УДК 519.6

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ МЕТОДУ МОНТЕ-КАРЛО ТА МЕТОДУ ДОВІРЧИХ ЕЛІПСОЇДІВ ПРИ ОЦІНЮВАННІ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ ПРИДАТНОСТІ РЕК

С.Я.Крепич, М.П.Дивак

Тернопільський національний економічний університет

msya220189@rambler.ru, mdy@tneu.edu.ua

Розглянуто задачу оцінювання функціональної придатності РЕК за допомогою методу Монте-Карло та методу довірчих еліпсоїдів. Проведено порівняльний аналіз зазначених методів з точки зору обчислювальної складності їх реалізації. Показано, що при однаковій точності, метод Монте-Карло у порівнянні з методом довірчих еліпсоїдів на порядок більш затратний у сенсі часової складності його реалізації.

Ключові слова: функціональна придатність, метод Монте-Карло, метод довірчих еліпсоїдів.

The problem of evaluating functional reliability REC using the Monte Carlo method and confidence ellipsoids. It was made comparative analysis of these methods in terms of computational complexity of their implementation. It is shown that with the same accuracy, Monte Carlo method in comparison with confidence ellipsoids is more costly in terms of time complexity of its implementation.

Keywords: functional suitability, Monte-Carlo method, confidence ellipsoid method.

Рассмотрено задачу оценивания функциональной пригодности РЭК с помощью метода Монте-Карло и метода доверительных эллипсоидов. Проведено сравнительный анализ указанных методов с точки зрения вычислительной сложности их реализации. Показано, что при одинаковой точности, метод Монте-Карло в сравнении с методом доверительных эллипсоидов на порядок более затратный в смысле временной сложности его реализации.

Ключевые слова: функциональная пригодность, метод Монте-Карло, метод доверительных эллипсоидов.

Вступ

Поняття «функціональна придатність» або «надійність» пристрою є усталеними в інженерній практиці. Переважно технічний пристрій виготовляють розраховуючи на його довгострокове використання для практичних цілей. Проте поняття «довгострокове використання» для різних пристроїв трактується по різному, в залежності від складності та призначення технічного пристрою. Спираючись на відому класифікацію [1], пристрої поділяють на:

- пристрої, для котрих надійність не є важливою характеристикою;
- пристрої, низька надійність котрих може призвести до суттєвих економічних витрат;
- пристрої, недостатньо висока надійність котрих взагалі не припустима.

У праці розглядатимемо радіоелектронні кола (РЕК) - пристрої, в яких надійність відіграє надзвичайно важливу роль, як певну систему (сукупність елементів), що взаємодіють між собою в процесі виконання заданих функцій. Звідси функціональна придатність – властивість системи (об'єкту) зберігати в просторі та часі у встановлених межах значення усіх параметрів, які характеризують здатність виконувати певні функції в заданих режимах та умовах експлуатації [2].

Певний час для оцінювання функціональної придатності РЕК використовували якісні оцінки (висока або низька надійність), що унеможливлювало її об'єктивну оцінку. Встановлення кількісного показника функціональної придатності та способів його вимірювання і розрахунку поклало початок науковим методам в дослідженні функціональної придатності. Існуючі підходи [3,4] ґрунтуються на розрахунку показника функціональної придатності на основі обчислення багатовимірного інтеграла, залежно від кількості характеристик системи. Серед них, наближені методи, зокрема метод Монте-Карло. Так само, на даний час, показник функціональної придатності системи можна отримати методом довірчих еліпсоїдів [5]. Кожен із зазначених методів дає можливість встановити характеристики функціональної придатності із заданою точністю. Проте не дослідженим залишається питання часової складності реалізації кожного методу, яке особливо є актуальним для складних систем.

За цих умов актуальною постає задача порівняння двох вище зазначених методів на прикладі оцінювання функціональної придатності РЕК на основі аналізу випадкових відхилень параметрів РЕК від номінальних.

1. Аналіз методів оцінювання функціональної придатності

Метод Монте-Карло. Поява методів імітаційного моделювання (Монте-Карло) в різноманітних областях прикладної математики, як правило, пов'язана з необхідністю вирішення якісно нових практичних задач. Метод Монте-Карло – це чисельний метод розв'язування математичних задач (систем алгебричних, диференціальних, інтегральних рівнянь) і прямого імітаційного моделювання (фізичних, хімічних, біологічних, економічних, соціальних процесів) за допомогою отримання та перетворення випадкових чисел.

Неперервний випадковий процес – роботу системи до відмови (збою) описують різними законами розподілу в залежності від властивостей системи та її елементів, умов роботи, характеру відмов та інші. При аналізі функціональної придатності елементів систем найчастіше використовують такі закони розподілів випадкових величин: експоненціальний розподіл, нормальний розподіл, розподіл Вейбула тощо[6].

Загальна схема методу Монте-Карло заснована на центральній граничній теоремі теорії ймовірності, яка стверджує, що випадкова величина

$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$ дорівнює сумі великої кількості N довільних випадкових величин X_i з однаковими математичними сподіваннями m та дисперсіями σ^2, завжди розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням $N \cdot m$ та дисперсією $N \cdot \sigma^2$. Нормальний закон розподілу характеризується щільністю імовірності [7]:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$

де m -математичне сподівання величини X, а σ^2 - дисперсія величини X.

Основу методу Монте-Карло складає генератор випадкових чисел. Генерація довільного випадкового числа складається з двох етапів [8]:

- генерація нормалізованого випадкового числа (рівномірно розподіленого від 0 до 1);
- перетворення випадкового числа в довільний закон розподілу .

Генератор псевдовипадкових чисел (ГПВЧ) – алгоритм, що генерує послідовність, елементи якої майже незалежні один від одного і відповідають заданому закону. На практиці у більшості випадків застосовують програмні методи генерації. Одним з таких в середовищі Microsoft Visual Studio є параметрична функція генерування випадкових чисел – random. Зокрема, функція *MVNRND* – функція генерації псевдовипадкових чисел за багатовимірним нормальним розподілом.

Синтаксис цієї функції такий: $R = mvnrnd(MU, SIGMA, cases)$ генерує матрицю псевдовипадкових чисел з розмірністю $cases \times n$, які розподілені за багатовимірним нормальним законом розподілу з параметрами математичного сподівання MU та коваріаційною матрицею $SIGMA$. Розмірність матриці MU $1 \times n$. Матриця $SIGMA$ повинна бути квадратною та додатно-означеною, розмірності $n \times n$.

До основних переваг методу Монте-Карло слід віднести такі:

- урахування в повній мірі функціонування досліджуваних систем;
- прості схеми обчислюваного алгоритму;
- можливість моделювання випадкових величин із заданими законами розподілу;
- незначна чутливість до випадкових відмов обчислювального засобу в процесі моделювання.

Однак поруч з вище зазначеними перевагами, метод Монте-Карло має певні недоліки, найбільш суттєвими з яких є: частковий характер розв'язку; зростання обчислювальної складності із збільшенням числа ітерацій [9].

Знизити ступінь впливу або й зовсім уникнути вище зазначених недоліків на достовірність розв'язку задачі оцінювання функціональної придатності пристрою дає можливість комбінування методів інтервального аналізу та методу довірчих еліпсоїдів.

Метод довірчих еліпсоїдів. Суть методу полягає у побудові допускової області параметрів РЕК, при яких РЕК залишається функціонально придатним, на основі аналізу інтервальних даних з подальшим вписуванням у цю область еліпсоїда розсіювання випадкових відхилень вектора параметрів від номінальних значень. Співставлення допускової області та довірчого еліпсоїда дає можливість оцінити кількісно функціональну придатність РЕК.

Розглянемо РЕК у вигляді чорної скриньки - як це показано на рисунку 1.

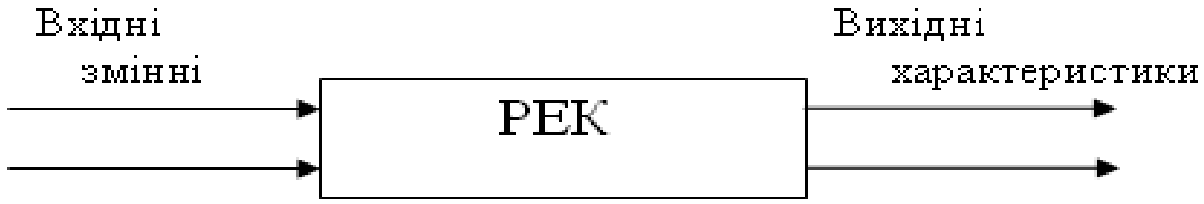

Рис.1. Модель РЕК у вигляді «чорної скриньки».

Вхідними змінними виступають номінальні значення параметрів елементів РЕК, зокрема опору, ємності, індуктивності тощо. Вихідними характеристиками можуть слугувати для прикладу коефіцієнт загасання на певній частоті, амплітудно-частотна характеристика РЕК, напруги та струми на елементах тощо.

Традиційно, при встановленні допусків на радіоелементи РЕК, задаються обмеження на вихідні характеристики у вигляді[7]:

$$y_i \in [y_i^-, y_i^+], i = 1,..., N \tag{2}$$

та встановлюють залежність між значеннями параметрів та відповідними вихідними характеристиками

$$y_i = g_i(\vec{b}), i = 1,..., N. \tag{3}$$

Враховуючи, що в загальному випадку характеристики РЕК є нелінійними, то доцільним є застосування лінеаризації характеристик РЕК та перехід до лінійної системи нерівностей у такому вигляді:

$$\delta\vec{Y}^- \leq S \cdot \delta\vec{b} \leq \delta\vec{Y}^+, \tag{4}$$

де $\delta\vec{Y}^- = \{\delta y_i^-, i = 1,..., N\}, \delta\vec{Y}^+ = \{\delta y_i^+, i = 1,..., N\}$ - вектори, складені із верхніх та нижніх меж інтервалів відхилень вихідних характеристик від номінальних; $S = \{S_{ij}, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, m}\}$ - відома матриця значень похідних функцій $g_i(\vec{b})$, які отримують в процесі лінеаризації у точці $\vec{b}_0$- номінальних значень параметрів; $\delta\vec{b} = (\delta b_1,..., \delta b_m)^T$ - вектори відносних відхилень параметрів РЕК від номінальних.

За умови сумісності системи (4) областю її розв'язків є область Ω параметрів РЕК у такому вигляді [10]:

$$\Omega = \left\{ \vec{\delta b} \in R^m \middle| \vec{\delta Y}^- \le S^T \cdot \vec{\delta b} \le \vec{\delta Y}^+ \right\} \quad (5)$$

На рисунку 2 проілюстровано розв'язок цієї задачі для двох параметрів.

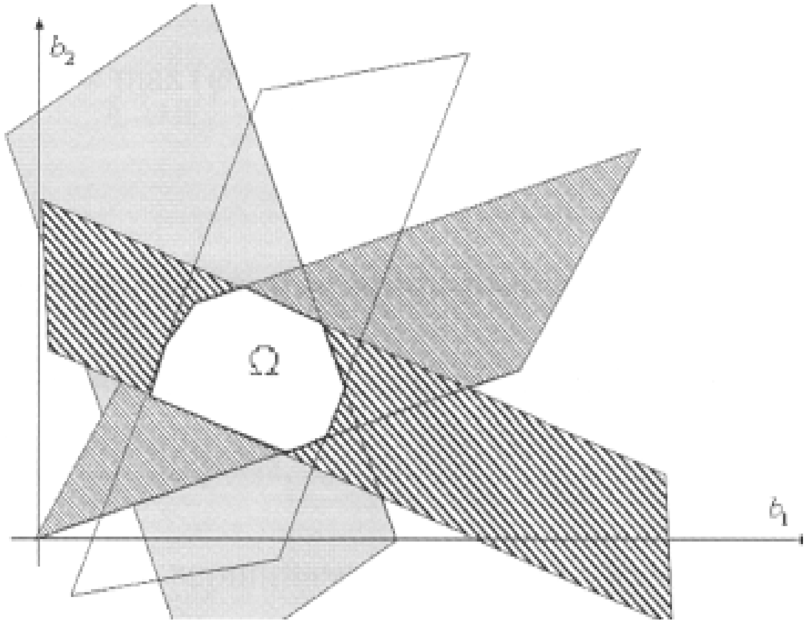

Рис. 2. Ілюстрація області Ω для $m = 2, N = 4$.

Зважаючи на складність опису області допустимих значень параметрів РЕК при збільшенні кількості параметрів та обмежень на характеристики РЕК доцільно використовувати наближені множинні оцінки цієї області. Проте на практиці, переважно кількість обмежень на характеристики РЕК не перевищує кількості параметрів. За цих умов допускову область параметрів можна довизначити у вигляді паралелотопа (для двовимірного випадку - паралелограм). Таке представлення допускової області для випадку нормального закону розподілу випадкових відхилень параметрів від номінальних забезпечує суттєве спрощення аналізу надійності та функціональної придатності РЕК. Розглянемо детально особливості зазначеного методу [5].

Нехай випадкові відхилення параметрів РЕК від номінальних розподілені за нормальним законом. Тоді, ці відхилення в n-вимірному евклідовому просторі R^n доцільно описати довірчим еліпсоїдом [11]:

$$Q(\alpha, m) = \{ \vec{\delta b} \in R^n \Big| (\vec{\delta b} - \vec{\vec{\delta b}})^T \cdot D(\vec{\delta b}) \cdot (\vec{\delta b} - \vec{\vec{\delta b}}) \le \chi^2(\alpha, m) \} \quad (6)$$

де $\chi^2(\alpha, m)$- квантиль χ^2 -розподілу; $D^{-1}(\vec{\delta b})$- коваріаційна матриця випадкового вектора $\vec{\delta b}$; $\vec{\vec{\delta b}}$ - центр еліпсоїда.

Досить часто інтервали вихідних характеристик РЕК симетричні відносно своїх номінальних значень, звідси центр симетрії допускової області та еліпсоїда збігаються і знаходяться в нульовій точці, що є необхідним аби вписаний еліпсоїд дотикався до всіх граней допускової області.

У праці [12] розглянуто метод оцінювання функціональної приданості РЕК у випадку відомої коваріаційної матриці технологічних чи експлуатаційних відхилень вектора параметрів від номінальних значень. Встановлена умова належності довірчої області до допускової:

$$\chi^2(\alpha, m) = 1 \Big/ \max_{i=1,..,m}\{\Lambda'_{ii}\} \tag{7}$$

із якої функціональну придатність РЕК визначають як довірчу ймовірність α для обчисленого значення квантиля $\chi^2(\alpha, m)$.

У формулі (7) Λ'_{ii} - діагональні елементи матриці :

$$\Lambda' = E^{-1} \cdot S \cdot D^{-1}(\delta\vec{b}) \cdot S^T \cdot E^{-1}. \tag{8}$$

Тепер перейдемо до порівняльного аналізу обчислювальної складності вище розглянутих методів.

2. Порівняльний аналіз методів оцінювання функціональної придатності

Для порівняння двох вище описаних методів розглянемо функціональну придатність фільтра нижніх частот з паралельно з'єднаними елементами, схема якого наведена на рисунку 3. Номінальні значення резистора $R_0 = 0{,}5кОм$ та конденсатора $C_0 = 0{,}5мкФ$. Номінальні значення модуля коефіцієнта передачі розглянуто на двох частотах: $f_1 = 1000Гц,\ f_2 = 2000Гц$. Вимогою до функціональної придатності фільтра є допустиме відхилення модуля коефіцієнта передачі в межах 15% від номінального значення на вказаних частотах.

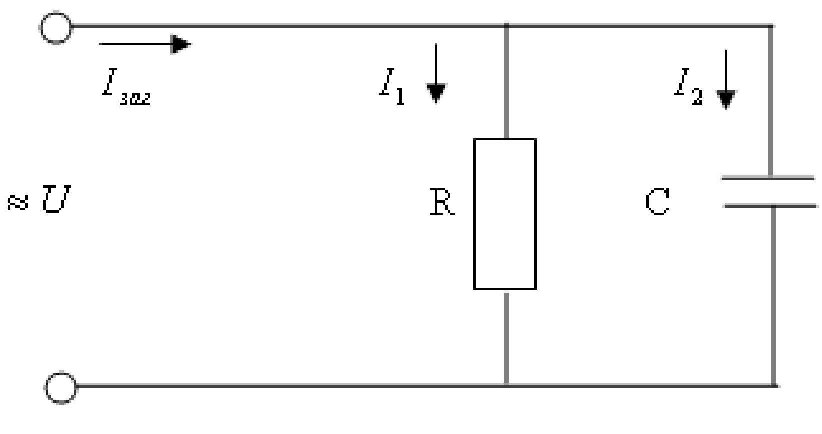

Рис.3. Схема фільтра нижніх частот.

Амплітудно-частотна характеристика для номінальних значень параметрів елементів фільтра нижніх частот має такий вигляд:

$$|K| = \frac{1 + R^2 w^2 C^2}{R^2 + w^2 C^2} \Rightarrow K_{oi} = \sqrt{\frac{1 + R^2 w^2 C^2}{R^2 + w^2 C^2}} \tag{9}$$

Користуючись формулою (9) та вимогою до функціональної придатності фільтра, складемо таблицю результатів обчислення модуля коефіцієнта передачі для двох частот та допустимого відхилення цього модуля від номінального значення.

Таблиця 1.

Результати обчислення модуля коефіцієнта передачі

i	f_i	K_{0i}	K_{0i}^-	K_{0i}^+	δK_i^-	δK_i^+
1	1000	0,0037	0,0032	0,0043	-0,00056	0,00056
2	2000	0,0066	0,0056	0,0076	-0,00099	0,00099

Враховуючи нелінійність характеристики фільтра за параметрами, проведемо її лінеаризацію в околі номінальних значень параметрів та визначимо чутливість характеристик фільтра на зміну параметрів у вигляді матриці S:

$$S = \begin{pmatrix} -0{,}0011 & 0{,}0026 \\ -0{,}0006 & 0{,}006 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Користуючись таблицею 1, обчислимо діагональну матрицю E:

$$E = \begin{pmatrix} 0{,}00056 & 0 \\ 0 & 0{,}00099 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Спираючись на формулу (4) складемо систему нерівностей:

$$\begin{pmatrix} -0{,}00056 \\ -0{,}00099 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} -0{,}0011 & 0{,}0026 \\ -0{,}0006 & 0{,}006 \end{pmatrix} \cdot \delta\vec{b} \le \begin{pmatrix} 0{,}00056 \\ 0{,}00099 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

де $\delta\vec{b} = (\delta R, \delta C)^T$.

Тепер задамо коваріаційну матрицю відхилень параметрів радіоелементів від номінальних (в процесі виготовлення чи експлуатації):

$$D^{-1}(\delta\vec{b}) = \begin{pmatrix} 0{,}16 & 0{,}04 \\ 0{,}04 & 0{,}012 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Необхідно зауважити, що діагональними елементами коваріаційної матриці є дисперсії відносних відхилень параметрів РЕК від номінальних.

З метою проведення порівняльного аналізу обчислювальної складності вище описаних методів розроблено їх алгоритмічні реалізації із застосуванням мови програмування C#. В результаті реалізації методу довірчих еліпсоїдів за формулами (7-8) встановлено значення квантиля: $\chi^2(\alpha,m) = 4{,}84$. Користуючись таблицями χ^2-розподілу, встановлюємо імовірність функціональної придатності РЕК: $P = 94\%$.

Слід зауважити, що зазначений метод дає точне значення імовірності функціональної придатності.

Далі для оцінювання функціональної придатності застосовували метод Монте-Карло. На рисунку 4 графічно зображено результати застосування методу Монте-Карло. Встановлено імовірність функціональної придатності фільтра нижніх частот: $P = 94{,}1\%$. При цьому кількість згенерованих випадкових чисел близько 500 тис.

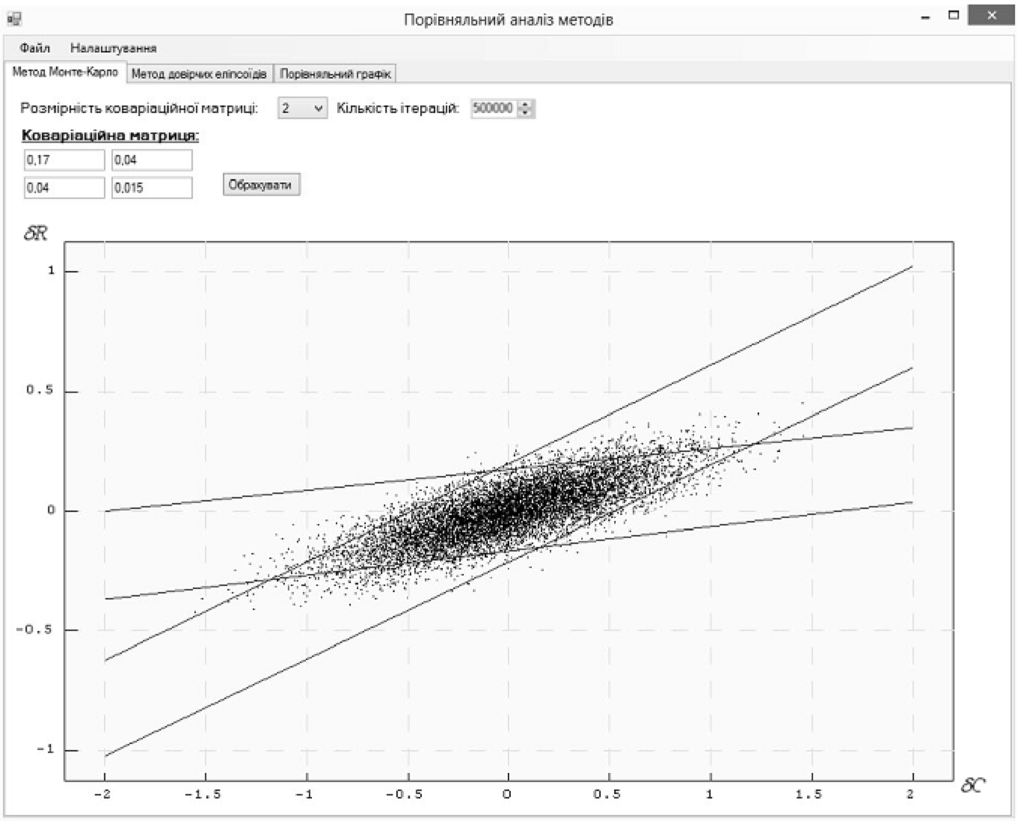

Рис.4. Приклад генерації довільних випадкових чисел згідно нормального закону розподілу.

Зіставлення результатів застосування методу Монте-Карло та методу довірчих еліпсоїдів для оцінювання функціональної придатності фільтра нижніх частот графічно проілюстровано на рисунку 5.

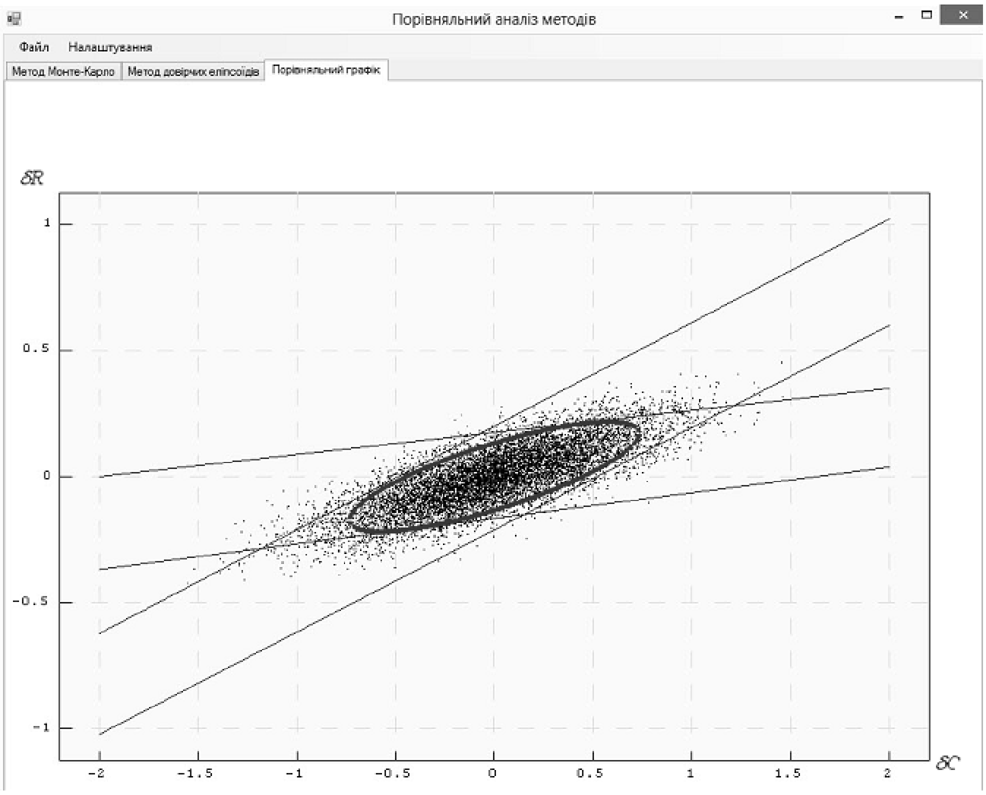

Рис.5. Ілюстрація до порівняння двох методів.

Жирною лінією зображено довірчий еліпсоїд (6), отриманий для квантиля $\chi^2(\alpha,m)=4{,}84$. Як бачимо, еліпсоїд знаходиться в межах допускової області, яка утворюється внаслідок перетину смуг, визначених попарно паралельними прямими і є допусковою областю параметрів. Досягнута точність для оцінювання імовірності функціональної придатності для обох методів є однаковою.

Тепер порівняємо часову складність обох методів.

Для реалізації обох методів використовувався ПК: Тип комп'ютера - ACPI x64-based PC (Mobile), тип процесора - Mobile DualCore Intel Core i5-2410M, 2655 MHz (27 x 98), назва системної плати - Mobile DualCore Intel Core i5-2410M, 2655 MHz (27 x 98), чіпсет системної плати - Intel Cougar Point HM67, Intel Sandy Bridge, системна пам'ять - 8106 MB (DDR3-1333 DDR3 SDRAM). У методі Монте-Карло, для генерування близько 500 тис. точок було затрачено близько 13,5 секунд. Для досягнення цієї ж точності при реалізації методу довірчих еліпсоїдів, на зазначеному ПК було затрачено близько 0,6 секунд, що в 22 рази менше ніж у методі Монте-Карло.

На рисунку 6 наведена стовпчикова діаграма, яка показує зміну часової складності реалізації методу Монте-Карло в залежності від кількості згенерованих точок. На цій же діаграмі для порівняння показано часову складність для методу довірчих еліпсоїдів. Як бачимо, навіть у випадку генерування в методі Монте-Карло 1 тис. точок часова складність його реалізації буде вищою у порівнянні з методом довірчих еліпсоїдів.

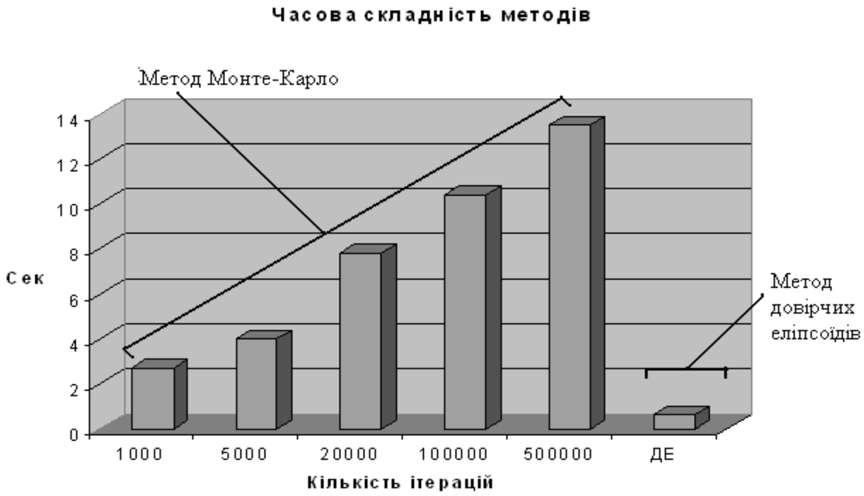

Рис.6. Порівняння часової складності реалізації методу Монте-Карло та методу довірчих еліпсоїдів.

3. Висновки

Проведено аналіз методів оцінювання функціональної придатності РЕК в результаті якого встановлено, що математично зазаначена задача є задачею обчислення багатовимірного інтеграла. Обгрунтовано для її розв'язування застосовувати метод Монте-Карло та метод довічих еліпсоїдів.

Проведено порівняльний аналіз часової складності реалізації методу Монте-Карло та методу довірчих еліпсоїдів. На конкретному прикладі оцінювання функціональної придатності фільтра нижніх частот показано, що для забезпечення однакової точності , часова складність реалізації методу Монте-Карло переважає часову складність реалізації методу довірчих еліпсоїдів у 22 рази.

Враховуючи суттєве зростання часової складності реалізації методів оцінювання функціональної придатності при підвищенні складності РЕК (збільшення кількості елементів) доцільно для цих цілей використосувати метод довірчих еліпсоїдів.

Література

1. Бичков А.А. Надійність систем і пристроїв/ А.А.Бичков. – Ростов-на-Дону: Навчальний посібник, 2008. – 84с.

2. http://reliability-theory.ru/topics/t7r1part1.html

3. Воропай О.Ю. Математичне забезпечення автоматизованих процедур призначення допусків при проектуванні радіоелектронних пристроїв частотної селекції./О.Ю.Воропай// Автореф.дис..канд.техн.наук О.Ю.Воропай. – Львів, 2008. – 20с.

4. Yuriy Bobalo. Analysis of quality of radio electronic devices in multistage production systems/ Yu.Bobalo, M.Kiselychnyk, L.Nedostup. - Przegląd Elektrotechniczny, 2010, nr 1, 124-127

5. Дивак М.П. Задачі математичного моделювання статичних систем із інтервальними даними/ М.П.Дивак. – Тернопіль: Видавництво ТНЕУ «Економічна думка», 2011. – 216с.

6. http://www.msiu.ru/~belova/compmod/lect1_0.pdf

7. Дивак М.П. Організація допусків на параметри радіоелектронних кіл на основі допускового еліпсоїдного оцінювання/ М.П.Дивак, І.Я.Співак, Р.П.Шевчук, С.Я.Максимова// ПНМК «Інформаційні проблеми комп'ютерних систем, юриспруденції, енергетики, економіки, моделювання та управління» - м.Бучач-Яремча, 2011р. – С.344-349

8. http://matlab.exponenta.ru/statist/book2/5/mvnrnd.php

9. Венцель Е.С.Теорія ймовірності./Е.С.Венцель. – М.: Наука, 1969. – 576с.

10. Дивак М.П. Еліпсоїдне оцінювання допусків параметрів радіоелектронних кіл/ М.П.Дивак, О.Л.Козак // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2009. – Том 11, №1. – С.93-104.

11. http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_mathematics/4688

12. S. Krepych. Analysis of the tolerance area parameters REC based on technological area scattering/ S.Ya. Krepych, P.H. Stakhiv, I.Ya. Spivak// CADSM'13.- Polyana Svalyava (Zakarpattya) February 19-23, 2012. – P.179-180.