

## До питання прогнозування результативності спортсменок, які спеціалізуються в стрибках у висоту

Житомирський державний університет імені Івана Франка (м. Житомир)

**Постановка наукової проблеми та її значення.** В останні роки українським спортсменкам, які спеціалізуються в стрибках у висоту, не вдається перемагати на великих міжнародних змаганнях. Цей факт стимулює фахівців не тільки підвищувати ефективність навчально-тренувального процесу, а продовжувати розробку точності прогнозу результативності спортсменок, що значною мірою сприятиме якісному відбору в цьому виді спорту. У зв'язку з цим досить актуальною є розробка методики прогнозу результативності на базі деякої сукупності найбільш інформативних параметрів.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій із цієї проблеми.** Прогнозування ґрунтується на використанні методу екстраполяції, який припускає поширення висновків, отриманих зі спостереження над однією частиною якого-небудь явища, на інші його частини [3–7]. В умовах спорту екстраполяція дає змогу здійснити прогноз зростання результативності на основі вивчення відповідних закономірностей у попередні роки. Завдання прогнозу результативності спортсменок, котрі спеціалізуються в стрибках у висоту з розбігу, можна розв'язати на базі факторного аналізу й динаміки розвитку найбільш інформативних спортивних параметрів і результатів на деякому обмеженому інтервалі часу (наприклад 10–13 років) [1; 2; 7]. Для цього проводиться лінійна інтерполяція результатів спортивних параметрів між річними атестаційними періодами на менші часові періоди – піврічні та кварталні. Тоді в завданні синтезу лінійної багатомірної регресії результативності представляється можливим використовувати більше число найбільш інформативних параметрів.

Наукове дослідження проводилося згідно з темою 2.11 “Теоретико-методичні основи управління системою підготовки спортсменок, які спеціалізуються в легкоатлетичних стрибках” зведеного плану науково-дослідної роботи у сфері фізичної культури й спорту на 2011–2015 рр. Міністерства освіти й науки, молоді та спорту України. Номер держреєстрації – 0111U003839.

**Завдання** дослідження – розробити програму раннього прогнозу результативності спортсменок, які спеціалізуються в стрибках у висоту, за результатами аналізу вікових груп до 13 років. Для цього спортивні результати та значення усереднених найбільш інформативних спортивних параметрів лінійно інтерполювалися на піврічні чи кварталні періоди.

**Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів дослідження.** У цій роботі дається продовження загального підходу [2] до прикладного завдання прогнозування результативності спортсменів. Оскільки результати та найбільш інформативні параметри спортсменок у групі мають випадковий розкид (дисперсію) [1], то, говорячи про завдання прогнозування результативності, має сенс розглядати прогноз середньої результативності  $\bar{H}(t)$ , як функції середніх по групі спортивних параметрів  $\bar{X}_P$ , що будемо представляти у вигляді матриці стовпця:

$$\bar{X}_P = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_P \end{pmatrix}, P=1, 2, \dots, N_P-1; N_P \geq 3,$$

де  $N_P$  – повне число спортивних параметрів, включаючи сам результат ( $H$ ). Повна множина  $P$ -мірних групувань із  $(N_P-1)$  по  $P$  дорівнює числу сполучень з  $(N_P-1)$  по  $P$ :

$$\bar{X}_P \in U_{\bar{X}_P} = \{ \bar{X}_P^\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, C_{N_P-1}^P \}, \quad (1)$$

$$C_{N_P-1}^P = \frac{(N_P-1)!}{P!(N_P-1-P)!}.$$

Так, для спортсменок, які спеціалізуються в стрибках у висоту, виділяється така повна сукупність спортивних параметрів:

**Розширений перелік найбільш інформативних параметрів спортсменок**

*Спортивний результат (висота) – Цільова функція.*

*Антропометричні параметри (1–6):*

- 1) довжина тіла;
- 2) довжина гомілки;
- 3) довжина стегна;
- 4) окружність стегна;
- 5) окружність гомілкового м'яза;
- 6) маса тіла;

*технічні параметри (7–13):*

(зареєстровані та розрахункові показники технічної підготовленості)

- 7) швидкість розбігу перед відштовхуванням;
- 8) швидкість вильоту ЗЦГТ (у момент відриву);
- 9) кут вильоту ЗЦГТ;
- 10) тривалість фази відштовхування;
- 11) висота вильоту ЗЦГТ;
- 12) імпульс сили відштовхування;
- 13) ступінь використання силових можливостей відштовхування (%);

*спеціалізовані параметри (14–20):*

- 14) біг – 30 м (с);
- 15) швидкість спринтерського бігу (10 м із ходу);
- 16) стрибок вгору у висоту з двох ніг із місця;
- 17) стрибок у довжину з двох ніг із місця;
- 18) потрійний стрибок із місця;
- 19) стрибок угору з поштовхової ноги (махом іншої);
- 20) стрибок вгору з трьох кроків із розбігу.

Інформативність різних Р-мірних групувань  $\bar{X}_P$  у завданнях прогнозування результативності буде також різною. Питання про вибір оптимальної сукупності найбільш інформативних параметрів із множини (1) при різних Р вимагає самостійних глибоких досліджень у рамках окремої НДР. У роботі запропоновано один з альтернативних варіантів розв'язання завдання, який цілком прийнятний із погляду точності прогнозу. У першому наближенні розглядається завдання лінійного прогнозу в рамках класичної теорії лінійної регресії (інтерполяції) у математичній статистиці [5; 8]. Ідеться про вираховання апроксимації

$$\bar{H} \cong H_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_P X_P, \quad (2)$$

де  $H_0, \alpha_1, \dots, \alpha_P$  – невідомі параметри регресії, які потрібно оцінити за даними деякої кількості вікових груп. У більш точній постановці наближена лінійна регресія (2) представляється у вигляді:

$$\bar{H}(t) = H_0 + \alpha_1 X_1(t) + \alpha_2 X_2(t) + \dots + \alpha_P X_P(t) + \xi(t), \quad t \in T = (a, b), \quad (3)$$

де  $\xi(t)$  – помилка прогнозу з нульовим середнім ( $M\xi(t) = 0$ ) і невідомою дисперсією  $\sigma_\xi^2 = M\xi^2$  ( $M$  – оператор математичного очікування – середнього). Якщо в результаті розв'язання задачі лінійної регресії на інтервалі часу  $T$  отримані оцінки невідомих параметрів регресії:

$$H_0 = \hat{H}_0(T); \quad \alpha_n = \hat{\alpha}_n(T), \quad n = 1, 2, \dots, P,$$

то прогнозне значення середньої результативності поза цим інтервалом подається у вигляді:

$$\hat{\bar{H}}(t_0) = \hat{H}_0(T) + \sum_{n=1}^P \hat{\alpha}_n(T) X_n(t_0), \quad t_0 > b, \quad (4)$$

де набір інформативних параметрів  $\{X_n(t_0), \quad n = 1, 2, \dots, P\}$  – задається на прогнозований момент часу  $t_0$ . При цьому середньоквадратичне відхилення похибка (СКВ) прогнозу оцінюється величиною  $\sigma_\xi(T)$ . Наскільки “вдало” отримана оцінка (4), залежить від багатьох факторів. Останнє слово



$$\sum_{m=1}^M s_m \bar{Y}_N^m = \bar{\bar{H}}_N \Rightarrow Y_{NM} \bar{s}_M = \bar{\bar{H}}_N, \quad (8)$$

$$\bar{Y}_N^1 = \bar{I}_N, \bar{Y}_N^2 = \bar{X}_N^1, \dots, \bar{Y}_N^M = \bar{X}_N^P, \quad Y_{NM} = (\bar{Y}_N^1 \bar{Y}_N^2 \dots \bar{Y}_N^P),$$

де  $Y_{NM}$  – вимірна матриця спостережень (ВМС);  $\bar{\bar{H}}_N$  – вимірний вектор середніх результатів (ВСР).

Відповідно до загальної теорії лінійної регресії система (8) може бути розв'язана, якщо вона цілком визначена чи перевизначена:

$$N \geq M + 1 = P + 2 \Rightarrow \text{Rank} Y_{NM} = M. \quad (9)$$

Відзначимо, що величина (M+1) обумовлена тим, що в число невідомих крім  $M=P+1$ , параметрів регресії потрібно включити також і невідому СКП  $\sigma_\xi$ . При виконанні умови (9) статистичне розв'язання задачі лінійної регресії подається у вигляді:

$$\bar{s}_M^{\wedge} = Y_{NM}^{-} \bar{\bar{H}}_N, \quad Y_{NM}^{-} = (Y_{NM}^T Y_{NM})^{-1} Y_{NM}^T, \quad (10)$$

$$(\sigma_\xi^2)^{\wedge} = \frac{1}{N-M} \|\bar{\bar{H}}_N^{\wedge} - \bar{\bar{H}}\|^2 = \frac{\|\Lambda_{NN}^{M\perp} \bar{\bar{H}}_N\|^2}{N-M}, \quad (11)$$

$$\bar{\bar{H}}_N^{\wedge} = Y_{NM} \bar{s}_M^{\wedge} = \Lambda_{NN}^M, \quad \Lambda_{NN}^M = Y_{NM} Y_{NM}^{-}, \quad \Lambda_{NN}^{M\perp} = I_{NN} - \Lambda_{NN}^M,$$

$$\text{Rank} \Lambda_{NN}^M = M, \quad \text{Rank} \Lambda_{NN}^{M\perp} = N - M,$$

де  $Y_{NM}^{-}$  – псевдозворотна матриця [4];  $\Lambda_{NN}^M$  – вектор у лінійну оболонку з базисних векторів  $\{\bar{Y}_N^m, m=1,2,\dots,M\}$ ;  $\Lambda_{NN}^{M\perp}$  – ортогональний вектор.

У цій роботі найбільш точний розв'язок отримано у випадку  $P=3$  при різних  $N$  з урахуванням необхідної умови припущення (9):

$$5 \leq N \leq 8. \quad (12)$$

Специфічною математичною особливістю задачі регресії спортивного результату є те, що в силу досить однорідного складу груп стовпцеві вектори  $VMH$   $Y_{NM}$  є, хоч і випадковими, але з малою кутовою розбіжністю відносно “одичного” вектора  $\bar{I}_N$ . Ця обставина вимагає чіткого контролю точності перетворення матриці Грама  $(Y_{NM}^T Y_{NM})_{MM}$ , тому що у випадку високої кутової кореляції (“схожості”) векторів  $\bar{Y}_N^m$  матриця Грама є часто погано зумовленою [4] з великим динамічним діапазоном власних чисел в області малих величин. При цьому точність перетворення матриці Грама зі зростанням розмірності  $P>3$  (числа інформативних параметрів, які враховуються) починає різко падати й подальше збільшення розмірності  $P$  не є можливим.

Відзначимо також, що в цій роботі максимальне число вікових груп із піврічним періодом  $N_{max}=8$ .

Тому в силу умови (9) граничне число найбільш інформативних параметрів обмежується величиною 15 (у роботі [2] вона була рівною 6).

*Апробація алгоритмів прогнозу результативності спортсменок, які спеціалізуються в стрибках у висоту, за різною кількістю піврічних вікових груп*

У програмі РЕГРЕСІЯ (cor2din.com) є такі розділи:

1. Виклик вихідних статистичних даних (файл g1\_21\_9.dat).
2. Шифр файла:  $T_{N-M}(x_1, x_2, \dots, x_M)$  для річних періодів і  $T_{Nd-M}(x_1, x_2, \dots, x_M)$  для піврічних періодів, де  $N$  – число вікових груп (річних або піврічних), за якими робиться прогноз на майбутнє;  $M$  – число інформативних параметрів ( $N \geq M+2$ ).
3. Інтерполяція значень спортивних параметрів на піврічні чи кварталні періоди.
4. Вибір  $M$  інформативних параметрів (із номерів 2–21).
5. Аналіз рангу регресійної матриці  $Y_{N(M+1)}$  методом Грама-Шмідта.
6. Аналіз кореляції інформативних параметрів за роками.
7. Спектральний аналіз матриці Грама  $Y^T Y$  розміром  $(M+1)*(M+1)$ .
8. Оцінка точності перетворення матриці Грама.

9. Оцінка статистичних характеристик інформативних параметрів (середні, СКВ, кореляційна матриця).

10. Розв'язання задачі лінійної регресії.

11. Оцінка дисперсії шуму ( $СКВ=s$ ).

12. Прогнозування за межі обраних вікових груп, уключаючи прогнозування рекордних результатів.

**Висновки.** Задача прогнозу результативності спортсменок є задачею інтерполяції середньої (за віковою групою) результативності ( $\bar{H}$ ) у вигляді лінійної комбінації середніх значень найбільш інформативних спортивних параметрів ( $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_P$ ) із зазначенням точності ( $СКВ$ ) прогнозу:

$$\bar{H} = H_0 + \alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \dots + \alpha_P \bar{x}_P + \xi, \quad \overline{\xi^2} = \sigma_\xi^2,$$

де  $H_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_P$  – параметри регресії;  $\sigma_\xi$  –  $СКВ$ -прогнозу.

В умовах апріорної невизначеності про  $СКВ$  прогнозу необхідною умовою розв'язання задачі прогнозу є перевищення числа використовуваних вікових груп ( $N_{BG}$ ) над числом використовуваних інформативних фізичних параметрів ( $P$ ), як мінімум на дві одиниці:

$$N_{BG} \geq P + 2.$$

Так, при кількості інформативних спортивних параметрів  $P=3$  потрібні середні значення більш ніж за 5-ма річними віковими групами (10, 11, 12, 13 і 14 років) або більш ніж за 6-ма піврічними віковими групами (10; 10,5; 11; 11,5; 12 і 12,5 року). При цьому можна зробити прогноз результативності не тільки на будь-який “внутрішній” момент часу  $t_0$  ( $10 \leq t_0 \leq 14$ ) або ( $10 \leq t_0 \leq 12,5$ ), але й на майбутні моменти часу  $t_0 > 14$  або  $t_0 > 12,5$ , уключаючи прогноз рекордних результатів. Для цього достатньо в отриману формулу регресії підставити значення прогнозних середніх значень спортивних параметрів  $\{\bar{x}_n(t_0), n = 1, 2, \dots, P\}$ :

$$\bar{H}(t_0) \cong H_0 + \alpha_1 \bar{x}_1(t_0) + \alpha_2 \bar{x}_2(t_0) + \dots + \alpha_P \bar{x}_P(t_0) \quad (\pm \sigma_\xi).$$

Зокрема, при прогнозуванні за трьома параметрами ( $x_{12}, x_9, x_{21}$ ) із 5-ти річних вікових груп (10, 11, 12, 13 і 14 років) отримано таку регресійну функцію:

$$H = 0,478 + 0,657x_{12} + 0,058x_9 + 0,806x_{21}, \quad \sigma = s = 0,9 \text{ см.}$$

де  $x_{12}$  – висота вильоту ЗЦТТ;  $x_9$  – швидкість вильоту ЗЦТТ;  $x_{21}$  – стрибок угору з трьох кроків розбігу. При цьому прогнозоване значення результату для майстрів спорту міжнародного класу – 200 см, що відрізняється від їхнього середнього результату (197 см) усього на 3 см.

При прогнозуванні за трьома параметрами ( $x_{12}, x_9, x_{21}$ ) за 6-ма піврічними віковими групами (10; 10,5; 11; 11,5; 12 і 12,5 років) отримано таку регресійну функцію:

$$H = 0,381 + 0,474x_{12} + 0,027x_9 + 1,369x_{21}, \quad \sigma = s = 0,2 \text{ см.}$$

**Перспективи подальших досліджень.** Перспективним напрямом подальших досліджень є розробка методики прогнозування результативності для всіх швидко-силових видів легкої атлетики.

#### Список використаної літератури

1. Ахметов Р. Ф. Групповые статистические характеристики и факторный анализ многомерной совокупности параметров спортсменов в задачах прогноза результативности / Р. Ф. Ахметов // Педагогіка, психологія та медико-біологічні проблеми фізичного виховання і спорту. – 2004. – № 6. – С. 91–104.
2. Ахметов Р. Ф. Прогноз результативности спортсменов на базе статистического факторного анализа и экспертного ранжирования полной совокупности антропометрических, технических и специализированных параметров / Р. Ф. Ахметов // Педагогіка, психологія та медико-біологічні проблеми фізичного виховання і спорту. – 2004. – № 7. – С. 82–95.
3. Баландин В. И. Прогнозирование в спорте / В. И. Баландин, Ю. М. Блудов, В. А. Плахтиенко. – М. : Физкультура и спорт, 1986. – 193 с.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Гантмахер Ф. Р. – М. : Наука, 1988. – 552 с.
5. Крамер Г. Математические методы статистики: пер. с англ. / Г. Крамер / под ред. академика А. Н. Колмогорова. – М. : Мир, 1975. – 648 с.
6. Платонов В. Н. Общая теория подготовки спортсменов в олимпийском спорте / Платонов В. Н. – Киев : Олимпийская лит., 1997. – 583 с.
7. Плахтиенко В. А. Прогнозирование в спорте / В. А. Плахтиенко, В. Г. Мельник. – Л. : ВДКИФК, 1980. – 79 с.

8. Пугачев В. С. Теория вероятностей и математическая статистика / Пугачев В. С. – М. : Наука, 1979. – 496 с.

#### Анотації

В останні роки українським спортсменкам, які спеціалізуються в стрибках у висоту, не вдається перемогти на великих міжнародних змаганнях. Цей факт стимулює фахівців не тільки підвищувати ефективність навчально-тренувального процесу, але й продовжувати розробку точності прогнозу результативності спортсменок, що значною мірою сприятиме якісному відбору в цьому виді спорту. У зв'язку з цим досить актуальною є розробка методики прогнозу результативності на базі деякої сукупності найбільш інформативних параметрів. Завдання роботи – розробити програму раннього прогнозу результативності спортсменок, які спеціалізуються в стрибках у висоту, за результатами аналізу вікових груп. У роботі спортивні результати та значення найбільш інформативних спортивних параметрів лінійно інтерполювалися на піврічні чи кварталні періоди. Оскільки конкретні значення параметрів залежать випадковим чином від конкретної спортсменки, оскільки вони завжди мають деяку випадкову розбіжність, яку можна описати методами математичної статистики. Задача прогнозу результативності спортсменок є задачею інтерполяції середньої (за віковою групою) результативності у вигляді лінійної комбінації середніх значень найбільш інформативних спортивних параметрів із зазначенням математичної точності прогнозу.

**Ключові слова:** апроксимація, регресійна матриця, лінійна регресія.

**Тамара Кутек. К вопросу прогнозирования результативности спортсменок, которые специализируются в прыжках в высоту.** В последние годы украинским спортсменкам, которые специализируются в прыжках в высоту, не удается побеждать на крупных международных соревнованиях. Этот факт стимулирует специалистов не только повышать эффективность учебно-тренировочного процесса, но и продолжать разработку точности прогноза результативности спортсменок, что в значительной мере будет способствовать качественному отбору в этом виде спорта. В связи с этим, достаточно актуальным является разработка методики прогноза результативности спортсменок на базе некоторой совокупности наиболее информативных параметров. Задача статьи – разработать методику раннего прогнозирования результативности спортсменок, которые специализируются в прыжках в высоту, по результатам анализа возрастных групп. В работе спортивные результаты и значения наиболее информативных параметров линейно интерполировались на полугодовые или кварталные периоды. Поскольку конкретные значения параметров зависят случайным образом от конкретной спортсменки, постольку они всегда имеют некоторый случайный разброс, который можно описать методами математической статистики. Задача прогноза результативности спортсменок является задачей интерполяции средней (по возрастной группе) результативности в виде линейной комбинации средних значений наиболее информативных спортивных параметров с определением математической точности прогноза.

**Ключевые слова:** аппроксимация, регрессивная матрица, линейная регрессия.

**Tamara Kutek. The Question of Performance Prognosis of Female Athletes Who Specialize in High Jump.** In recent years Ukrainian athletes who specialize in high jump fail to win in major international competitions. This fact motivates professionals not only to increase the efficiency of training process, but also to develop further prediction accuracy of athletes' performance that will greatly contribute to qualitative selection in this sport. Therefore, it is quite urgent to develop methodology of female athletes' performance prediction on the basis of most informative parameters combination. It was worked out the methodology for early performance prediction of female athletes who specialize in high jump according to the results of age group review. In this research, the sports results and the most informative parameter values had linear interpolation in semi-annual or quarterly periods. As the specific parameter values depend on every competitor in particular, these values always have some random variation, which can be described by the mathematical statistics methods. The task of the female athletes' performance prediction is the target of average results interpolation (by the age group) in the form of a linear combination of average most informative sports parameter values with determination of the mathematical accuracy of the prediction.

**Key words:** approximation, regression matrix, linear regression.