

Є. С. Лапшин¹, д.т.н., пров.н.с., ORCID 0000-0002-5443-5566

О. І. Шевченко¹, д.т.н., с.н.с., ORCID 0000-0003-2630-0186

¹ *Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України*

ВИЗНАЧЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ ГАСИТЕЛЯ НИЗЬКОЧАСТОТНИХ КОЛИВАНЬ ВЕЛИКОГАБАРИТНИХ ІНЖЕНЕРНИХ СПОРУД

Анотація. Стаття спрямована на визначення раціональних параметрів гасителя низькочастотних коливань з тілами кочення, які мають просту конструкцію і високу надійність. Параметри гасителя повинні бути такими, щоб його частота була близька до частоти основного тону коливань споруди. Для цього визначають власну частоту гасителя коливань у припущенні про децицію амплітуди коливань, що дозволяє лінеаризувати рівняння руху. При великих амплітудах нелінійне диференціальне рівняння руху вирішують чисельними методами, які дозволяють знайти лише приватні рішення для конкретних умов. Виникає необхідність узагальнення приватних рішень. Для цього розглянуто один із найпростіших гасителів, який складався з однорідного циліндра та поглиблення (осі циліндра та поглиблення паралельні). Припущено, що відсутні дисипація енергії та прослизання. Циліндр робить вільні коливання, які описуються нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку. В результаті обчислень визначено власну частоту та період власних коливань лінеаризованої системи. Потім із умови збереження енергії визначено власну частоту з урахуванням нелінійності системи. В результаті чисельного інтегрування методом Ньютона-Котеса отримано залежність відносної власної частоти та похибки, зумовленої лінеаризацією диференціального рівняння руху циліндра від амплітуди. Аналіз залежності демонструє характерну властивість нелінійних систем – неізохронність. При лінеаризації збільшення амплітуди коливань призводить до квадратичного зростання відносної похибки. В результаті апроксимації чисельних результатів в інтервалі значень кута, який відраховувався від вертикалі, що проходить через центр кривизни западини, від 10 до 90⁰ отримано залежності визначення відносної власної частоти і похибки. З метою визначення точності одержаних залежностей виконано порівняння з апроксимаціями, отриманими іншими методами. З порівняння випливає, що максимальна відносна похибка 0,216039 отриманої залежності менше, ніж у отриманих іншими методами – 0,272803, при цьому обчислення простіше. В результаті обчислень та аналізу встановлено наступне. Вплив амплітуди вільних коливань на частоту характеризується відносною власною частотою, що показує у скільки разів частота власних коливань лінеаризованої системи більша за частоту коливань нелінійної системи. Відносна частота залежить тільки від амплітуди коливань. При нелінійних коливаннях математичного маятника і

циліндра їх відносні власні частоти описуються тієї ж функцією. Це дозволило для циліндра використовувати методи апроксимації, розроблені для маятника. Відносну власну частоту коливань циліндра визначено в результаті апроксимації чисельного інтегрування, а також методом гармонійного балансу. Максимальна відносна похибка першого методу (0,22%) менша, ніж у другого (0,27%), при цьому обчислення простіше. Похибка, яка обумовлена лінеаризацією диференціального рівняння руху циліндра, квадратично зростає зі збільшенням амплітуди коливань.

Ключові слова: гаситель низькочастотних коливань, великогабаритні інженерні споруди, чисельні експерименти, раціональні параметри гасителя, власна частота гасителя коливань, амплітуда коливань.

Посилання для цитування: Лапшин Є. С., Шевченко О. І. Визначення раціональних параметрів гасителя низькочастотних коливань великогабаритних інженерних споруд. *Фундаментальні та прикладні проблеми чорної металургії*. 2023. Вип. 37. С. 578-587. <https://doi.org/10.52150/2522-9117-2023-37-578-587>

Сучасний стан проблеми. Динамічні гасителі коливань широко використовуються для зниження навантажень у різних механізмах та інженерних спорудах [1]. Для великогабаритних споруд: опори вітроелектричних установок, висотні будинки, антени, радіотелевізійні вежі, димові та витяжні труби, перекриття, трибуни, пішохідні мости і т. п. - Характерні низькочастотні власні коливання (менше 10 Гц, а нерідко і менше 1 Гц [2, 3]). У цьому випадку застосовують гасителі коливань з тілами кочення [2—], які мають просту конструкцію і високу надійність. Їхній огляд наведено в роботах [2, 6]. Параметри гасника повинні бути такими, щоб його частота була близька до частоти основного тону коливань споруди [2]. І тому важливо знати власну частоту гасителя коливань. Власну частоту, як правило, визначають у припущенні про децицію амплітуди коливань, що дозволяє лінеаризувати рівняння руху. При великих амплітудах нелінійне диференціальне рівняння руху вирішують чисельними методами, які, проте, дозволяють знайти лише приватні рішення для конкретних умов. Виникає необхідність узагальнення приватних рішень.

Метою роботи є визначення раціональних параметрів динамічного гасителя коливань, виконаного у вигляді циліндра, що знаходиться в поглибленні, що забезпечують необхідну власну частоту нелінійних коливань.

Основні результати наукових досліджень. Розглянемо один із найпростіших гасників [6], що складається з однорідного циліндра 1 і поглиблення 2 (рис. 1). Осі циліндра та поглиблення паралельні.

Припустимо, що відсутні дисипація енергії та прослизання.

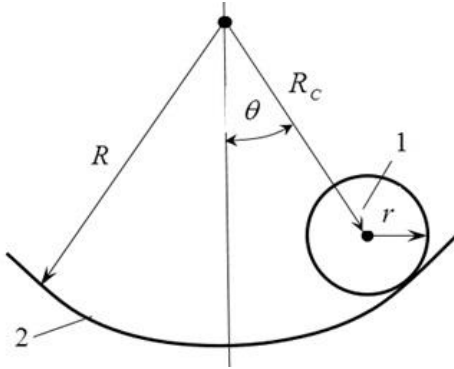


Рисунок 1 – Розрахункова схема гасителя коливань:
1 – циліндр; 2 – поглиблення.

Циліндр здійснює вільні коливання, що описуються нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку [7].

$$(R - r)\ddot{\theta} + \frac{2}{3}g \sin \theta = 0, \quad (1)$$

де R і r – радіуси западини та циліндра; θ – кут, який відраховується від вертикалі, що проходить через центр кривизни западини; g – прискорення вільного падіння. Крапка над літерами означає диференціювання за часом. Початкові умови: $\theta = \theta_0$ і $\dot{\theta} = 0$. Оскільки дисипація не враховується, то θ_0 – амплітуда власних коливань. Нелінійність рівняння обумовлена $\sin \theta$.

Рівняння (1) запишемо у такому вигляді

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{3R_c} \sin \theta = 0, \quad (2)$$

де $R_c = R - r$ – радіус кривизни траєкторії центру мас циліндра.

Власна частота лінеаризованої системи. Нелінійне рівняння (2) не має аналітичного рішення. Для його лінеаризації припускають, що кут θ малий і приймають $\sin \theta \approx \theta$. В результаті одержують [1]

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0,$$

де $\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{3R_c}}$ – власна кругова частота.

Тоді частота та період власних коливань

$$v_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{3R_c}},$$

$$T_0 = \frac{1}{v_0} = 2\pi \sqrt{\frac{3R_c}{2g}}.$$

Власна частота нелінійної системи. З умови збереження енергії маємо

$$E + U = U_0, \quad (3)$$

де $E = \frac{3}{4}mR_c^2\dot{\theta}^2$ – кінетична енергія циліндра [7]; $U = -mgR_c \cos \theta$ – потенційна енергія циліндра [7]; U_0 – потенційна енергія при θ_0 .

Повна механічна енергія циліндра у процесі руху зберігається і дорівнює її початковому значенню (наслідок консервативності).

З (3) визначимо швидкість

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{4g(\cos \theta - \cos \theta_0)}{3R_c}}.$$

Циліндр відхиляється на кут $d\theta$ за час

$$dt = \frac{d\theta}{\dot{\theta}}. \quad (4)$$

Інтегруючи обидві частини рівняння (4) та враховуючи $\nu = 1/T$, визначимо власну частоту ν з урахуванням не лінійності

$$\nu = \frac{1}{4 \int_0^{\theta_0} \sqrt{\frac{3R_c}{4g(\cos \theta - \cos \theta_0)}} d\theta}. \quad (5)$$

Для обліку впливу амплітуди коливань обчислимо відносну власну частоту [9, 10]

$$\nu^* = \frac{\nu_0}{\nu} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta_0} \sqrt{\frac{1}{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}} d\theta. \quad (6)$$

Акцентуємо увагу на тому, що ν^* не залежить від радіусів циліндра та западини.

За допомогою формули косинуса подвійного кута

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad \text{вираз (6) перетворимо на вигляд}$$

$$v^* = \frac{1}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} d\theta. \quad (7)$$

Отримано еліптичний інтеграл першого роду, який виражається в елементарних функціях [11]. Результати чисельного інтегрування шляхом Ньютона-Котеса представлені на рис. 2. Тут же показані відносні похибки, зумовлені лінеаризацією рівняння (2)

$$\delta = \frac{v_0 - v}{v_0} \cdot 100\% = \left(1 - \frac{1}{v^*}\right) 100\%.$$

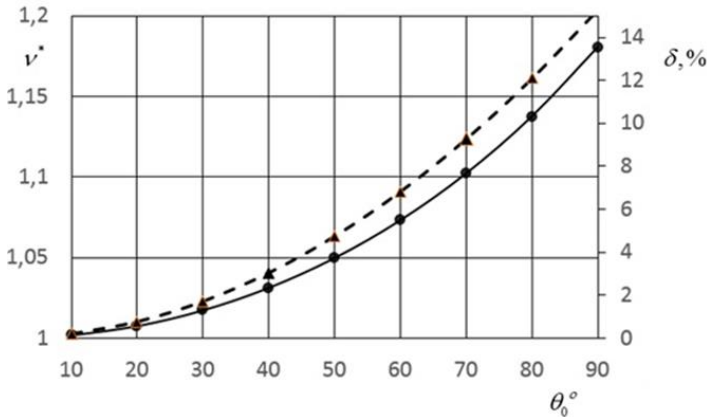


Рисунок 2 – Залежність відносної власної частоти (суцільна лінія) та похибки δ (пунктир) від амплітуди θ_0 .

Графік демонструє характерну властивість нелінійних систем – неізохронність. При лінеаризації збільшення амплітуди коливальних процесів призводить до квадратичного зростання відносної похибки.

Внаслідок апроксимації чисельних результатів в інтервалі $10^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$ отримані наступні залежності:

$$v^* = 2,59 \cdot 10^{-5} \cdot \theta_0^2 - 4 \cdot 10^{-4} \cdot \theta_0 + 1,004 \quad (8)$$

$$\delta = 1,9 \cdot 10^{-3} \cdot \theta_0^2 - 2 \cdot 10^{-4} \cdot \theta_0 - 6,28 \cdot 10^{-2}.$$

З метою визначення точності формули (8) порівняно з апроксимаціями, виконаними іншими методами, обчислимо відносну частоту математичного маятника.

У роботах [11–13] розглянуто вільні коливання математичного маятника. Отримано такі залежності:

$$\ddot{\theta} + \omega_{m0}^2 \theta = 0,$$

$$\dot{\theta}_m = \sqrt{\frac{2g(\cos \theta - \cos \theta_0)}{l}},$$

де $\omega_{m0} = \sqrt{\frac{g}{l}}$; l – довжина маятника.

Інтегруючи обидві частини рівняння (4) та враховуючи m .
Скориставшись залежностями (5) – (7), отримаємо

$$v_{m0} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$v_m = \frac{1}{4 \int_0^{\theta_0} \sqrt{\frac{l}{2g(\cos \theta - \cos \theta_0)}} d\theta}$$

$$v_m^* = \frac{v_{m0}}{v_m} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} d\theta.$$

Таким чином, незважаючи на відмінність власних кругових частот коливань циліндра та маятника, відносні власні частоти у них рівні. Це дозволяє застосувати результати, отримані для маятника [11] і тому далі індекс m не використовується.

У роботі [11] для апроксимації періоду коливань синус замінений рядом Маклорена

$$\sin \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1},$$

де n – цілі позитивні числа.

Застосовуючи метод гармонійного балансу, визначено період нелінійних коливань [11]

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \frac{10}{3072} \theta_0^4 + \frac{130}{737280} \theta_0^6 + \frac{13384}{1321205760} \theta_0^8 + \dots \right). \quad (9)$$

Враховуючи (9) і що $\nu = 1/T$, відносну власну частоту запишемо у вигляді ряду

$$\nu_h^* = 1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \frac{10}{3072} \theta_0^4 + \frac{130}{737280} \theta_0^6 + \frac{13384}{1321205760} \theta_0^8 + \dots \quad (10)$$

Тут індекс h символізує застосування методу гармонійного балансу.

У таблиці 1 наведено результати розрахунків відносних власних частот, виконаних за формулами (8) та (10), а також за формулою

$$v_e^* = 1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \frac{11}{3072}\theta_0^4 + \frac{173}{737280}\theta_0^6 + \frac{22931}{1321205760}\theta_0^8 + \dots, \quad (11)$$

отриманої внаслідок подання еліптичного інтеграла у вигляді ряду. Тут же наведено відносні похибки $\Delta = (v_e^* - v_h^*)100/v_e^*$ у порівнянні з v_e^* , прийнятої в роботі [11] як «точна».

Таблиця 1 – Результати обчислень відносних власних частот за формулами (8), (10) і (11).

θ_0 , градус	v^* (8)	v_h^* (10)	v_e^* (11)	$\Delta, \%$ v_h^*	$\Delta, \%$ v^*
10	1,00259	1,00191	1,00191	0,0	-0,06787
20	1,00636	1,00766	1,00767	0,0	0,129012
30	1,01531	1,01738	1,01741	0,002949	0,206406
40	1,02944	1,03126	1,03134	0,007757	0,184226
50	1,04875	1,04957	1,04978	0,020004	0,098116
60	1,07324	1,07270	1,07318	0,044727	-0,00559
70	1,10291	1,10118	1,10214	0,087103	-0,06986
80	1,13776	1,13569	1,13749	0,158243	-0,02374
90	1,17779	1,17712	1,18034	0,272803	0,216039

Примітка: Результати обчислень v_h^* і v_e^* наведені у роботі [11].

З таблиці випливає, що максимальна відносна похибка 0,216039 формули (8) менше, ніж у формули (10) – 0,272803, при цьому обчислення простіше.

Висновки

1. Вплив амплітуди вільних коливань на частоту характеризується відносною власною частотою, що показує у скільки разів частота власних коливань лінеаризованої системи більша за частоту коливань нелінійної системи. Відносна частота залежить тільки від амплітуди коливань.

2. Встановлено, що з нелінійних коливаннях математичного маятника і циліндра їх відносні власні частоти описуються тієї ж функцією. Це дозволило для циліндра використовувати методи апроксимації, розроблені для маятника.

3. Відносну власну частоту коливань циліндра визначено в результаті апроксимації чисельного інтегрування, а також методом гармонійного балансу. Максимальна відносна похибка першого методу (0,22%) менша, ніж у другого (0,27%).

4. Похибка, обумовлена лінеаризацією диференціального рівняння руху циліндра, квадратично зростає зі збільшенням амплітуди коливань.

Перелік посилань

1. Челомей В. Н. *Вибрации в технике*. Том 6. Защита от вибрации и ударов. 1981. URL: <http://www.zodchii.ws/books/info-1224.html>
2. Legeza V. P. Dynamics of vibroprotective systems with roller dampers of low-frequency vibrations. *Strength of Materials*. 2004. № 2 (36). P. 186–194.
3. Takei H., Shimazaki Y. Vibration control effects of tuned cradle damped mass damper. *Journal of Applied Mechanics*. 2010. №13. P. 587–594.
4. Legeza V. P. Cycloidal pendulum with a rolling cylinder. *Mechanics of Solids*. 2012. Vol. 47, № 4. P. 380–384.
5. Obata M., Shimazaki Y. Optimum parametric studies on tuned rotary-mass damper. *Journal of Vibration and Control*. 2008. № 14. P. 867–884.
6. Bransch M. Unbalanced oil filled sphere as rolling pendulum on a flat surface to damp horizontal structural vibrations. *Journal of Sound and Vibration*. 2016. № 368. P. 22–35.
7. Rolling cylinder inside a fixed tube. URL: <https://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-003j-dynamics-and-control-i-spring-2007/lecture-notes/lec12.pdf>
8. Лапшин Е. С., Блюсс Б. А., Дзюба С. В. Определение рациональных параметров динамического гасителя низкочастотных колебаний. *Геотехнічна механіка*. 2018. № 139. С. 23–30.
9. Лапшин Е. С., Молчанов Р. Н., Милейковский М. Ю., Блюсс Б. А. Обобщение численного моделирования нелинейных колебаний полушара на плоскости. *Вісник Дніпровського університету. Серія: Механіка*. 2018. Т. 26. №. 22. С. 103-108.
10. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.. Специальные функции, формулы, графики, таблицы. *Directmedia*. 2016. 343 с. ISBN 5447580129, 9785447580124. URL: <https://read.in.ua/book142403/>
11. Belendez A., Hernandez A., Marquez A., Belendez T., Neipp C. Analytical approximations for the period of non-linear pendulum. *European Journal of Physics*. 2006. V. 27, Iss. 3. P. 539-551.
12. Павловский М. А. Теоретична механіка: Підруч. К. : Техніка. 2002. 512 с.
13. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Про рух математичного маятника. *Вісник НТУ «ХШ»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків : НТУ «ХШ». 2017. № 30 (1252). С. 81-86.

References

1. Chelomey V. N. Vibrations in technology. Volume 6. Protection against vibration and shock. [Vibratsii v tekhnike. Tom 6. Zashchita ot vibratsii i udarov]. 1981. Available at: <http://www.zodchii.ws/books/info-1224.html>
2. Legeza V. P. Dynamics of vibroprotective systems with roller dampers of low-frequency vibrations. *Strength of Materials*. 2004. №2 (36). P. 186–194.
3. Takei H., Shimazaki Y. Vibration control effects of tuned cradle damped mass damper. *Journal of Applied Mechanics*. 2010. №13. P. 587–594.
4. Legeza V. P. Cycloidal pendulum with a rolling cylinder. *Mechanics of Solids*. 2012. Vol. 47, №4. P. 380–384.
5. Obata M., Shimazaki Y. Optimum parametric studies on tuned rotary-mass damper. *Journal of Vibration and Control*. 2008. №14. P. 867–884.

6. Bransch M. Unbalanced oil filled sphere as rolling pendulum on a flat surface to damp horizontal structural vibrations. *Journal of Sound and Vibration*. 2016. №368. P. 22–35.

7. Rolling cylinder inside a fixed tube. Available at: <https://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-003j-dynamics-and-control-i-spring-2007/lecture-notes/lec12.pdf>.

8. Lapshin E. S., Blyuss B. A., Dzyuba S. V. Determination of rational parameters of a dynamic damper of low-frequency vibrations. [Determination of rational parameters of a dynamic damper of low-frequency vibrations]. *Geotechnical mechanics*. 2018. No. 139. pp. 23–30.

9. Lapshin E. S., Molchanov R. N., Mileikovskiy M. Yu., Blyuss B. A. Generalization of numerical modeling of nonlinear oscillations of a hemisphere on a plane. [Obobshcheniye chislennogo modelirovaniya nelineynykh kolebaniy polushara na ploskosti]. *Bulletin of Dnipro University. Series: Mechanics*. 2018. Vol. 26. No. 22. pp. 103-108.

10. Janke E., Emde F., Lesch F. Special functions, formulas, graphs, tables. [Spetsial'nyye funktsii, formuly, grafiki, tablitsy]. *Directmedia*. 2016. 343 c. ISBN 5447580129, 9785447580124. Available at: <https://read.in.ua/book142403/>

11. Belendez A., Hernandez A., Marquez A., Belendez T., Neipp C. Analytical approximations for the period of non-linear pendulum. *European Journal of Physics*. 2006. V. 27(3). P. 539-551.

12. Pavlovskiy M. A. Theoretical mechanics: Textbook. [Teoretychna mekhanika: Pidruchnyk.]. K.: Technology. 2002. 512 p.

13. Olshansky V. P., Olshansky S. V. About the collapse of the mathematical pendulum. [Pro rukh matematychnoho mayatnyka]. Newsletter of NTU "HS". Series: Mathematical modeling in engineering and technology. Kharkiv: NTU "KhSh". 2017. No. 30 (1252). pp. 81-86.

E. S. Lapshin¹, D. Sc. (Tech.), Leading Researcher, ORCID 0000-0002-5443-5566

O. I. Shevchenko¹, D. Sc. (Tech.), Senior Researcher, ORCID 0000-0003-2630-0186

¹*M. S. Poliakov Institute of Geotechnical Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine*

DETERMINATION OF THE RATIONAL PARAMETERS OF THE LOW-FREQUENCY OSCILLATION DAMPER OF LARGE-SIZED ENGINEERING STRUCTURES

Abstract. The article is aimed at determining the rational parameters of a low-frequency vibration damper with rolling elements, which have a simple design and high reliability. The parameters of the damper should be such that its frequency is close to the frequency of the main tone of the structure's vibrations. For this, the natural frequency of the vibration damper is determined under the assumption of small amplitude of the oscillations, which allows the equations of motion to be linearized. At large amplitudes, the nonlinear differential equation of motion is solved by numerical methods that allow finding only private solutions for specific conditions. There is a need to generalize private decisions. For this purpose, one of

the simplest dampers was considered, which consisted of a uniform cylinder and a recess (the axes of the cylinder and recess are parallel). It is assumed that there is no energy dissipation and slippage. The cylinder makes free oscillations, which are described by a nonlinear differential equation of the second order. As a result of calculations, the natural frequency and period of natural oscillations of the linearized system were determined. Then, from the condition of conservation of energy, the natural frequency is determined, taking into account the nonlinearity of the system. As a result of numerical integration using the Newton-Cotes method, the dependence of the relative natural frequency and the error caused by the linearization of the differential equation of the cylinder's motion on the amplitude was obtained. Dependence analysis demonstrates a characteristic property of nonlinear systems – non-isochronism. With linearization, an increase in the amplitude of oscillations leads to a quadratic increase in the relative error. As a result of the approximation of the numerical results in the range of values of the angle, which was calculated from the vertical passing through the center of curvature of the depression, from 10 to 90° , the dependences of the determination of the relative natural frequency and the error were obtained. In order to determine the accuracy of the obtained dependencies, a comparison was made with approximations obtained by other methods. The comparison shows that the maximum relative error of 0.216039 of the obtained dependence is less than that obtained by other methods – 0.272803 , while the calculation is simpler. As a result of calculations and analysis, the following was established. The influence of the amplitude of free oscillations on the frequency is characterized by the relative natural frequency, which shows how many times the natural oscillation frequency of the linearized system is greater than the oscillation frequency of the nonlinear system. The relative frequency depends only on the amplitude of the oscillations. In the case of nonlinear oscillations of a mathematical pendulum and a cylinder, their relative natural frequencies are described by the same function. This allowed the cylinder to use the approximation methods developed for the pendulum. The relative natural frequency of oscillations of the cylinder is determined as a result of numerical integration approximation, as well as by the method of harmonic balance. The maximum relative error of the first method (0.22%) is smaller than that of the second (0.27%), while the calculation is simpler. The error, which is due to the linearization of the differential equation of motion of the cylinder, increases quadratically with an increase in the amplitude of oscillations.

Key words: damper of low-frequency oscillations, large-scale engineering structures, numerical experiments, rational parameters of the damper, natural frequency of the damper of oscillations, amplitude of oscillations.

For citation: Lapshin, E. S., & Shevchenko, O. I. (2023). Determination of the rational parameters of the low-frequency oscillation damper of large-sized engineering structures. *Fundamental and applied problems of ferrous metallurgy*, 37, 578-587. <https://doi.org/10.52150/2522-9117-2023-37-578-587>

*Стаття надійшла до редакції збірника 03.11.2023 р.
Рекомендовано до друку редколегією збірника (Протокол № 9 від 19.12.2023 р.)*