УДК 004.627+517.962.27

ЩІЛЬНІСТЬ ЗАПОВНЕННЯ РЯДУ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ЧЛЕНАМИ ОКРЕМОЇ ЗВОРОТНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Лужецький В.А., Михалевич В.М., Михалевич О.В., Каплун В.А.

Анотація: Доведено властивість про кількість m-значних чисел Фібоначчі, яка представляє інтерес з точки зору можливого стиснення та шифрування інформації. Отримано співвідношення для обчислення порядкових номерів і числа m-значних чисел в послідовності. Установлено таблицю розподілу можливої кількості m-значних чисел Фібоначчі.

Аннотация: Доказано свойство о количестве m-значных чисел Фибоначчи, представляющие интерес с точки зрения возможного сжатия и шифрования информации. Получено соотношение для вычисления порядковых номеров и количества m-значных чисел в последовательности. Построена таблица распределения возможного количества m-значных чисел Фибоначчи.

Abstract: Property about quantity of the m-unit Fibonacci numbers, of interest from the point of view of possible compression and information enciphering is proved. The relation for calculation of sequence numbers and number of m-unit numbers in sequence is received. The allocation map of possible quantity of m-unit Fibonacci numbers is constructed.

Ключові слова: щільність заповнення ряду, окрема зворотна послідовність, нелінійні співвідношення. послідовність Фібоначчі, формула Біне, рівномірний розподіл, метод математичної індукції

Актуальність роботи

Дослідження способів представлення великих чисел маленькими за допомогою нелінійних співвідношень дозволить розробляти нові способи стиснення та шифрування інформації. Ефективність даного підходу залежить від щільності заповнення ряду натуральних чисел подібними представленнями Дана робота присвячена дослідженню щільності заповнення ряду натуральних чисел членами зворотної послідовності другого порядку.

Об’єкт дослідження

Зворотні послідовності другого порядку.

Предмет дослідження

Щільність заповнення ряду натуральних чисел членами зворотної послідовності другого порядку.

Мета дослідження

Здобуття характеристик щільності заповнення різних діапазонів натуральних чисел членами зворотної послідовності другого порядку.

Задачі дослідження

1) Пошук в літературі даних про щільність заповнення різних діапазонів натуральних чисел членами послідовності Фібоначчі;
2) Перевірка достовірності знайдених тверджень, зокрема доведення їх різними методами;
3) Виконання можливих узагальнень за результатам розв’язання перших двох задач дослідження.

Основна частина

Оскільки із всіх зворотних послідовностей другого порядку найбільш відомими є послідовності Фібоначчі [1-5], то пошук характеристик, що нас цікавлять виконували перш за все саме для цієї послідовності.

В [1, стор. 40] сформульована наступна властивість послідовності чисел Фібоначчі.

В послідовності чисел Фібоначчі при m>2 зустрічається не менше 4 і не більше 5 m-значних чисел.

Приведемо декілька варіантів доведення даної властивості.

Варіант 1. В [1] доведення даного твердження не приведено але у вказівці (стр. 187) рекомендується спочатку довести наступні допоміжні нерівності

$$F_{n+3} \le 8 \cdot F_n, \qquad F_{n+5} \ge \frac{21}{2} \cdot F_n, \quad n \in N. \tag{1}$$

де F_n ($n \in N$) - числа Фібоначчі.

Доведемо першу нерівність в (1). Використовуватимемо метод математичної індукції. Для n=1 та n=2 матимемо

$$F_4 \le 8 \cdot F_1, \qquad F_5 \le 8 \cdot F_2. \tag{2}$$

Оскільки F_1=1, F_2=1, F_4=3, F_5=5, то очевидно, що нерівності (2) справджуються.

Отже, базис індукції доведено. Індуктивний перехід доводитимемо в наступній формі: потрібно довести, що із припущення про справедливість вихідної нерівності при $n= i$-2 та $n=i$-1 випливає її справедливість і для $n= i$. Отже, припустимо, що

$$F_{i+1} \le 8 \cdot F_{i-2}, \qquad F_{i+2} \le 8 \cdot F_{i-1}. \tag{3}$$

Почленно додамо нерівності (3). Дістанемо

$$F_{i+1} + F_{i+2} \le 8 \cdot \left(F_{i-2} + F_{i-1}\right), \tag{4}$$

або з урахуванням рекурентного співвідношення для чисел Фібоначчі

$$F_{i+3} \le 8 \cdot F_i, \tag{5}$$

що і є першою нерівністю в (1) при $n= i$. Саме це і потрібно було довести.

Аналогічно доводимо другу нерівність в (1). Для n=2 та n=3 матимемо

$$F_7 \ge \frac{21}{2} \cdot F_2, \qquad F_8 \ge \frac{21}{2} \cdot F_3. \tag{6}$$

Оскільки F_2=1, F_3=2, F_7=13, F_8=21, то очевидно, що нерівності (6) справджуються.

Припустимо вихідна нерівность справджується при $n= i$-2 та $n=i$-1, тобто

$$F_{i+3} \ge \frac{21}{2} \cdot F_{i-2}, \quad F_{i+4} \ge \frac{21}{2} \cdot F_{i-1}, \quad i > 3. \tag{7}$$

Почленно додамо нерівності (7). Дістанемо

$$F_{i+3} + F_{i+4} \ge \frac{21}{2} \cdot \left(F_{i-2} + F_{i-1}\right), \qquad i > 3, \tag{8}$$

звідки з урахуванням рекурентного співвідношення для чисел Фібоначчі і випливає справедливість другої нерівності в (1) при $n=i$:

$$F_{i+5} \ge \frac{21}{2} \cdot F_i, \quad i > 3. \tag{9}$$

Слід зауважити, що друга нерівність в (1) не справджується для n=1, саме тому розгляд почали з n=2.

Насправді можна довести більш ефективну нерівність ніж перша нерівність в (1). З урахуванням рекурентного співвідношення для чисел Фібоначчі можна записати

$$F_{n+3} = 2 \cdot F_{n-1} + 3 \cdot F_n, \tag{10}$$

оскільки $F_{n\text{-}1} < F_n$, то

$$F_{n+3} < 5 \cdot F_n, \quad n \ge 3, \tag{11}$$

Доведемо сформульовану властивість про кількість m-значних чисел у послідовності чисел Фібоначчі. Позначимо через F_n найменше із m-значних чисел Фібоначчі. Це означає, що

$$F_n \ge 10^{m-1}, \; F_{n-1} < 10^{m-1}. \tag{12}$$

Із рекурентного співвідношення для чисел Фібоначчі випливає, що

$$F_n - F_{n-1} = F_{n-2}. \tag{13}$$

Оскільки

$$\Delta = F_n - 10^{m-1}, \tag{14}$$

(див. рис. 1), з урахуванням другої нерівності (12) дістанемо

$$\Delta < F_n - F_{n-1}, \tag{15}$$

або, з урахуванням (13)

$$\Delta < F_{n-2} \Rightarrow \Delta < F_{n-1} \Rightarrow \Delta < 10^{m-1}. \tag{16}$$

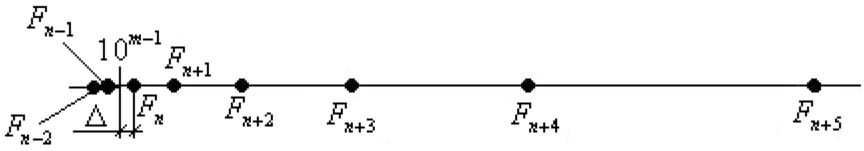

Рисунок 1 - Геометрична інтерпретація розташування чисел Фібоначчі

Із співвідношення (14) та останньої нерівності (16) випливає

$$F_n < 2 \cdot 10^{m-1}. \tag{17}$$

Із останньої нерівності з урахуванням (11) дістанемо нерівність

$$F_{n+3} < 10 \cdot 10^{m-1} = 10^m, \quad n \ge 3, \tag{18}$$

із якої, з урахуванням першої нерівності (12), випливає, що у напіввідкритий інтервал $[10^{m-1}; 10^m)$, який визначає множину m-значних натуральних чисел попадають всі числа F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}, тобто, принаймні чотири числа послідовності Фібоначчі.

Першу частину властивості доведено. Доведемо, що в указаний інтервал попадає не більше п’яти чисел послідовності Фібоначчі. З урахуванням (9) та першої нерівності (12) дістанемо

$$F_{n+5} \ge 10{,}5 \cdot 10^{m-1} > 10^m, \quad n \ge 3, \tag{19}$$

звідки і випливає, що шосте число підмножини послідовності Фібоначчі, яка починається з числа F_n, виходить за межі інтервалу, що визначає множину m-значних натуральних чисел. Це і означає, що m-значних чисел послідовності Фібоначчі не може бути більше п’яти. Властивість доведено.

Варіант 2. Запишемо формулу Біне

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}, \tag{20}$$

де

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \tag{21}$$

В першу чергу нас цікавитиме діапазон не менш як 8-9-значних чисел. При цьому $n \ge 30$. Данні, що представлені графіком на рис. 2, свідчать про те, що величина β^n нехтовно мала у порівнянні з α^n за указаних умов.

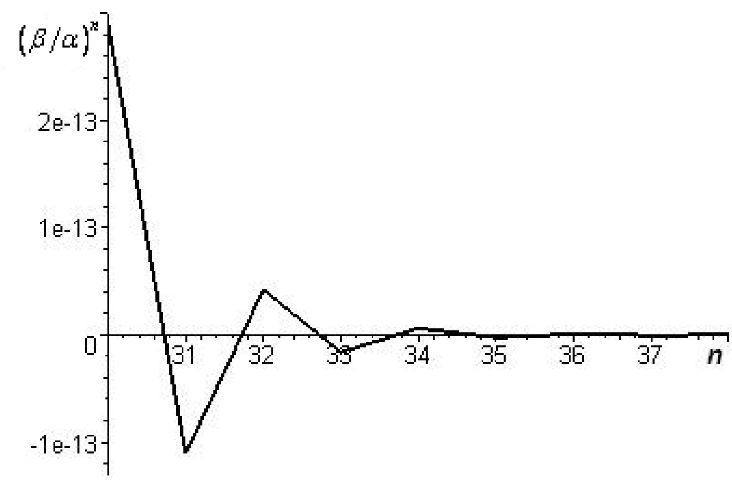

Рисунок 2 - Ілюстрація до зменшення другого доданка в (20) у порівнянні з першим при збільшенні номера числа в послідовності Фібоначчі

Отже, властивість про кількість m-значних чисел у послідовності чисел Фібоначчі буде доведено, якщо довести, що розв’язками нерівності

$$10^{m-1} \le \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} < 10^m, \tag{22}$$

для довільних m>2 є не менше чотирьох та не більше п’яти значень n.

В результаті елементарних перетворень та логарифмування останні нерівності зведемо до наступного вигляду

$$\frac{0,5 \cdot \lg 5 + m}{\lg \alpha} - \frac{1}{\lg \alpha} \le n < \frac{0,5 \cdot \lg 5 + m}{\lg \alpha}. \tag{23}$$

Надалі використовуватимемо наступні позначення [2, стор. 88]:

$\lfloor x \rfloor$ - найбільше ціле, яке менше або дорівнює x;

$\lceil x \rceil$ - найменше ціле не менше x.

З використанням властивостей функцій $\lfloor \cdot \rfloor$, $\lceil \cdot \rceil$ [2, стор. 95], нерівності (23) набувають наступного вигляду

$$\left\lceil \frac{0,5 \cdot \lg 5 + m}{\lg \alpha} - \frac{1}{\lg \alpha} \right\rceil \le n < \left\lceil \frac{0,5 \cdot \lg 5 + m}{\lg \alpha} \right\rceil, \tag{24}$$

звідки дістаємо співвідношення для визначення шуканого числа членів k_m

$$k_m = \left\lceil \frac{0,5 \cdot \lg 5 + m}{\lg \alpha} \right\rceil - \left\lceil \frac{0,5 \cdot \lg 5 + m}{\lg \alpha} - \frac{1}{\lg \alpha} \right\rceil. \tag{25}$$

Оскільки для додатних x, y, які не приймають цілих значень справджується співвідношення

$$\lceil x - y \rceil = \lceil x \rceil - \lceil y \rceil + \lceil \{x\} - \{y\} \rceil. \tag{26}$$

де через $\{x\}$ позначена дробова частина числа x, із (25) матимемо

$$k_m = \left\lceil \frac{1}{\lg \alpha} \right\rceil - \left\lceil \left\{ \frac{0,5 \cdot \lg 5 + m}{\lg \alpha} \right\} - \left\{ \frac{1}{\lg \alpha} \right\} \right\rceil. \tag{27}$$

Оскільки $\frac{1}{\lg \alpha} \approx 4,784972$, то

$$\left\lceil \frac{1}{\lg \alpha} \right\rceil = 5, \left\{ \frac{1}{\lg \alpha} \right\} \approx 0,78972. \tag{28}$$

тоді співвідношення (27) приймає вигляд

$$k_m = 5 - \left\lceil \left\{ \frac{0,5 \cdot \lg 5 + m}{\lg \alpha} \right\} - \left\{ \frac{1}{\lg \alpha} \right\} \right\rceil, \tag{29}$$

причому очевидно, що

$$\left\lceil \left\{ \frac{0,5 \cdot \lg 5 + m}{\lg \alpha} \right\} - \left\{ \frac{1}{\lg \alpha} \right\} \right\rceil = \begin{cases} 0, & \left\{ \frac{0,5 \cdot \lg 5 + m}{\lg \alpha} \right\} \le \left\{ \frac{1}{\lg \alpha} \right\} \approx 0,78972 \\ 1, & \left\{ \frac{0,5 \cdot \lg 5 + m}{\lg \alpha} \right\} > \left\{ \frac{1}{\lg \alpha} \right\} \approx 0,78972 \end{cases}. \tag{30}$$

Звідси і випливає, що число n може приймати тільки два значення: 4 або 5:

$$k_m = \begin{cases} 5, & \left\{ \dfrac{0,5 \cdot \lg 5 + m}{\lg \alpha} \right\} \le \left\{ \dfrac{1}{\lg \alpha} \right\} \approx 0,78972 \\ 4, & \left\{ \dfrac{0,5 \cdot \lg 5 + m}{\lg \alpha} \right\} > \left\{ \dfrac{1}{\lg \alpha} \right\} \approx 0,78972 \end{cases}. \tag{31}$$

Із першого варіанта доведення ще не випливає, що k_m може дорівнювати 5. Другий варіант доведення дозволив: 1. Визначити, що можлива кількість m-значних чисел послідовності Фібоначчі k_m може дорівнювати 4 або 5; 2. Здобути співвідношення для визначення порядкових номерів m-значних чисел в послідовності (нерівності (24)); 3. Отримати формулу (29) для обчислення числа таких чисел для заданого m.

На основі отриманих результатів можна сформулювати доведену властивість в більш конкретній формі, наприклад: *послідовність чисел Фібоначчі при $m>2$ містить 4 або 5 m-значних чисел*.

Формула (29) дозволяє указати відносну частоту появи значень $n=4$ та $n=5$ з ростом m. Дійсно, згідно (29), (30) $k_m=5$ для всіх значень числа $\left(0,5 \cdot \lg 5 + m\right)/\lg \alpha$, для яких його дробова частина менша дробової частини числа $\lg^{-1} \alpha \approx 4,78972$. Припускаючи, що числа $\left\{\left(0,5 \cdot \lg 5 + m\right)/\lg \alpha\right\}$ рівномірно розподілені в інтервалі (0; 1) можна отримати ряд розподілу можливої кількості m-значних чисел Фібоначчі

Таблиця 1 - Ряд розподілу

$(k_m)_i$	4	5
p_i	0,21	0,79

Прийняте припущення про рівномірний розподіл чисел $\left\{\left(0,5 \cdot \lg 5 + m\right)/\lg \alpha\right\}$ було перевірено на основі обчислювального експерименту. Всього обчислено 93 значення відповідного виразу для $m=8 \div 100$:
[*.95205167, .73702363, .52199559, .30696755, .9193952e-1, .87691149, .66188345, .44685542, .23182738, .1679935e-1, .80177132, .58674328, .37171525, .1566872, .9416592, .7266311, .5116031, .2965751, .815470e-1, .8665190, .6514910, .4364629, .2214349, .64069e-2, .7913788, .5763508, .3613228, .1462947, .9312667, .7162387, .5012106, .2861826, .711546e-1, .8561265, .6410985, .4260705, .2110424, .9960144, .7809864, .5659583, .3509303, .1359023, .9208742, .7058462, .4908182, .2757901, .607621e-1, .8457341, .6307060, .4156780, .2006500, .9856219, .7705939, .5555659, .3405378, .1255098, .9104818, .6954537, .4804257, .2653976, .503696e-1, .8353416, .6203135, .4052855, .1902575, .9752294, .7602014, .5451734, .3301453, .1151173, .9000893, .6850612, .4700332, .2550052, .399771e-1, .8249491, .6099211, .3948930, .1798650, .9648370, .7498089, .5347809, .3197529, .1047248, .8896968, .6746688, .4596407, .2446127, .295847e-1, .8145566, .5995286, .3845006, .1694725*].

Із гістограми приведеного варіаційного ряду, яка представлена на рис. 3, очевидно що маємо рівномірний розподіл.

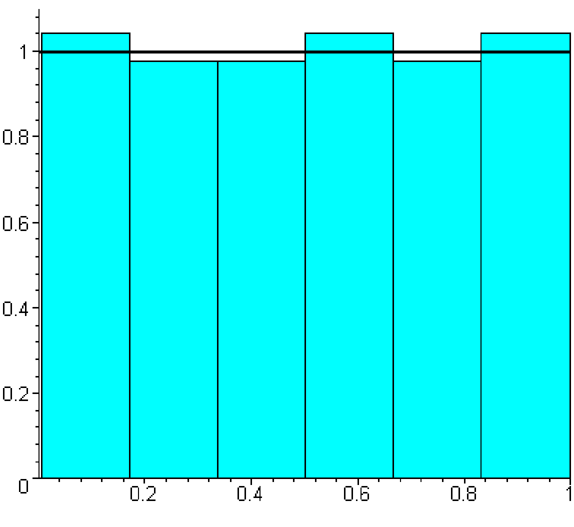

Рисунок 3 - Гістограма для варіаційного ряду чисел $\left\{\left(0,5 \cdot \lg 5 + m\right)/\lg \alpha\right\}$ при $m=8 \div 100$.

В наступних дослідженнях планується отримати оцінки для визначення кількості m-значних чисел членами довільної зворотної послідовності другого порядку.

Висновки

1. Представлено два варіанти доведення властивості про кількість m-значних чисел Фібоначчі: на основі метода математичної індукції та з використанням формули Біне.

2. Установлено що можлива кількість m-значних чисел послідовності Фібоначчі k_m може дорівнювати 4 або 5.

3. Отримано співвідношення для обчислення, як порядкових номерів m-значних чисел в послідовності так і кількості таких чисел.

4. Установлено таблицю розподілу можливої кількості m-значних чисел Фібоначчі.

5. Сформульовано задачі подальших досліджень.

Список літератури

1. Алфутова Н.Б. Устинов А.В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ.— М.: МЦНМО, 2002. - 264 с. ISBN 5-94057-038-0.
2. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики: Пер. с англ. -М.: Мир, 1998. -703.- ISBN 5-03-001793-3
3. Воробьёв Н. Н. Числа Фибоначчи. — Наука, 1978. - 144 с.
4. Кнут Д. Искусство программирования, том 1. Основные алгоритмы. - М.: «Вильямс», 2006. - . 720 с. - ISBN 0-201-89683-4
5. Маркушевич А. И. Возвратные последовательности, «Наука», М, 1975.

Відомості про авторів

Лужецький Володимир Андрійович, д.т.н., професор - завідувач кафедри захисту інформації, Вінницький національний технічний університет, Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, Україна, 21021, тел.: (0432)-598-386.

Михалевич Володимир Маркусович, д.т.н., професор - завідувач кафедри прикладної математики, Вінниц ький національний технічний університет, тел.: (0432)-598-594, (0432)-598-591, E-mail vmykhal@gmail.com.

Михалевич Олексій Володимирович, студент гр. 1БС-07, Вінницький національний технічний університет.

Каплун Валентина Аполінаріївна – старший викладач кафедри захисту інформації, Вінницький національний технічний університет.