

Наталия Иващук<sup>1</sup>, Ирина Кавалець<sup>2</sup>

<sup>1</sup>AGH University of Science and Technology, Krakow, Faculty of Management

<sup>2</sup>Национальний університет "Львівська політехніка", Львів, Інститут прикладної математики і фундаментальних наук, кафедра прикладної математики; e-mail: ira.kavalets@gmail.com

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ КОНТРОЛЯ НЕСТАБИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ В КОНКУРИРУЮЩИХ СИСТЕМАХ

Работа посвящена применению математических методов к управлению неустойчивостью конкурирующих систем. Основное внимание направлено на метод управления с обратной связью с задержкой (DFC-метод), а именно, рассматривается применение этого метода с одним и двумя управляющими законами к модели дуополии. В результате показано как скорость установки системы в точку равновесия Курно зависит от выбора коэффициента обратной связи  $K$ .

**Ключевые слова:** конкурирующие системы, дуополия, модель Курно-Пу, равновесие Курно, хаос, устойчивость, метод контроля с обратной связью с задержкой (DFC-метод).

### Введение

Обзор литературных источников за последние годы (см. обзор литературы в [16, 27]) показывает большую заинтересованность ученых к исследованию моделей олигополии и характерно для них нелинейной динамики. Наиболее простой и одновременно наиболее исследуемой среди них является модель олигополии Курно [14]. Одну из модификаций этой модели предложил Т. Пу, который предположил, что спрос в условиях олигополии должен быть изоэластичным, а конкуренты несут постоянные, но различные предельные издержки [24]. Исследования за последнее десятилетие также показывают существование хаотической динамики в моделях олигополии [3–5, 7, 8, 10–13, 15, 20, 21–23, 25, 26, 29, 30]. Среди них особенное внимание уделено модели дуополии, в том числе и модели Курно-Пу.

Наши последние работы были посвящены построению обобщенной модели олигополии Курно-Пу, а также исследованию устойчивости ее точки равновесия [1, 2, 18, 19]. А в работах [2, 19] мы подробно описали модель дуополии и определили значения параметров системы (предельные издержки фирм), при которых точка равновесия устойчива, а также при каких значениях параметра в системе возникает хаос (точнее, появляется каскад удвоения периода, приводящий к хаосу).

В связи с этим возникает потребность в контроле такой хаотической динамики, поскольку неустойчивые колебания являются нежелательными для любой системы либо процесса, в том числе экономического характера. Некоторые методы контроля хаоса, такие как OGY-метод контроля хаоса [6, 9], метод адаптивного контроля и метод размещения полюса [21] были применены к модели дуополии Курно-Пу. В частности, в статье [13] авторы предложили метод управления с обратной связью с задержкой (DFC-метод) для управления хаосом, возникающим в модели дуополии Курно-Пу. Этот метод основан на обратной связи разницы между текущей и предыдущей структурой системы, т.е.

требует относительно мало информации о системе, а потому является легким в применении. Мы осуществили обобщение этого метода для случая присутствия на рынке  $n$  фирм (т.е. в ситуации олигополии) для обобщенной модели Курно-Пу, с возможностью применения  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) управляющих законов для стабилизации системы [17].

Однако в процессе исследования возникло несколько важных вопросов, которые требуют более детального рассмотрения и исследования. Первый вопрос – каким должно быть оптимальное значение коэффициента обратной связи  $K$ , при котором система придет к точке равновесия Курно за минимальное количество шагов (минимум времени). Второе – насколько эффективно применение более чем одного управляющего закона для управления хаотической динамикой. Рассмотрим эти вопросы подробно, на примере дуополии.

### МОДЕЛЬ ДУОПОЛИИ КУРНО-ПУ

Известно, что в случае дуополии на отраслевом рынке функционируют только две фирмы  $F_1$  и  $F_2$  с объемами выпуска (производства)  $q_1$  и  $q_2$ , соответственно. Фирмы несут постоянные, но различные предельные издержки  $c_1$  и  $c_2$ .

Согласно обобщенной модели [19], модель дуополии Курно-Пу имеет вид (см. также [13])

$$\begin{aligned} q_1(t+1) &= \sqrt{\frac{q_2(t)}{c_1}} - q_2(t), \\ q_2(t+1) &= \sqrt{\frac{q_1(t)}{c_2}} - q_1(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Модель (1) построена на основе предположений Курно и Пу. Предположение Курно заключается в том, что каждая из фирм ожидает от своего конкурента такого же объема выпуска в текущий период, как и в предыдущем периоде. Такие ожидания в работе [21] называют “наивными” (“*naive expectation*”). Предположение Пу заключается в следующем: рыночный спрос является изоэластичным (т.е. цена является обратной величиной по отношению к полному спросу), товары взаимозаменяемы (т.е. спрос равен предложению), фирмы имеют разные постоянные предельные издержки (т.е. предельные издержки одной из фирм отличаются от предельных издержек другой из них).

Функции  $q_1(t+1)$  и  $q_2(t+1)$  при значениях параметров  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 6,25$  и начальных условиях  $q_1(0) = q_2(0) = 0,01$  имеют вид, показанный на рис.1.

Нетривиальная точка равновесия системы (1) – равновесие Курно (равновесие Нэша) – является точкой пересечения кривых реакции и имеет значение

$$q_1^* = \frac{c_2}{(c_1 + c_2)^2}, \quad q_2^* = \frac{c_1}{(c_1 + c_2)^2}. \quad (2)$$

Прибыль дуополистов в точке равновесия Курно

$$U_1^* = \frac{c_2^2}{(c_1 + c_2)^2}, \quad U_2^* = \frac{c_1^2}{(c_1 + c_2)^2}. \quad (3)$$

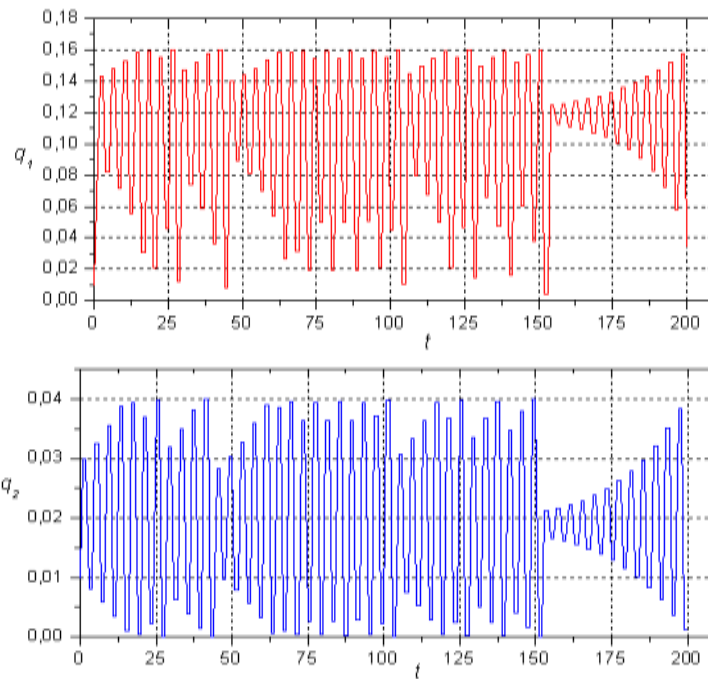


Рис.1. Функции реакции фирм  $F_1$  и  $F_2$

Устойчивость точки равновесия (2) системы (1) подробно исследована в работах [2, 19], а также в [24]. Однако неисследованным остается вопрос о том, какие лучше применять методы контроля с целью стабилизации системы в условиях неустойчивости точки равновесия (2). В этой работе мы проанализируем особенности применения только одного из таких методов, а именно DFC-метода. В частности, исследуем вопрос эффективности его применения с одним и двумя управляющими законами, что позволит определить, при каких значениях коэффициента обратной связи можно быстрее стабилизировать неустойчивую систему.

Для того, чтобы исследовать этот вопрос обозначим отношение предельных затрат  $\frac{c_2}{c_1} = c_r$  и не ограничивая общности предположим, что  $c_2 \geq c_1$  (т.е.  $c_r \geq 1$ ). Точка равновесия (2) является устойчивой, если отношение предельных издержек находится внутри интервала

$$1 \leq c_r < 3 + \sqrt{8}. \quad (4)$$

Точка равновесия является неустойчивой, если

$$3 + \sqrt{8} \leq c_r \leq 25/4. \quad (5)$$

При этих значениях параметра  $c_r$  в системе существуют предельные циклы и хаос. Бифуркационная диаграмма для фирмы  $F_2$  с объемом выпуска  $q_2$  по отношению к предельным издержкам  $c_r$  представлена на рис. 2.

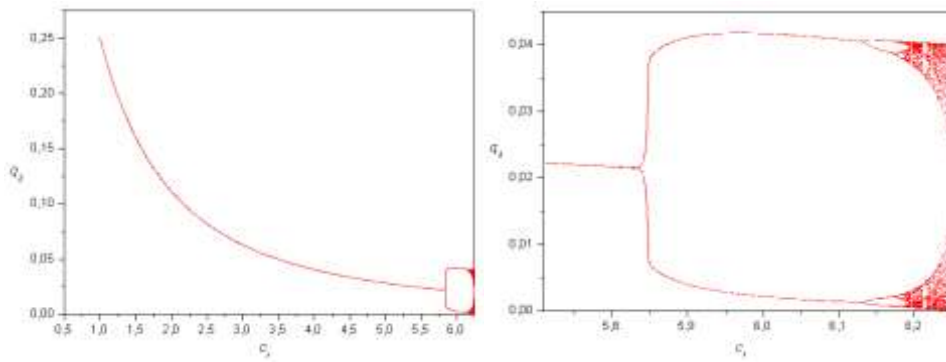


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма фирмы  $F_2$  с объемом выпуска  $q_2$

### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОБРАТНОЙ СВЯЗИ С ЗАДЕРЖКОЙ (DFC-МЕТОДА) К МОДЕЛИ КУРНО-ПУ

#### а) влияние выбора коэффициента обратной связи $K$ на скорость установки системы в точку равновесия Курно

Рассмотрим такую управляющую форму модели дуополии (1)

$$\begin{cases} q_1(t+1) = \sqrt{\frac{q_2(t)}{c_1}} - q_2(t) + u(t), \\ q_2(t+1) = \sqrt{\frac{q_1(t)}{c_2}} - q_1(t). \end{cases} \quad (6)$$

$u(t)$  представляет собой такой DFC-закон

$$u(t) = K(q_1(t) - q_1(t-1)), \quad t \geq 1, \quad (7)$$

где  $K$  – коэффициент обратной связи.

В модели (6) DFC-закон применен к структуре (состоянию) модели дуополии, а именно, к объему выпуска фирмы-олигополиста. Можно рассматривать применение DFC-закона к параметрам модели (в частности, к предельным издержкам фирм).

Как показано в [13], а также подробно описано в [2], точка равновесия Курно  $(q_1^*, q_2^*)$  (2) локально асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда

$$-\frac{1}{2} - \frac{(c_r - 1)^2}{8c_r} < K < 1 - \frac{(c_r - 1)^2}{4c_r}. \quad (8)$$

Графическое изображение области асимптотической устойчивости точки равновесия  $(q_1^*, q_2^*)$  в пространстве параметров  $\{c_r, K\}$  представлено на рис. 3.

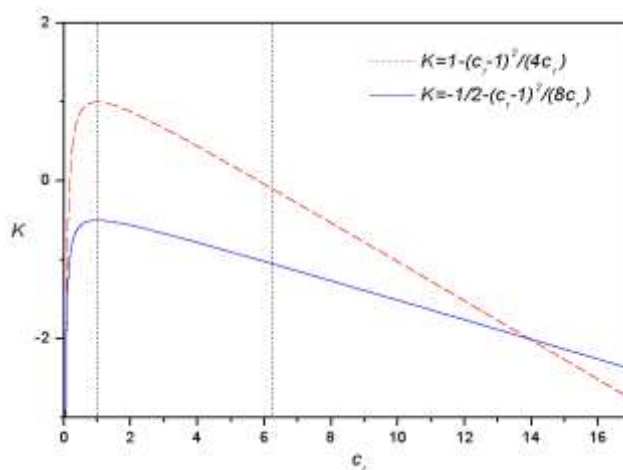


Рис. 3. Область асимптотической устойчивости точки равновесия  $(q_1^*, q_2^*)$  при применении DFC-метода к структуре модели дуополии

Эта область определяется условиями (8) и ограничена линиями

$$K = 1 - \frac{(c_r - 1)^2}{4c_r}, \quad K = -\frac{1}{2} - \frac{(c_r - 1)^2}{8c_r}, \quad c_r = 1, \quad c_r = \frac{25}{4}. \quad (9)$$

Численные эксперименты с применением DFC-метода к структуре модели дуополии Курно-Пу были проведены в работе [13]. Значения параметров фиксируются как  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 6,25$ , начальные условия  $q_1(0) = q_2(0) = 0,01$ , а коэффициент обратной связи  $K = -0,5$ . Хаотическая траектория стабилизируется в точке равновесия Курно и управляющий DFC-закон  $u(t)$ , начиная действовать с момента времени  $t = 50$ , стремится к нулю. Однако возникает вопрос: насколько эффективен выбор именно такого значения коэффициента  $K$ ? Возможно, существует такое значение этого коэффициента, из допустимого интервала (8), при заданном значении отношения предельных издержек  $c_r$ , которое быстрее приведет нестабильную систему к точке равновесия. Ответ на этот вопрос получим дальше.

Рассмотрим интервал значений параметра  $c_r$ , при которых точка равновесия Курно является неустойчивой, т.е.  $3 + \sqrt{8} \leq c_r \leq \frac{25}{4}$ . Рассмотрим правый конец этого интервала, то есть значение  $c_r = 25/4$  ( $c_1 = 1, c_2 = 25/4$ ). Тогда коэффициент  $K$ , согласно системе неравенств (8), можно выбирать из интервала

$$-\frac{841}{800} < K < -\frac{82}{800},$$

то есть

$$-1,05125 < K < -0,1025. \quad (10)$$

Точка равновесия Курно, при значении параметра  $c_r = 25/4$ , согласно (2), имеет значения

$$q_1^* = \frac{100}{841} \approx 0,118906, \quad q_2^* = \frac{16}{841} \approx 0,019025. \quad (11)$$

Мы провели численные исследования для модели (6) с управляющей функцией (7) для значения  $c_r = 25/4$  и начальных условий  $q_1(0) = q_2(0) = 0,01$ , выбирая значение коэффициента  $K$  из допустимого интервала (10). В результате мы получили количество временных шагов (промежутков), необходимых для того, чтобы каждая из фирм  $F_1$  и  $F_2$ , с объемами производства  $q_1$  и  $q_2$ , соответственно, пришла к точке равновесия Курно  $(q_1^*, q_2^*)$ , при каждом выбранном значении  $K$ . Графически эту зависимость показано на рис. 4.

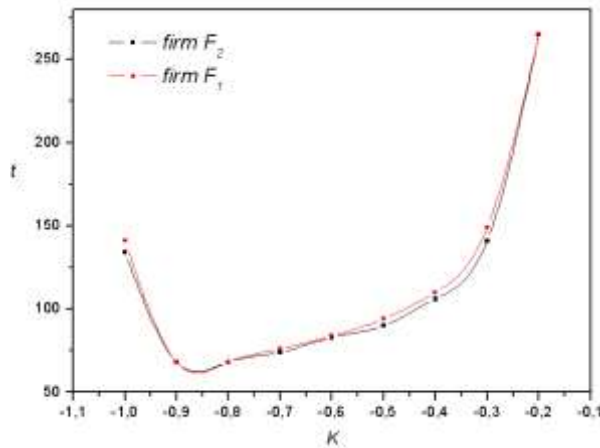


Рис. 4. Зависимость количества временных шагов  $t$  от выбора коэффициента  $K$  ( $c_r = 25/4$ )

Как видно из рис. 4, обоим фирмам при том же значении  $K$  необходимо почти такое же количество шагов, чтобы прийти к точке равновесия. Можно также заметить, что система быстро стабилизируется при значениях близких к  $K = -0,9$  и  $K = -0,8$  ( $t_1 = 68, t_2 = 68$  для двух значений  $K = -0,9$  и  $K = -0,8$ ). Поэтому, для того чтобы как можно быстрее стабилизировать систему, следует выбирать такие значения  $K$ , которые находятся между указанными выше значениями и близкие к ним. Чем больше мы отдаляемся от оптимальных значений в направлении правого конца интервала значений  $K$ , тем больше времени требуется системе, чтобы прийти в состояние равновесия.

Применение DFC-метода к модели дуополии, со значением параметра  $c_r = 25/4$ , начальными условиями  $q_1(0) = q_2(0) = 0,01$  и значением коэффициента  $K = -0,9$ , проиллюстрировано на рис. 5.

Напомним, что управляющий закон начинает действовать с момента времени  $t = 50$  и стабилизирует систему, т.е. приводит ее к точке равновесия.

#### **б) применение DFC-метода с двумя управляющими законами**

Далее мы будем рассматривать применение двух управляющих законов к структуре модели дуополии (1). Рассмотрим систему

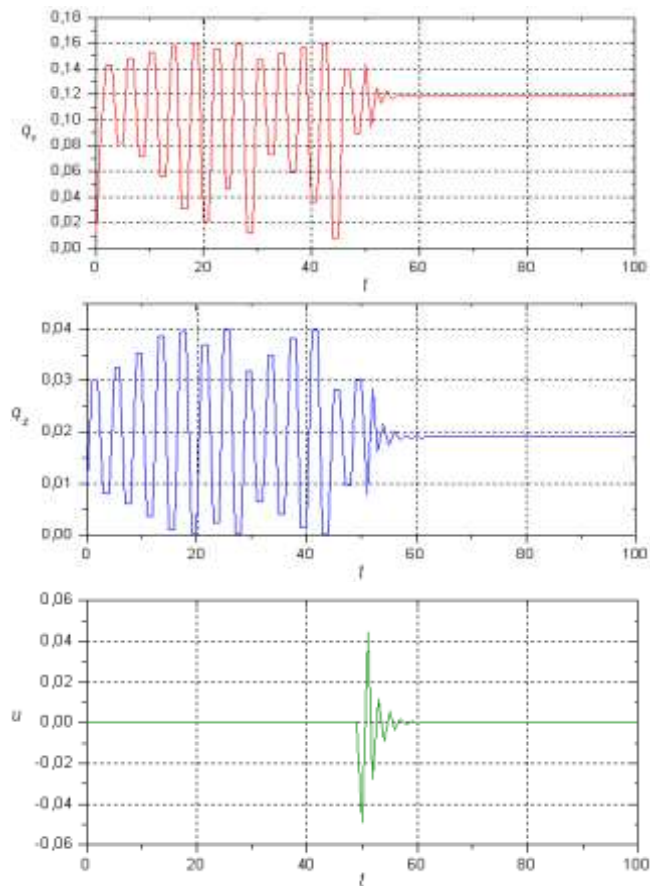


Рис. 5. Применение DFC-метода к модели дуополии

$$\begin{cases} q_1(t+1) = \sqrt{\frac{q_2(t)}{c_1}} - q_2(t) + u_1(t), \\ q_2(t+1) = \sqrt{\frac{q_1(t)}{c_2}} - q_1(t) + u_2(t). \end{cases} \quad (12)$$

Причем  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  – DFC-законы

$$\begin{cases} u_1(t) = K_1(q_1(t) - q_1(t-1)), & t \geq 1, \\ u_2(t) = K_2(q_2(t) - q_2(t-1)), & t \geq 1, \end{cases} \quad (13)$$

где  $K_1, K_2$  – коэффициенты обратной связи.

Согласно обобщенному DFC-методу [2, 17], для  $n=2$  и  $k=2$  ( $k$  – количество управляющих законов), матрица Якоби линеаризованной системы модели (12) имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & K_1 & 0 \\ p_2 & 0 & 0 & K_2 \\ -1 & p_1 & K_1 & 0 \\ p_2 & -1 & 0 & K_2 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где

$$p_1 = \frac{c_2 - c_1}{2c_1}, \quad p_2 = \frac{c_1 - c_2}{2c_2}. \quad (15)$$

Определим теперь, какие условия должны накладываться на выбор коэффициентов  $K_1$  и  $K_2$ , чтобы управляющие законы (13) стабилизируют систему к точке равновесия Курно. С этой целью применим процедуру Рауса-Гурвица для  $n + k = 4$  [28].

Устойчивость линеаризованной системы модели (12) определяется характеристическим уравнением

$$\det \begin{pmatrix} 0 & p_1 & K_1 & 0 \\ p_2 & 0 & 0 & K_2 \\ -1 & p_1 & K_1 & 0 \\ p_2 & -1 & 0 & K_2 \end{pmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0. \quad (16)$$

Коэффициенты уравнения (16) имеют вид

$$\begin{aligned} a_1 &= -(K_1 + K_2), \\ a_2 &= K_1 + K_2 + K_1K_2 - p_1p_2, \\ a_3 &= -2K_1K_2, \\ a_4 &= K_1K_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Точка равновесия  $(q_1^*, q_2^*)$  является локально асимптотически устойчивой, если для всех собственных значений  $\lambda$  матрицы Якоби  $J$  выполняется условие [28]

$$|\lambda| < 1. \quad (18)$$

Согласно классической процедуры Рауса-Гурвица, все собственные значения удовлетворяют условию (18), если выполняются условия

$$\begin{aligned} b_0 > 0, \quad b_1 > 0, \quad b_2 > 0, \quad b_3 > 0, \quad b_4 > 0, \\ b_1b_2 - b_0b_3 > 0, \quad b_3(b_1b_2 - b_0b_3) - b_1^2b_4 > 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где



$$\begin{aligned}
b_0 &= 1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \\
b_1 &= 2 + a_1 - a_3 - 2a_4, \\
b_2 &= 3 - a_2 + 3a_4, \\
b_3 &= 2 - a_1 + a_3 - 2a_4, \\
b_4 &= 1 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4.
\end{aligned}
\tag{20}$$

Согласно значений параметров  $b_i, i = \overline{0,4}$  (20), коэффициентов  $a_i, i = \overline{1,4}$  (17) и элементов  $p_i, i = 1,2$  (15), условия (19) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
(0) \quad & 1 + \frac{(c_r - 1)^2}{4c_r} > 0, \\
(1) \quad & 2 - (K_1 + K_2) > 0, \\
(2) \quad & 3 - (K_1 + K_2) + 2K_1K_2 - \frac{(c_r - 1)^2}{4c_r} > 0, \\
(3) \quad & 2 + (K_1 + K_2) - 4K_1K_2 > 0, \\
(4) \quad & 1 + 2(K_1 + K_2) + 4K_1K_2 + \frac{(c_r - 1)^2}{4c_r} > 0, \\
(5) \quad & (2 - (K_1 + K_2)) \left( 3 - (K_1 + K_2) + 2K_1K_2 - \frac{(c_r - 1)^2}{4c_r} \right) - \\
& \quad - \left( 1 + \frac{(c_r - 1)^2}{4c_r} \right) (2 + (K_1 + K_2) - 4K_1K_2) > 0, \\
(6) \quad & (2 + (K_1 + K_2) - 4K_1K_2) \left( (2 - (K_1 + K_2)) \left( 3 - (K_1 + K_2) + 2K_1K_2 - \frac{(c_r - 1)^2}{4c_r} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \left( 1 + \frac{(c_r - 1)^2}{4c_r} \right) (2 + (K_1 + K_2) - 4K_1K_2) \right) - (2 - (K_1 + K_2))^2 (1 + \\
& \quad + 2(K_1 + K_2) + 4K_1K_2 + \frac{(c_r - 1)^2}{4c_r}) > 0.
\end{aligned}
\tag{21}$$

$$\text{Где } c_r = \frac{c_2}{c_1}.$$

Очевидно, что первое из условий  $1 + \frac{(c_r - 1)^2}{4c_r} > 0$  выполняется всегда, поскольку  $c_r > 0$ . Следовательно, необходимо выбирать такие значения коэффициентов  $K_1$  и  $K_2$ , которые бы удовлетворяли остальные шесть неравенств. На рис. 6 графически представлена область (в плоскости  $\{K_1 + K_2, K_1K_2\}$ ), которая удовлетворяет неравенствам (21.1) – (21.6), при значении параметра  $c_r = 25/4$ . Эта область ограничена кривыми, построенными с помощью неравенств (21).

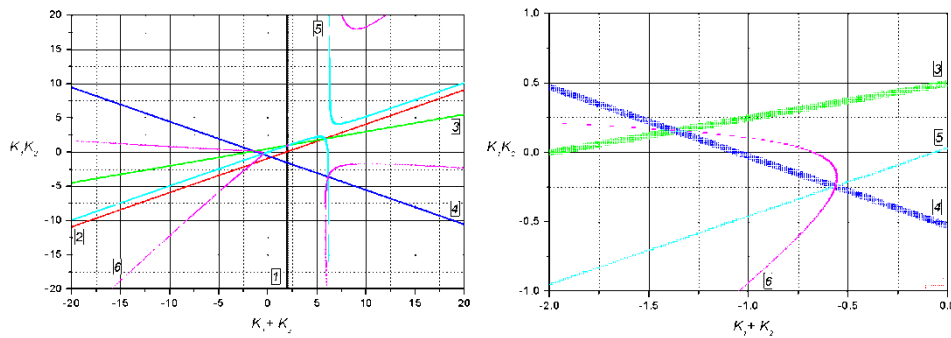


Рис. 6. Область допустимых значений коэффициентов  $K_1$  и  $K_2$  ( $c_r = 25/4$ )

Как показано справа на рис. 6, область допустимых значений коэффициентов  $K_1$  и  $K_2$  определяется четвёртым и шестым неравенствами.

Мы также провели численные исследования, которые дают ответ на вопрос: целесообразно ли использовать два управляющие законы в модели дуополии? Выбирая значения  $K_1 + K_2$  и  $K_1K_2$  из допустимой области, мы получили соответствующее количество шагов, которое необходимо для того, чтобы система пришла к точке равновесия. Графически результат исследования показан на рис. 7.

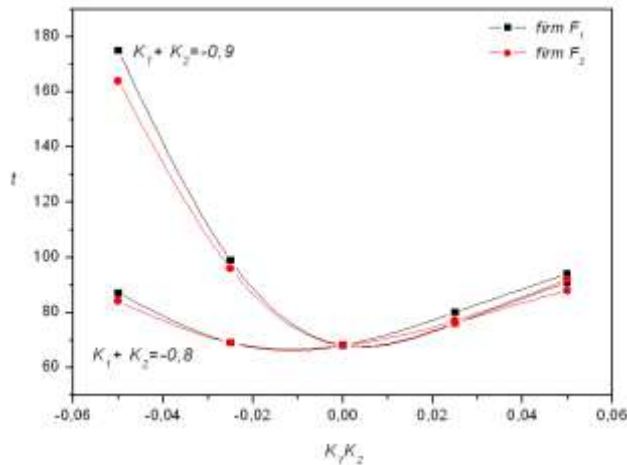


Рис. 7. Зависимость количества временных шагов  $t$  от значения  $K_1K_2$  ( $c_r = 25/4$ )

Как видно из приведенного рисунка (см. рис. 7), при значениях  $K_1 + K_2 = -0,9$  и  $K_1K_2 = 0$ , системе нужно меньше времени, чтобы прийти к точке равновесия Курно. Произведение  $K_1K_2 = 0$  означает, что либо  $K_1 = 0$ , либо  $K_2 = 0$ . Без потери общности предположим, что  $K_2 = 0$ . Тогда получим ситуацию, когда в модели применен только один управляющий закон, со значением коэффициента  $K_1 = -0,9$ . Эту ситуацию мы уже описывали ранее, когда значение коэффициента  $K = -0,9$  является оптимальным значением, при применении одного управляющего закона. Но чем больше мы отдаляемся (либо влево, либо вправо) от точки со значением  $K_1K_2 = 0$ , тем больше времени требуется

тся, чтобы стабилизировать систему. Такую же ситуацию получим при  $K_1 + K_2 = -0,8$  и  $K_1 K_2 = 0$  (см. рис. 7).

Подводя итоги данного исследования, можно утверждать, что применение DFC-метода с двумя управляющими законами к модели дуополии не является эффективным.

Применение DFC-метода к структуре модели является методом индивидуального контроля на хаотическом рынке, когда одна из фирм может исследовать ситуацию на рынке и изменить свою линию поведения, наблюдая за объемами производства в настоящем и прошлом периодах. В нашем исследовании мы доказали, что более эффективным будет контроль нестабильных колебаний со стороны только одной фирмы данной олигополистической отрасли. Если же одновременно две фирмы будут пытаться это осуществить, то потребуются больше времени, чтобы ситуация на рынке стабилизировалась (т.е. чтобы обе фирмы пришли к равновесному значению объемов собственного выпуска). Поскольку модель симметрична, то роли фирм  $F_1$  и  $F_2$  могут поменяться.

### Выводы

Исследования показали, что в современной мировой экономике олигополия продолжает оставаться преобладающей формой рыночной структуры. К олигополистическим можно зачислить автомобильную, сталеплавильную, нефтехимическую, электротехническую, энергетическую, компьютерную и другие отрасли. Именно поэтому важным остается исследование процессов, происходящих при такой организации рыночных отношений.

В данной статье мы исследовали модель дуополии Курно-Пу (т.е. наличие только двух фирм на олигополистическом рынке). Оказалось, что при определенных значениях отношения предельных издержек  $c_r$  фирм, в модели прослеживается хаотическое поведение ( $3 + \sqrt{8} \leq c_r \leq 25/4$ ). Поэтому мы применили DFC-метод для контроля такого хаоса на олигополистическом и исследовали некоторые особенности такого подхода.

Сначала мы показали, что существуют такие значения коэффициента обратной связи  $\kappa$ , при которых фирмы быстрее приходят к точке равновесия Курно. Эти значения близки к  $K = -0,9$  и  $K = -0,8$  и являются оптимальными почти для всех значений параметра  $c_r$  с интервала неустойчивости.

В работе мы доказали, что применение DFC-метода с двумя управляющими законами (возможность двух фирм контролировать нестабильные колебания одновременно) является неэффективным. Мы также показали, что есть определенный диапазон значений коэффициентов  $K_1$  и  $K_2$ , при которых фирмы приходят к равновесию Курно, но эти значения не являются оптимальными, поскольку для любых  $K_1$  и  $K_2$  из допустимого интервала значений необходимо больше времени, чтобы стабилизировать систему, чем в случае с одним управляющим законом.

Проведение таких исследований для модели триополии является альтернативой для дальнейшего исследования.

### Литература

1. Івашук Н.Л., Гнатів Б.В., Кавалець І.І. Побудова узагальненої моделі олігополії Курно-Пу та дослідження стійкості її точки рівноваги // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2013. (в друці)
2. Математичні моделі регулювання фінансових потоків. Монографія / Костробій П.П., Алексєєв І.В., Хома І.Б., Гнатів Б.В., Кавалець І.І., Алексєєв В.І. – Львів: Видавництво “Растр-7”, 2012. – 134 с.
3. Agiza H.N., Elsadany A.A. Chaotic dynamics in nonlinear duopoly game with heterogeneous players. Applied Math, and computation, 2004, vol. 149, pp. 843–860.
4. Agiza H.N., Elsadany A.A. Nonlinear dynamics in the Cournot duopoly game with heterogene-

- ous players. *Physica A*, 2003, vol. 320, pp. 512–524.
5. Agiza H.N, Hegazi A.S, Elsadany A.A. Complex dynamics and synchronization of duopoly game with bounded rationality. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2002, vol. 58, pp. 133–146.
  6. Agiza H.Z. Stability analysis and chaos control of Kopel map. *Chaos, Solitons and Fractals*, 1999, vol. 10, no. 11, pp. 1909–1916.
  7. Agliari A., Gardini L., Puu T. Global bifurcation in duopoly when the Cournot point is destabilized via a subcritical Neimark bifurcation. *International Game Theory Review*, 2006, vol. 8, no. 1, pp. 1–20.
  8. Agliari A. Homoclinic connections and subcritical Neimark bifurcations in a duopoly model with adaptively adjusted productions. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, vol. 29, pp. 739–755.
  9. Ahmed E., Hassan S.Z. Controlling chaos Cournot games. *Nonlinear Dyn. Psychol. Life Sci.*, 2000, vol. 4, no. 2, pp. 189–194.
  10. Angelini N., Dieci R., Nardini F. Bifurcation analysis of a dynamic duopoly model with heterogeneous costs and behavioural rules. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2009, vol. 79, pp. 3179–3196.
  11. Bischi G.I., Chiarella C., Kopel M., Szidarovszky F. *Nonlinear Oligopolies: Stability and Bifurcations*. Springer-Verlag, New York, 2009.
  12. Bischi G. I., Lamantia F., Sushko I. Border collision bifurcations in a simple oligopoly model with constraints. *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*, 2012, vol. 26, issue no. 2.
  13. Chen L., Chen G. Controlling chaos in an economic model. *Physica A*, 2007, no. 374, pp. 349–358.
  14. Cournot A.A. *Recherches sur les principes mathematiques de la theorie des richesses*. Hachette, Paris, 1838.
  15. Elabbasy E.M., Agiza H.N., Elsadany A.A., EL-Metwally H. The dynamics of triopoly game with heterogeneous players. *International Journal of Nonlinear Science*, 2007, vol. 3, no. 2, pp. 83–90.
  16. Iwaszczuk N., Kavalets I. Application of mathematical models in the study of oligopolistic market / w “Zastosowania modeli matematycznych w ekonomii, finansach i bankowości”, 2012, nr 4, s. 27-47.
  17. Iwaszczuk N., Kavalets I. Delayed feedback control method for generalized Cournot-Puu oligopoly model / in “Selected Economic and Technological Aspects of Management”, ed. N. Iwaszczuk, Krakow, 2013, pp. 108-123.
  18. Iwaszczuk N., Kavalets I. Generalized Cournot-Puu oligopoly model and stability of its equilibrium point // XIV Międzynarodowa Konferencja Naukowa Zarządzanie Przedsiębiorstwem – Teoria i Praktyka (22-23 listopada 2012, Krakow, Akademia Górniczo-Hutnicza im. St. Staszica).
  19. Iwaszczuk N., Kavalets I. Oligopolistic market: stability conditions of the equilibrium point of the generalized Cournot-Puu model. *Econtechmod*, 2013, vol. 5, no. 1, pp. 15-22.
  20. Jakimowicz A. Stability of the Cournot–Nash Equilibrium in Standard Oligopoly. *Acta Physica Polonica A*, 2012, vol. 121, pp. B-50–B-53.
  21. Matsumoto A. Controlling the Cournot-Nash Chaos. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2006, vol. 128, pp. 379–392.
  22. Matsumoto A., Szidarovszky F. Stability, Bifurcation, and Chaos in N-Firm Nonlinear Cournot Games. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2011, pp. 1–22.
  23. Onazaki T., Sieg G., Yokoo M. Stability, chaos and multiple attractors: A single agent makes a difference. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2003, vol. 27, pp. 1917–1938.
  24. Puu T. Chaos in duopoly pricing. *Chaos, Solitons and Fractals*, 1991, vol. 6, no.1, pp. 573–581.
  25. Puu T. On the Stability of Cournot Equilibrium when the Number of Competitors Increases. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 2007.
  26. Puu T., Sushko I. (Ed.s) *Oligopoly and Complex Dynamics: Models and Tools*. Springer, New York, 2002.
  27. Rosser J.B. The development of complex oligopoly dynamics theory. In *Text Book Oligopoly Dynamics: Models and Tools*. Springer-Verlag, 2002.
  28. Sonis M. *Linear Bifurcation Analysis with Applications to Relative Socio-Spatial Dynamics*. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 1997, vol. 1, pp. 45-56.

29. Tramontana F., Gardini L., Puu T. New properties of the Cournot duopoly with isoelastic demand and constant unit costs. Working Papers Series in Economics, Mathematics and Statistics. WP-EMS, 2010, no. 1006.
30. Tramontana F. Heterogeneous duopoly with isoelastic demand function. Economic Modelling, 2010, vol. 27, pp. 350–357.

*Надійшла до редколегії 25.12.2012 р.*

**Рецензент:** д.т.н., проф. Петров А.С.

**Наталія Іващук, Ірина Кавалець**

**МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ КОНТРОЛЮ НЕСТАБІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ В КОНКУРУЮЧИХ СИСТЕМАХ**

Робота присвячена застосуванню математичних методів до керування нестабільністю систем, які конкурують між собою. Основна увага приділяється методу керування зі зворотнім зв'язком із затримкою (DFC-метод), а саме, розглядається застосування цього методу з одним та двома керуючими законами до моделі дуополії. В результаті показано як швидкість встановлення системи в точку рівноваги Курно залежить від вибору коефіцієнта зворотного зв'язку  $K$ .

**Ключові слова:** конкуруючі системи, дуополія, модель Курно-Пу, рівновага Курно, хаос, стійкість, метод контролю зі зворотнім зв'язком із затримкою (DFC-метод).

**Natalia Iwaszczuk, Iryna Kavalets**

**MATHEMATICAL METHODS OF CONTROL THE UNSTABLE FLUCTUATIONS IN THE COMPETING SYSTEMS**

The work is devoted to the application of mathematical methods to control the instability of the systems that compete with each other. Main attention is paid to delayed feedback control method (DFC-method), namely, the application of this method with one and two control laws to duopoly model is considered. As a result it is shown as the rate of coming the system at the Cournot equilibrium depends on the choice of the feedback coefficient  $K$ .

**Keywords:** competing systems, duopoly, Cournot-Puu model, Cournot equilibrium, chaos, stability, delayed feedback control method (DFC-method).