

УДК 539.595

В. В. Губська

**ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ КОНІЧНОГО РЕЗЕРВУАРУ І РІДИНИ З
ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ ПІД ДІЄЮ ПЕРИОДИЧНОГО
НАВАНТАЖЕННЯ**

Вступ

Для багатьох видів інженерних систем, пов'язаних із транспортуванням рідких вантажів, постає проблема динаміки, викликана коливаннями рідини з вільною поверхнею. Прикладом таких інженерних конструкцій є баки з рідиною у складі космічних апаратів з рідинним двигуном, літаків, гелікоптерів, танкерів та інших транспортних засобів. Проблема коливань конструкцій з рідиною викликає інтерес щодо впливу коливань рідкого палива на льотно-технічні характеристики реактивних транспортних засобів та їх керування. В більшості випадків рідина не

повністю заповнює баки таких систем і при транспортуванні виникають коливання вільної поверхні рідини. При великій відносній масі рідини її хвильові рухи можуть суттєво впливати на динаміку транспортного засобу. Це висуває додаткові вимоги до системи управління і може бути причиною небажаних режимів руху і навіть аварійних ситуацій. Тому необхідно володіти високодостовірною моделлю процесів у системах резервуар–рідина, зручною для теоретичного аналізу та чисельної реалізації.

Розглядається задача про вимушені нелінійні коливання резервуару у формі усіченого конуса і рідини з вільною поверхнею при їх сумісному русі. Поведінка системи розглядається в рамках нелінійної моделі на тривалому проміжку часу. В роботах [2], [4], [6] дослідження усталених коливань проводилися за припущенням, що вони відбуваються в системі лише з частотами кратними частоті вимушених коливань. Експериментальні дослідження останніх років [5], [8] показали, що при збудженні коливань за основним тоном обов'язково відбувається збудження вищих гармонік спектру з власними частотами, які можуть бути не кратними частоті збудження системи. Зокрема для випадку резервуару прямокутної форми показано, що в реальних системах вихід на усталений режим коливань вільної поверхні не проявляється в чистому вигляді [5]. Для вивчення задачі використано модель [1], [7], яка була протестована на прикладі перехідних процесів для задач динаміки резервуарів у формі тіл обертання з рідиною з вільною поверхнею.

Постановка задачі дослідження

Ставиться задача дослідити на тривалому проміжку часу поведінку системи при гармонічному збудженні руху силою, прикладеною до резервуару, а також при збудженні руху періодичною силою, що змінюється за пилообразним законом $\arcsin(\sin\omega t)$. Поведінку системи розглянуто для частот в дорезонансному діапазоні, в малому околі резонансної частоти, а також для частот більших за резонансні.

Метод дослідження

Розглядається резервуар у формі усіченого конуса. Нехай τ – область, яку займає рідина; S_0 і S – вільна поверхня рідини в її збуреному і незбуреному русі; Σ і Σ_0 – границі контакту рідини зі стінками резервуару у збуреному та незбуреному стані ($\Delta\Sigma$ – зміна контакту рідини, зумовлена збуренням руху, $\Sigma = \Sigma_0 + \Delta\Sigma$), $\xi(x, y, z, t) = 0$ – рівняння вільної поверхні рідини. Поступальний рух резервуара описується вектором переміщень $\vec{\epsilon}$. Припускається, що рідина ідеальна, однорідна, нестислива і в початковий момент часу вихрові рухи відсутні. В цьому випадку кінематика рідини може бути описана потенціалом швидкостей. Резервуар є абсолютно твердим тілом з абсолютно жорсткими стінками.

Постановка задачі [1]:

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \tau; \quad (1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{n} \text{ на } \Sigma; \quad (2)$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \vec{\nabla}\xi \cdot \vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \text{ на } S; \quad (3)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2 - \vec{\nabla}\varphi \cdot \dot{\vec{\varepsilon}} - \vec{g} \cdot \vec{r} = 0 \text{ на } S. \quad (4)$$

Тут рівняння (1) відповідає вимозі нерозривності потоку в об'ємі рідини τ , (2) – умова неперетікання на твердій межі контакту тіло – рідина Σ , (3) – умова неперетікання на вільній збуреній поверхні рідини S , (4) – динамічна гранична умова, яка відповідає рівності тисків на вільній поверхні рідини і тиску атмосфери над нею.

З точки зору аналітичної механіки задача складається з кінематичних умов (механічних в'язей) (1) – (3), які необхідно задовольнити до застосування варіаційного принципу, і динамічної умови (4), яка є природною для варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського.

Для вивчення задачі використано модель [1], [7], яка була протестована на прикладі перехідних процесів для задач динаміки резервуарів у формі тіл обертання з рідиною з вільною поверхнею. Математична модель представлена в амплітудних параметрах a_i коливань рідини та руху резервуара $\vec{\varepsilon}$:

$$\sum_{n=1}^N p_m(a_k, t) \ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_m(a_k, t) \ddot{\varepsilon}_{n-N} = q_r(a_k, \dot{a}_l, t), r = \overline{1, N+3}. \quad (5)$$

При цьому коефіцієнти p_m визначаються через алгебраїчні форми від першого до третього порядків з коефіцієнтами, які визначаються через квадратури від форм коливань (координатних функцій). Для побудови координатних функцій був використаний метод допоміжної області, який на відміну від класичного методу враховує виконання умови неперетікання вище рівня незбуреної вільної поверхні. Для оцінки точності отриманого розв'язку приймалася похибка у вигляді $\delta = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \Big|_{\Sigma} / \max \frac{\partial\varphi}{\partial n} \Big|_{S_0}$. Отримані

функції з точністю 10^{-5} і вище задовольняють умові неперетікання на стінці, і з точністю порядку 10^{-3} на продовженні стінки над вільною поверхнею. За умови використання методу допоміжної області, похибки умови неперетікання вище рівня вільної поверхні вдалося покращити в 100-500 разів в порівнянні з класичним підходом.

Дослідження виходу системи на усталений режим під дією періодичної сили

Розглянемо усічений конічний резервуар з радіусом нижньої основи 0,2 м, а верхньої основи – 1 м. Рух резервуару відбувається в горизонтальній площині під дією періодичної сили, прикладеної до резервуару, що змінюється за законом $\arcsin(\sin\omega t)$, а також (для порівняння) за гармонічним законом $(\sin\omega t)$. Розглядається поведінка системи за 50-80 періодів коливань по головній формі. Частота зовнішнього збурення приймається близькою до резонансної, яка становить $\Omega_0 = 3,328$ 1/с. Приймаємо, що зовнішня періодична сила має амплітуду коливань $0,5(M_p + M_{жс})$ Н; співвідношення мас резервуару і рідини $M_p = 0,2M_{жс}$.

Проаналізуємо амплітуди збурень рідини на стінці резервуару в часі. На рис. 1, рис. 2 показано зміну амплітуди збурень рідини на стінці резервуару в часі на періоді до 150 с (приблизно 80 періодів коливань за першою формою). Для більш детального вивчення на рис. 3, а та рис. 3, б розглянуті ці ж значення на меншому інтервалі часу.

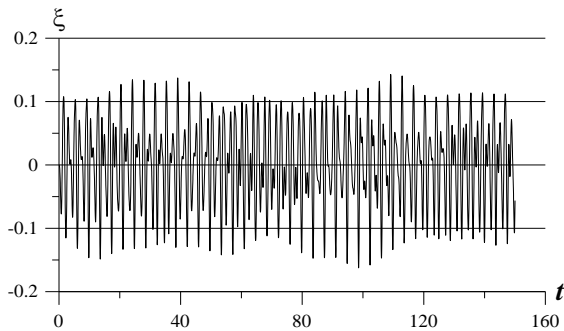


Рис. 1. Зміна амплітуди збурень рідини з часом для резонансного випадку, збудження руху періодичною силою $(2/\pi)\arcsin(\sin\omega t)$

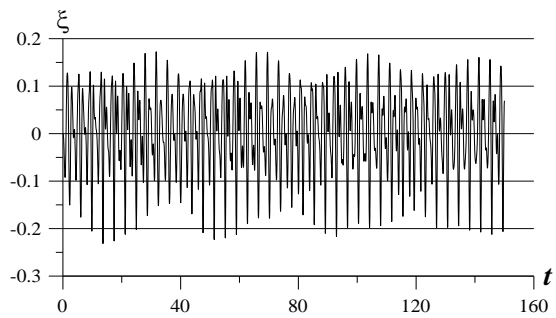
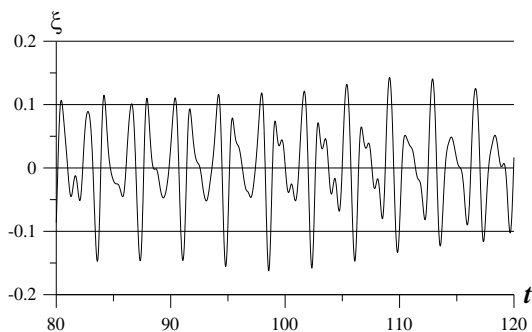
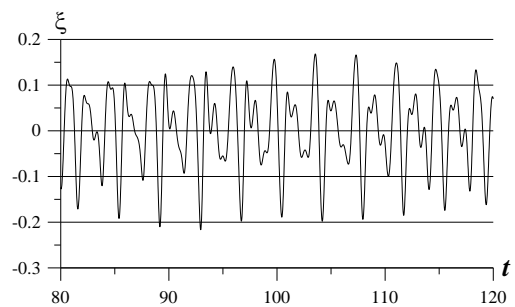


Рис. 2. Зміна амплітуди збурень рідини з часом для резонансного випадку, збудження руху періодичною силою $\sin\omega t$



а)



б)

Рис. 3. Зміна амплітуди збурень рідини з часом для резонансного випадку, часовий проміжок 80-120 с

З графіків видно, що усталені коливання в системі практично не спостерігаються. На фоні квазіперіодичного процесу, що практично

співпадає з частотою коливань по першій формі, помітний істотний прояв вищих форм з періодами не кратними періоду зовнішнього збудження, що в кінцевому підсумку приводить до того, що усталені режими коливань відсутні для обох випадків. При збудженні руху періодичною силою за законом $(2/\pi)\arcsin(\sin \omega t)$ максимальні амплітуди коливань зменшуються, порівняно з дією періодичної сили за законом $\sin \omega t$. Також помітна зміна середнього значення амплітуди для випадку періодичної сили $(2/\pi)\arcsin(\sin \omega t)$.

Розглянемо також випадок, коли частота зовнішнього збудження менша за резонансну і становить $\Omega_0 = 2 \text{ 1/c}$, $M_p = 0,2M_{жс}$, амплітуду зміни сили прийнято $0,5(M_p + M_{жс})\text{H}$ (рис. 4, рис. 5). На рис. 6, а, б зміна амплітуд на менших часових проміжках показана більш детально.

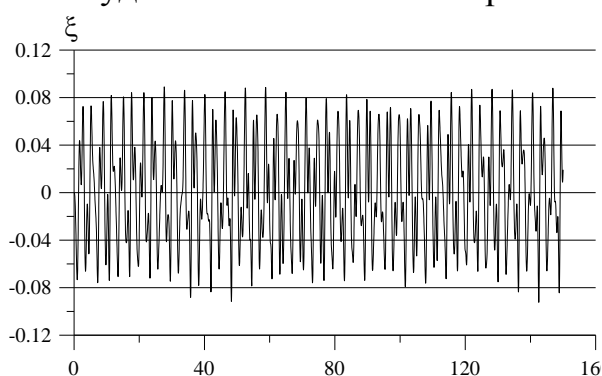


Рис. 4. Зміна амплітуди збурень рідини з часом для дорезонансного випадку, збудження руху періодичною силою $(2/\pi)\arcsin(\sin \omega t)$

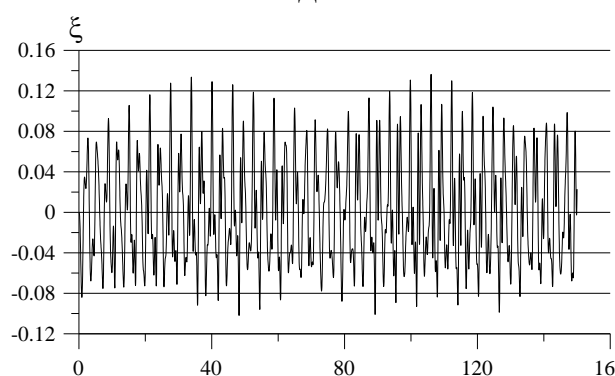
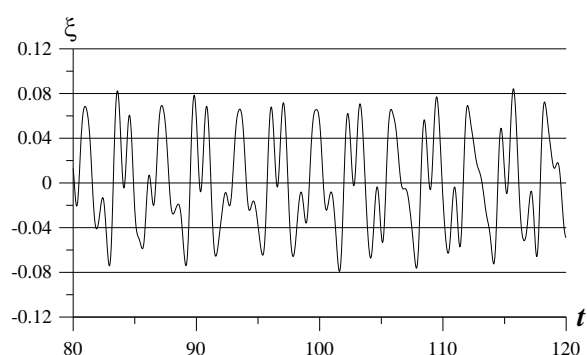
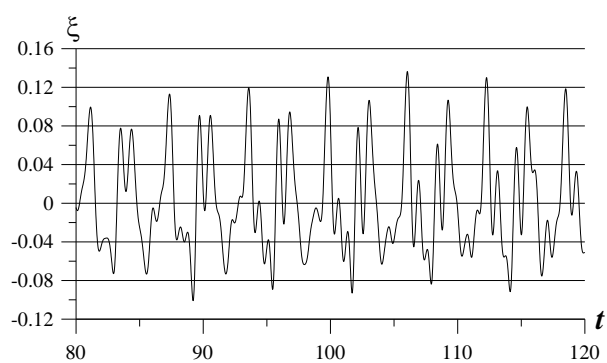


Рис. 5. Зміна амплітуди збурень рідини з часом для дорезонансного випадку, збудження руху періодичною силою $\sin \omega t$



а)



б)

Рис. 6. Зміна амплітуди збурень рідини з часом для дорезонансного випадку, часовий проміжок 80-120 с

Для дорезонансного випадку спостерігається зміна середнього значення амплітуди коливань, також можна відмітити значний вплив

вищих гармонік на коливальний процес (проявляються супергармоніки та двугорбі піки), присутня модуляція, виходу на усталений режим коливальних не відбувається. Відбувається зменшення максимальних амплітуд коливальних при збудженні руху періодичною силою $(2/\pi)\arcsin(\sin \omega t)$, порівняно з дією періодичної сили за законом $\sin \omega t$.

Нехай частота зовнішнього збурення більша за резонансну частоту і становить $\Omega_0 = 4$ 1/с, амплітуда сили для даного прикладу складала $0,2(M_p + M_{ж})$ Н, $M_p = 0,2M_{ж}$ (рис. 7, рис. 8). На рис. 9, а, рис. 9, б показано зміну амплітуд на менших часових інтервалах.

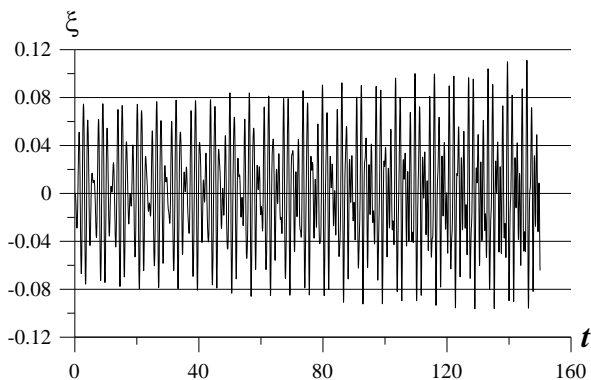


Рис. 7. Зміна амплітуди збурень рідини з часом для дорезонансного випадку, збудження руху періодичною силою $(2/\pi)\arcsin(\sin \omega t)$

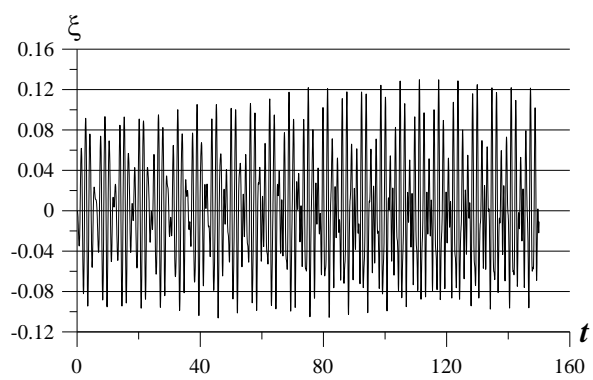
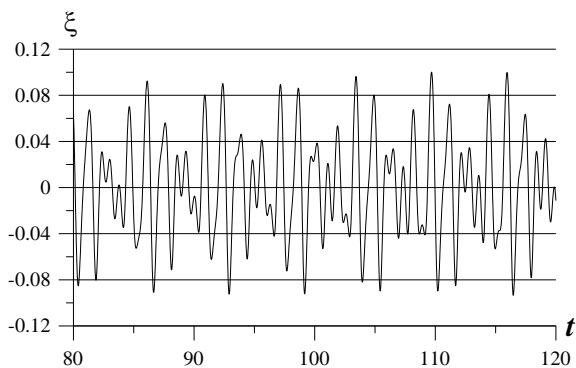
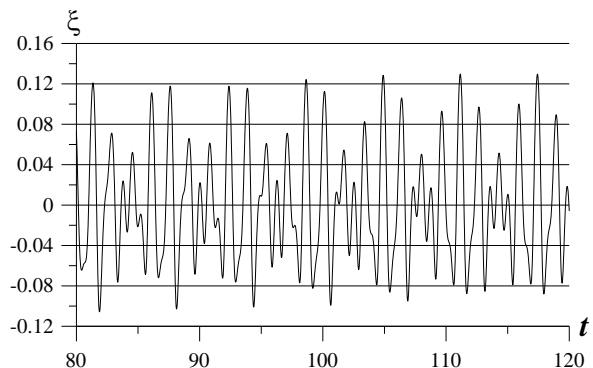


Рис. 8. Зміна амплітуди збурень рідини з часом для дорезонансного випадку, збудження руху періодичною силою $\sin \omega t$

Для розглянутих коливальних процесів характерна виражена модуляція та практично незмінне середнє значення амплітуди, вплив вищих гармонік значний і проявляється суттєво на проміжку часу далекому від початку коливального процесу (супергармоніки та двугорбі піки), період модуляції, який залежить від співвідношення мас резервуару і рідини, складає приблизно п'ять періодів першої форми для обох випадків.



а)



б)

Рис. 9. Зміна амплітуди збурень рідини з часом для дорезонансного випадку, часовий проміжок 80-120 с

При збудженні руху періодичною силою $(2/\pi)\arcsin(\sin \omega t)$ максимальні амплітуди коливань менші, ніж ті, що виникають при коливальному процесі під дією гармонічної сили $\sin \omega t$. В цьому випадку можна говорити про умовно усталений режим коливань з суттєвою модуляцією.

Висновки

В роботі розглянуто задачу про вимушені нелінійні коливання резервуару у формі усіченого конуса і рідини з вільною поверхнею при їх сумісному русі. Поведінка системи розглядається в рамках нелінійної моделі на тривалому проміжку часу. Досліджено задачу про вихід такої системи на усталений режим коливань при збудженні руху системи гармонічною силою, що діє за законом $\sin \omega t$, а також періодичною силою пилообразної форми $(2/\pi)\arcsin(\sin \omega t)$ в зоні частот до резонансу, в малому околі резонансу, а також більших за резонансу. В усіх випадках вихід на режим усталених коливань не відбувався, хоча для частот, більших за резонансу, проявлявся ефект виходу на впорядковані коливання з суттєвою модуляцією. При збудженні руху періодичною силою $(2/\pi)\arcsin(\sin \omega t)$ максимальні амплітуди коливань зменшуються, порівняно з дією періодичної сили за законом $\sin \omega t$ для всіх діапазонів коливань. Це пояснюється тим, що імпульс, який надає системі пилообразна сила менше ніж імпульс, який надається системі гармонічно змінною силою (це впливає з порівняння площ сил на півперіоді). Крім того, на основі Фур'є аналізу впливає, що у випадку пилообразної сили дія може бути подана у вигляді суперпозиції дії гармонічної сили на основній частоті (з меншою амплітудою), а також сукупності сил з більшими частотами, які при дослідженні біля резонансних явищ є другорядними за значенням, але вони більше сприяють збудженню вищих гармонік спектру. Показано що при збудженні руху системи резервуар–рідина періодичними силами в обох випадках спостерігається модуляція коливань (переважно для біля- і зарезонансних частот збудження), суттєвий вплив коливань вищих гармонік із своїми частотами (для всіх трьох частотних діапазонів), дрейф середнього значення амплітуд коливань системи (для до резонансних частот збудження, а також для резонансного випадку для сили $(2/\pi)\arcsin(\sin \omega t)$). Одержані результати якісно узгоджуються з даними експериментів.

Список використаної літератури

1. Лимарченко О. С. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью // О. С. Лимарченко, В. В. Ясинский / Киев: Национальный технический университет Украины "КПИ" – 1997. – 348 с.

2. *Луковский И. А.* Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость // И. А. Луковский/ – Киев: Наук. думка, 1990. – 295 с.
3. *Микишев Г. Н.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью // Г. Н. Микишев, Б. И. Рабинович / М.: Машиностроение, 1968. – 532 с.
4. *Нариманов Г. С.* Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью // Г. С. Нариманов, Л. В. Докучаев, И. А. Луковский / М., Машиностроение, 1977. – 208 с.
5. *Faltinsen O. M.* Transient and steady-state amplitudes of resonant three-dimensional sloshing in a square base tank with a finite fluid depth // O. M. Faltinsen, O. F. Rognebakke, A. N. Timokha/ Physics of fluids 18. – 2006. – 14 p.
6. *Ibrahim R. A.* Liquid sloshing dynamics: theory and applications // R. A. Ibrahim / Cambridge University Press. – 2005. – 950 p.
7. *Limarchenko O. S.* Peculiarities of application of perturbation techniques in problems of nonlinear oscillations of liquid with a free surface in cavities of non-cylindrical shape // O. S. Limarchenko / Ukrainian Mathematical Journal, 2007, Vol. 59, No. 1, P. 44-70.
8. *Pal P.* Sloshing of liquid in partially filled container – an experimental study // P. Pal/ International Journal of Recent Trends in Engineering, 2009, Vol. 1, No. 6, P. 1–5.