]. Дослідження фізичних і механічних властивостей різних композиційних покриттів і сучасні застосування пружного шару Вінклера наведені в роботах [4, 5].

Розвиток досліджень контактних задач із покриттям Вінклера для різних штампів наведено в роботах [6-9]. Основні співвідношення для задач, у яких

контактну взаємодію описано для штампа параболічної форми, наведені в праці [10]. Однак для практичного використання результати таких досліджень є актуальними для циліндричної, еліптичної та гіперболічної форм штампів, які достатньо адекватно моделюють елементи сучасної техніки.

Предметом дослідження цієї статті є півнескінченні тіла з покриттям за їх взаємодії з жорсткими тілами (штампами) та вивчення впливу властивостей покриття на розподіл контактної тиску.

1. Постановка контактної задачі

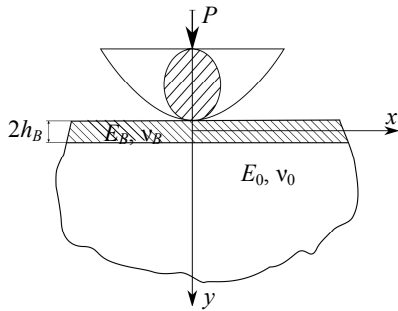


Рис. 1. Модель взаємодії: штамп – покриття – пружна півплощина

Розглядається контактна задача про безфрикційну взаємодію штампів канонічної форми з пружною півплощиною, яка захищена пружним тонким покриттям. Між штампом, покриттям та основою виконуються умови ідеального механічного контакту.

У пружну півплощину з тонким захисним покриттям вдавлюється силою P жорсткий штамп, форма якого задана функцією $f(x)$ (рис. 1). Покриття моделюємо пружним шаром Вінклера із одним коефіцієнтом постелі [10].

Вигляд $f(x)$ для всіх штампів аналогічний, як у роботі [11]:

- параболічної форми $f_1(x) = -x^2 / (2R)$, де R — радіус кривизни в точці $x = 0$;
- циліндричної форми $f_2(x) = -R + \sqrt{R^2 - x^2}$, де R — радіус циліндра;
- еліптичної форми $f_3(x) = -b_1 + \frac{b_1}{a_1} \sqrt{a_1^2 - x^2}$, де a_1, b_1 — велика та мала півосі еліпса, для розрахунків $a_1 = R, b_1 = R(1 \pm \varepsilon)$;
- гіперболічної форми $f_4(x) = b_1 - \frac{b_1}{a_1} \sqrt{a_1^2 + x^2}$ де a_1, b_1 — величини дійсної та уявної півосей гіперболи, для розрахунків $a_1 = R, b_1 = R(1 \pm \varepsilon)$.

Сингулярне інтегро-диференціальне рівняння відповідно до обраної моделі покриття має вигляд [10]:

$$K_B p'(x) - \frac{1}{\pi \theta} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\rho(\xi)}{\xi - x} d\xi = -f'(x), \quad |x| \leq a, \quad (1)$$

де $p(x)$ — контактний тиск, $2a$ — ширина ділянки контакту, $\theta = E_0 / \left[2(1 - \nu_0^2) \right]$,

$K_B = 2h_B(1 - 2\nu_B)(1 + \nu_B) / [E_B(1 - \nu_B)]$ — коефіцієнт Вінклера, E_B, E_0, ν_B, ν_0 — модулі пружності та коефіцієнти Пуассона шару Вінклера і пружної півплощини відповідно.

Умова рівноваги штампу має вигляд:

$$P = \int_{-a}^a p(x) dx . \quad (2)$$

2. Алгоритм розв'язування інтегро-диференціального рівняння

Для зручності розв'язування інтегрального рівняння (1) і в подальших обчисленнях введемо безрозмірні величини $\bar{x} = x/a$, $\bar{p} = p/\theta$, $\bar{h}_B = (h_B/R)/(a/R)$, $\bar{P} = P/(a\theta)$ (рисочки надалі опускаємо). Відповідно до введених позначень рівняння (1) набуде вигляду:

$$p'(x) - \lambda \int_{-1}^1 \frac{p(\xi)}{\xi - x} d\xi = -\frac{a}{R} \lambda \pi f'(x), \quad (3)$$

де $\lambda = a/(\pi\theta K_B)$.

Перші дослідження сингулярного рівняння вигляду (3) з використанням теорії потенціалів наведено в роботі [12].

Для розв'язування рівняння (3) використаємо метод ортогональних поліномів Чебишева першого $T_n(x)$ і другого $U(x)$ роду, згідно з яким контактний тиск шукатимемо у вигляді роду:

$$p(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m} U_{2m}(x). \quad (4)$$

Похідна контактного штампу (4) має вигляд:

$$p'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m} (2m+1) T_{2m+1}(x). \quad (5)$$

Для подальших міркувань використовуємо формулу спектрального співвідношення для поліномів Чебишева й умову ортогональності поліномів Чебишева першого роду [13]:

$$\int_{-1}^1 \frac{U_{2m}(x) \sqrt{1-x^2}}{\xi - x} d\xi = -\pi T_{2m+1}(x), \quad \int_{-1}^1 \frac{T_{2m+1}(x) T_{2k+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & m \neq k, \\ \pi/2, & m = k. \end{cases} \quad (6)$$

Підставивши формули (4) та (5) в інтегральне рівняння (3) і використовуючи властивості (6), отримаємо таке співвідношення:

$$-\sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) b_{2m} \frac{T_{2m+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \lambda \pi \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m} T_{2m+1}(x) = \lambda \pi a f'(x). \quad (7)$$

Домножаючи рівність (7) на $T_{2k+1}(x)$ $k=0, 1, 2, \dots$ та інтегруючи її по x від -1 до $+1$, отримуємо систему лінійних алгебричних рівнянь стосовно невідомих коефіцієнтів b_{2m} :

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m} \int_{-1}^1 T_{2m+1}(x) T_{2k+1}(x) dx - \frac{2k+1}{2\lambda} b_{2k} = -\frac{a}{R} \int_{-1}^1 f'(x) T_{2k+1}(x) dx, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

У матричному вигляді система буде мати вигляд:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{C}, \quad (9)$$

де $\mathbf{X} = X(b_{20}, b_{21}, b_{22}, \dots)$.

Матриці \mathbf{A} та \mathbf{C} мають вигляд:

$$\mathbf{A} = \begin{cases} a_{mm} = \int_{-1}^1 T_{2m+1}(x) T_{2m+1}(x) dx - \frac{2k+1}{2\lambda}, \\ a_{mk} = \int_{-1}^1 T_{2m+1}(x) T_{2k+1}(x) dx, \end{cases} \quad (10)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}(c_0, c_1, \dots, c_i, \dots), \quad c_k = -\frac{a}{R} \int_{-1}^1 f'(x) T_{2k+1}(x) dx, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

Для розв'язування системи (9) було використано бібліотеки лінійної алгебри (Matlab з вбудованим пакетом Lapack і програму Wolfram Mathematica) із системною функцією $mldivide(A, C)$, в якій A — квадратна матриця (10), C — вектор стовпець (11). Для обчислення визначених інтегралів у співвідношеннях (10) та (11) було використано квадратурний метод трапецій, який реалізований за допомогою системних бібліотек чисельного інтегрування, з використанням функції $trapz(u, v)$, в якій u — межі інтегрування, v — підінтегральна функція. Для обчислення інтегралів з точністю до 10^{-6} було використано метод подвійного перерахунку.

У ході числового експерименту було виявлено, що для побудови ряду (4) при малих $(a/R) \in [0, 1; 0, 5]$ достатньо, щоб система (9) мала не менше двадцяти рівнянь для збереження заданої точності для всіх штампів.

При $a/R \geq 0, 5$ для штампів скінченної форми кількість рівнянь має бути не менше тридцяти п'яти для забезпечення похибки результатів 10^{-5} . Для побудови графіків контактного тиску було обрано розмірність (9) п'ятдесят рівнянь, така кількість рівнянь є нижньою межею, яка дозволяє знехтувати похибкою обчислень.

3. Числові результати та аналіз особливостей контактного тиску

Варто зазначити, що за малих співвідношень $(a/R) \in [0, 1; 0, 3]$ контактний тиск для всіх штампів практично співпадає з контактним тиском для штампа параболічної форми. Вплив товщини покриття на розподіл контактного тиску показано рис. 2.

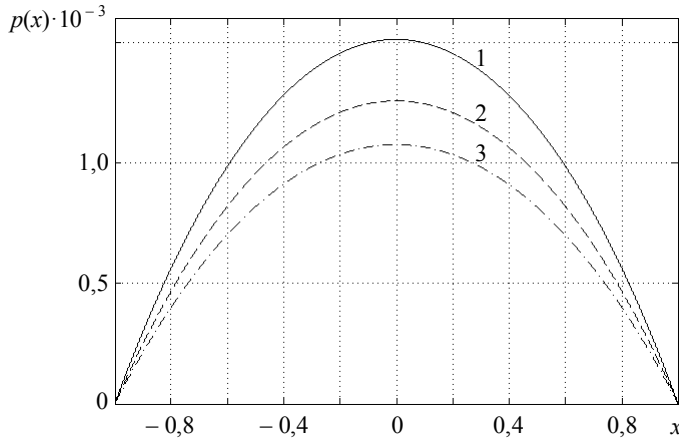


Рис. 2. Контактний тиск для штампа циліндричної форми для різної товщини шару Вінклера h_B

На рис. 2 наведено графіки контактного тиску для штампа циліндричної форми для області контакту $a/R = 0,1$; $E_B/E_0 = 0,9$, за різної товщини шару Вінклера h_B і відповідній притискаючій силі P . Крива 1 на рис. 2 відповідає значенню $h_{B1} = 1$ $P_1 = 0,002$; крива 2 — $h_{B2} = 1,2$; $P_2 = 0,0017$; крива 3 — $h_{B3} = 1,4$; $P_3 = 0,0015$.

З рис. 2 видно, що у разі збільшення товщини шару Вінклера концентрація контактних напружень зменшується.

Важливим фактором під час дослідження контактних задач такого типу для штампа еліптичної форми є співвідношення величини півосей: a_1, b_1 — велика та мала півосі еліпса. На рис. 3 наведено графік розподілу контактного тиску для штампа еліптичної форми при $a/R = 0,1$; $E_B/E_0 = 0,9$; $h_B = 1$ для різних ε і відповідній силі P , прикладеній до штампа.

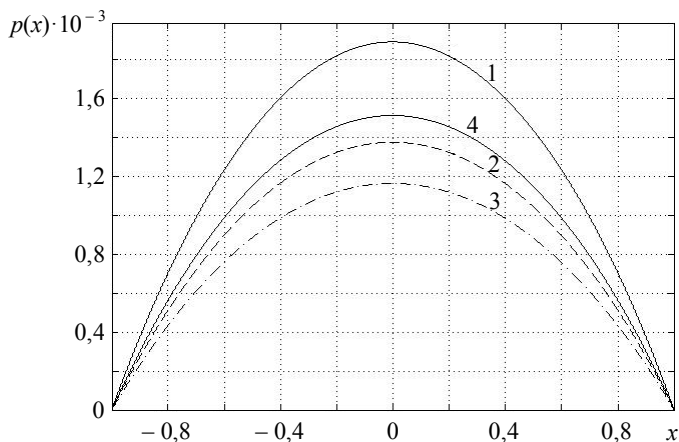


Рис. 3. Контактний тиск для штампа еліптичної форми для різних ε

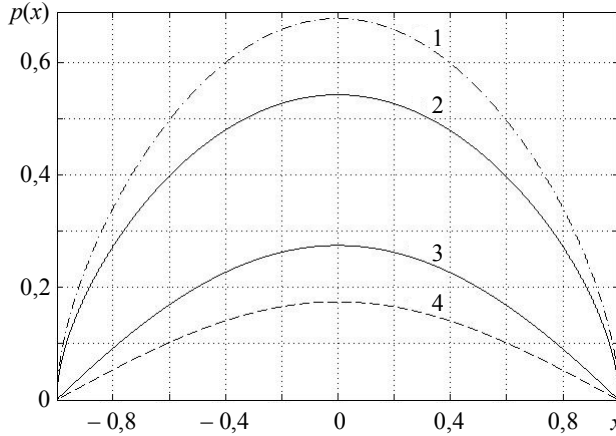


Рис. 4. Контактний тиск для всіх штампів канонічної форми при $a/R = 0,5$; $E_B/E_0 = 0,9$; $h_B = 2$ (1 — еліптична форма, 2 — циліндрична форма, 3 — параболічна форма, 4 — гіперболічна форма штампів, для гіперболічної форми штампів $\varepsilon = 0,3$, для еліптичної — $\varepsilon = -0,2$)

Крива 1 на рис. 3 відповідає значенню $\varepsilon_1 = -0,2$; $P_1 = 0,0025$; крива 2 — $\varepsilon_2 = 0,1$; $P_2 = 0,0019$; крива 3 — $\varepsilon_3 = 0,3$; $P_3 = 0,0016$, крива 4 — $\varepsilon_4 = 0$; $P_4 = 0,00201$.

Важливо зазначити, що при $a/R \leq 0,5$ форма штампів не суттєво впливає на розподіл контактної тиску, що доводить рис. 4.

Крива 1 на цьому рис. 4 відповідає значенню прикладеної сили $P_1 = 0,9520$; крива 2 — $P_2 = 0,7945$; крива 3 — $P_3 = 0,3878$, крива 4 — $P_4 = 0,3108$.

При $a/R > 0,5$ форма штампів суттєво впливає на розподіл контактної тиску для штампів скінченної форми (див. рис. 5).

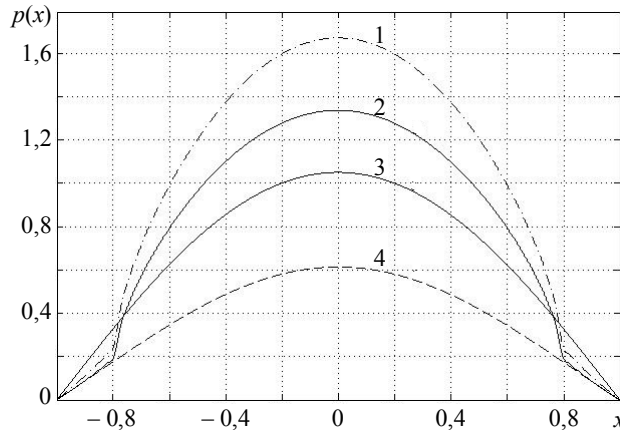


Рис. 5. Контактний тиск для всіх штампів канонічної форми при $a/R = 0,8$; $E_B/E_0 = 0,9$; $h_B = 2$ (1 — еліптична форма, 2 — циліндрична форма, 3 — параболічна форма, 4 — гіперболічна форма штампів, для гіперболічної форми штампів $\varepsilon = 0,3$, для еліптичної — $\varepsilon = -0,2$)

Крива 1 на рис. 5 відповідає значенню прикладеної сили: $P_1 = 2,0526$; крива 2 — $P_2 = 1,6421$; крива 3 — $P_3 = 1,3424$, крива 4 — $P_4 = 0,7623$.

Графіки рис. 4 та 5 показують, що величина a/R суттєво впливає на розподіл контактного тиску, особливо для штампів скінченної форми. Однак, для тіл з покриттям контактний тиск для штампів циліндричної й еліптичної форми немає концентрації напружень біля країв області контакту (див. працю [11]).

Особливістю запропонованої методики розв'язування є те, що для числових розрахунків спочатку задається співвідношення a/R , а з рівняння рівноваги (2) визначається притискаюча сила P (напівобернена задача). Для знаходження реальної довжини ділянки контакту використовується знайдений контактний тиск (1); сила P та розмірне рівняння (2) (підбираємо величину пів довжини ділянки контакту a для задоволення умови рівноваги (2)).

Висновки. Задачу про контактну взаємодію жорсткого штампа канонічної форми із пружною півплощиною, яка захищена тонким пружним шаром Вінклера, зведено до сингулярного інтегро-диференціального рівняння. Розвинуто методику розв'язування цього рівняння з використанням поліномів Чебишова. Побудовано числові розв'язки для штампів циліндричної, гіперболічної й еліптичної форми.

Побудовано графіки контактних тисків для таких штампів при різних товщинах шару Вінклера, співвідношеннях пружних характеристик системи покриття – основа та величині навантаження. Виявлено, що за збільшення товщини шару Вінклера концентрація контактних напружень зменшується, при $a/R > 0,5$ форма штампу суттєво впливає на розподіл контактного тиску. Поданий розв'язок дасть змогу проводити аналіз напружено-деформованого стану контактної пари, а також прогнозувати її ресурс.

Література

- [1] *Holmberg K., Matthews A.* Coatings tribology Properties, mechanisms, techniques and applications in surface engineering. Second Edition. — The University of Sheffield UK, 2009. — 549 p.
- [2] *Власов В. З., Леонтьев Н. Н.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании. — Москва: Физматгиз, 1960. — 491 с.
- [3] *Киселев В. А.* Расчет пластин. — Москва: Стройиздат, 1973. — 151 с.
- [4] *Erdogan F., Guler M. A.* Contact Mechanics of FGM Coatings. — Lehigh University Bethlehem, 2000. — 276 p.
- [5] *Whitehouse D. J.* Handbook of Surface and Nanometrology, Second Edition. — University of Warwick Coventry UK, 2011. — 957 p.
- [6] *Hlavacek M.* Elliptical contact on elastic incompressible coatings // Engineering mechanics. — 2008. — Vol. 15. — P. 249-261.
- [7] *Kahya V., Birinci A., Erdol R.* Frictionless contact problem between two orthotropic elastic layers // World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Civil, Architectural, Structural and Construction Engineering. — 2007. — Vol. 1. — P. 7-13.
- [8] *Oner E., Yaylaci M., Birinci A.* Receding contact problem for two elastic layers resting on a Winkler foundation // 2nd International Balkans Conference on Challenges of Civil Engineering. — Albania, 2013. — P. 458-466.
- [9] *Argatov I.* Contact problem for a thin elastic layer with variable thickness: Application to sensitivity analysis of articular contact mechanics // Applied Mathematical Modelling. — 2013. — Vol. 37. — P. 8383-8393.

- [10] Максимук О. В., Махніцький Р. М., Щербина Н. М. Математичне моделювання та методи розрахунку тонкостінних композитних конструкцій. — Львів: Національна академія наук України. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2005. — 396 с.
- [11] Сачук Ю. В., Максимук О. В. Еліптичні інтеграли третього роду в задачах контактної взаємодії // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2014. — Вип. 20. — С. 180-187.
- [12] Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. — Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1949. — 270 с.
- [13] Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 480 с.

Contact problem of the interaction of hard stamps with elastic half-plane surface protected by Winkler covering

Yuriy Sachuk, Oleksandr Maksymuk

Formulation of the problems of contact interaction of stamps of canonical form (cylindrical, elliptical, hyperbolic) with an elastic half-plane, which is protected by an elastic layer of Winkler is done. The constructed mathematical model allows us to investigate the influence of physical and mechanical properties of the covering on the process of exploitation of the components. A singular integrodifferential equation to determine the contact pressure between the stamp and the covering is constructed. The method of its solving using Chebyshev polynomials, which reduces the problem to the system of linear algebraic equations is developed. Numerical calculations of the contact pressure for fixed contact areas at variable parameters (covering hardness and thickness of Winkler elastic layer) are carried out. The behavior of contact stresses for large and small areas of contact are analyzed.

Контактная задача о взаимодействии жестких штампов с упругой полуплоскостью, защищенной покрытием Винклера

Юрий Сачук, Александр Максимук

Сделано постановку задач о контактном взаимодействии штампов канонической формы (цилиндрической, эллиптической, гиперболической) с упругой полуплоскостью, которая защищена упругим слоем Винклера. Построена математическая модель позволила исследовать влияние физико-механических свойств покрытий на процесс эксплуатации деталей. Построено интегро-дифференциальное сингулярное уравнение для определения контактного давления между штампом и покрытием. Разработана методика его решения с использованием полиномов Чебышева, которая сводит задачу к системе линейных алгебраических уравнений. Проведены численные расчеты контактного давления для фиксированных областей контакта при переменных параметрах жёсткости покрытия и толщины упругого слоя Винклера. Обнаружено и проведен анализ особенностей поведения контактных напряжений для больших и малых областей контакта.

Представлено доктором фізико-математичних наук Р. Мартиняком

Отримано 12.08.15