МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ

УДК 519.6

В.О. БОГАЄНКО, Ю.Ю. ДАНИЛЕНКО, Г.С. ФІНІН

Інститут водних проблем і меліорації НААН України, Київ

НАБЛИЖЕННЯ ГЕОІНФОРМАЦІЙНИХ ДАНИХ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДИКИ ПСЕВДООБЕРНЕННЯ

Анотація. Розглядається задача наближення геоінформаційних даних у випадку їх некоректності та наявності обмежень, що накладаються фізичною сутністю задачі. Пропонується шукати наближення, відштовхуючись від спрощеної математичної моделі у вигляді диференціального рівняння в частинних похідних еліптичного типу, розв’язуючи обернені задачі щодо нього методом функцій Гріна з використанням методики псевдообернення, що дозволяє отримувати множини можливих інтерполяцій. Пропонуються на основі методики почергового проектування процедури вибору з цієї множини, розв’язків, які задовольняють обмеженням (з інтерполюючим чи апроксимуючим вихідні дані результатом), й враховують похибки вимірювання вихідних даних. Приводяться результати обчислювального експерименту, які демонструють адекватність отриманих інтерполяцій фізичним процесам.
Ключові слова: інтерполяція, апроксимація, псевдообернення, функція Гріна.
Аннотация. Рассматривается задача приближения геоинформационных данных в случае их некорректности и наличия ограничений, которые накладываются физической сутью задачи. Предлагается искать приближения, отталкиваясь от упрощенной математической модели в виде дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа, решая обратные задачи для него методом функций Грина с использованием методики псевдообращения, что позволяет получать множества возможных интерполяций. Предлагаются, на основе методики попеременного проектирования, процедуры выбора из этого множества, решений, которые удовлетворяют ограничениям (с интерполирующим или аппроксимирующим исходные данные результатом), и учитывают погрешности измерения исходных данных. Приводятся результаты вычислительного эксперимента, которые демонстрируют адекватность полученных интерполяций физическим процессам.
Ключевые слова: интерполяция, аппроксимация, псевдообращение, функция Грина.
Abstract. Geoinformational data approximation problem solution in the case of their inaccuracy and presence of restrictions which are imposed by physical problem substance has been studied. Approximations finding, based on simplified mathematical model in the form of elliptical partial differential equation, by solving inverse problems for it using Green’s functions method and pseudoinvertion methodic, that allows to obtain sets of possible interpolations, has been suggested. On the base of alternating projection method, procedures for choosing solutions from this sets which satisfy restrictions (with result, interpolating or approximating initial data) and take into account initial data measurement inaccuracy, have been proposed. Computational experiment results which show adequacy of obtained interpolation to physical processes have been given.
Key words: interpolation, approximation, pseudoinversion, Green’s function.

Вступ

Такі властивості геоінформаційних даних, як просторовий розподіл та великі похибки вимірювань створюють складності при їх аналізі та візуалізації. Задля врахування похибок, замість методів інтерполяції таких, як лінійна інтерполяція чи інтерполяція методом обернених зважених відстаней [1], застосовуються методи апроксимації аналізованої функції, зокрема, кріґінг [2].

Кріґінг – це метод, базований на використанні методів математичної статистики, який інтерполює значення випадкової величини $Z(\vec{x})$ у неспостережуваній точці $\vec{x}$ відштовхуючись від спостережень у близьких до $\vec{x}$ точках $\vec{x}_i$. Інтерполяція виконується за допомогою методу найменших квадратів на основі незміщуваної лінійної оцінки з мінімальною дисперсією на стохастичній моделі просторової залежності, що описується варіограмою або математичним очікуванням та коваріаційною функцією.

Альтернативою таким методам інтерполяції є методи, у яких використовується інформація стосовно фізичної суті аналізованих даних (такі, як підхід, описаний у [3]). Зокрема, для інтерполяції даних, пов’язаних з процесами у ґрунтових водах, доцільно розв’язувати обернені задачі щодо еліптичних диференціальних рівнянь у частинних похідних. Для розв’язання таких задач використовується символічний підхід Лур’є [4,5], метод функцій Гріна та методика псевдообернення [6,7]. При застосуванні такого підходу, за наявності некоректностей у вихідних даних, результуюча інтерпольована функція в деяких випадках може приймати від’ємні значення в ситуації, коли її фізична сутність не дозволяє цього. Адекватне розв’язання задачі тоді вимагає застосування додаткових процедур, що враховують особливості вихідних даних.

Актуальність

Більшість методів інтерполяції та апроксимації геоінформаційних даних не враховують обмеження, що їх накладає фізична сутність даних. Це зумовлює необхідність розробки нових методів наближення геоінформаційних даних, які дозволили б отримувати більш адекватні апроксимації.

Мета

Підвищення ефективності обробки геоінформаційних даних з використанням методики псевдообернення.

Задачі

Розробка процедур інтерполяції, що враховують обмеження, які накладаються фізичною сутністю інтерпольованих даних, та некоректності у них.

Розв'язання задач

Розглянемо крайову задачу для еліптичного рівняння виду

$$\mathrm{div}\left(\vec{k}\ \mathrm{grad}\ y(\vec{x}) - \vec{w}\ y(\vec{x})\right) = q(\vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{1}$$

де компоненти коефіцієнта $\vec{k} = (k_1, k_2)$ – задані додатні числа, вектор $\vec{w} = (w_1, w_2)$, $q(\vec{x})$ – інтегровна за Ріманом в області моделювання Ω та обмежена функція, $y(\vec{x})$ - шукана функція.

Будемо розглядати рівняння (1) за відсутності крайових умов, проте з умовою керування щодо правої частини рівняння. Функція $q(\vec{x})$ є невідомою й знаходиться з умови:

$$y(\vec{x}) = Y_1(\vec{x}) \mid D^C, \tag{2}$$

де $Y_1(\vec{x})$ - задана функція, D^C - задана підобласть області моделювання Ω.

Розв'язок задачі (1) – (2) шукається у вигляді

$$y(s) = \int_\Omega G(s - s^*)\, q(s^*)\, ds^*, \quad s = (x_1, x_2),$$

де $G(s)$ - функція Гріна рівняння (1) у необмеженій області зміни координат $s = (x_1, x_2)$.

З урахуванням умови (2) отримуємо інтегральне рівняння

$$\int_\Omega G(s - s^*)\, q(s^*)\, ds^* = Y_1(s),\ s \in D^C. \tag{3}$$

Шукаючи розв'язки рівняння (3) на класі функцій виду

$$q(s) = \sum_{i=1}^{n} q_i \delta(s - s_i),\ \delta(\vec{x}) = \begin{cases} 1,\ \vec{x} = (0,...,0) \\ 0,\ \vec{x} \neq (0,...,0) \end{cases},$$

де s_i - точки дискретизації області Ω, а n - кількість точок дискретизації, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

$$\sum_{i=1}^{n} G(s'_j - s_i) q_i = Y_1(s'_j),\ j = 1,..,m. \tag{4}$$

Тут s'_j - точки дискретизації підобласті D^C, а m - їх кількість. У випадку задачі інтерполяції, s'_j та $Y_1(s'_j)$ є вихідними даними.

З використанням методики псевдообернення можна побудувати множину розв'язків СЛАР (4), або середньоквадратичних наближень до них у вигляді

$$Q = A^+ Y + (I - A^+ A) v, \tag{5}$$

де $Q=(q_1,...,q_n)^T$, $A=(\bar{G}_1,...,\bar{G}_n)$, $\bar{G}_i=(G(s'_1-s_i),...,G(s'_m-s_i))^T$, $Y=(Y_1(s'_1),...,Y_1(s'_m))^T$, A^+ - матриця, псевдообернена до A, v, $\dim v=[1\times n]$, - довільний вектор.

Розв'язок задачі інтерполяції знаходимо у вигляді

$$y(s)=\sum_{i=1}^{n} G(s-s_i)q_i \quad . \tag{6}$$

Якщо фізична сутність інтерпольованої функції визначає її невід'ємність, проте розрахована за формулою (6) при $v=0$ інтерполяція умові $y(s)\geq 0$ не задовольняє, можливо не порушуючи дискретного аналогу умови (2) знайти необхідний розв'язок, або наближення до нього, шляхом вибору параметру v, враховуючи, що при $G(s)\geq 0$, $y(s)\geq 0$ якщо $Q\geq 0$.

Розв'язок системи лінійних нерівностей

$$Q=A^+Y+(I-A^+A)v\geq 0 \tag{7}$$

пропонується шукати шляхом ітеративного проектування вектору $Q^{(i)}$ спочатку на множину $A^+Y+(I-A^+A)v$, а потім на множину $Q\geq 0$.

Таким чином, якщо $Q^{(i)}$ - розв'язок на i -тій ітерації, $Q^{(0)}=A^+Y$,

$$\bar{Q}^{(i)}=\begin{cases} Q^{(i)}, \ Q^{(i)}\geq 0 \\ 0, \quad Q^{(i)}<0 \end{cases} \ -$$

проекція вектору $Q^{(i)}$ на множину $Q\geq 0$, а завдяки проективним властивостям оператора $(I-A^+A)$,

$$Q^{(i+1)}=A^+Y+(I-A^+A)\bar{Q}^{(i)} \ -$$

проекція вектору $\bar{Q}^{(i)}$ на множину $A^+Y+(I-A^+A)v$.

Оскільки розглядувані множини є опуклими, $\left\|Q^{(i)}-\bar{Q}^{(i)}\right\|\geq\left\|Q^{(i+1)}-\bar{Q}^{(i)}\right\|$. Ітераційний процес сходиться на $i+1$-ій ітерації до розв'язку системи (7) коли $\left\|Q^{(i+1)}-\bar{Q}^{(i)}\right\|=0$, або дозволяє отримати наближення до розв'язку при $\left\|Q^{(i)}-\bar{Q}^{(i)}\right\|=\left\|Q^{(i+1)}-\bar{Q}^{(i)}\right\|$.

У другому випадку, при виборі $Q^{(i+1)}$ у якості розв'язку задачі отримуємо інтерполяцію, що задовольняє дискретному аналогові умові (2), проте не задовольняє умові невід'ємності (процедура 1), при виборі ж $\bar{Q}^{(i)}$, отримуємо невід'ємну апроксимацію вихідної функції (процедура 2).

Вищеописаний алгоритм дозволяє врахувати й похибку ε вимірювання вихідних даних. Для цього замість вектора $Y=(Y_1(s'_0),...,Y_1(s'_m))^T$ вводиться паралелепіпед $\bar{Y}=Y+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{Y}_i$, $\bar{Y}_i=(0,...,\varepsilon Y_1(s'_i),...,0)^T$, $\alpha_i\in[-1,1]$.

Оскільки розглядувані задачі є лінійними, то множина у цьому випадку (5) прийме вигляд

$$\hat{Q}(\alpha) = Q + \tilde{Q}(\alpha), \quad \tilde{Q}(\alpha) = \{\tilde{q}_i(\alpha)\}_{i=1}^{n} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A^{+} \overline{Y}_i, \; \alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_m),$$

а множина інтерполяцій (6) –

$$\overline{y}(\alpha, s) = y(s) + \sum_{i=1}^{n} G(s - s_i)\tilde{q}_i(\alpha). \tag{8}$$

Невід’ємний розв’язок, або наближення до нього, будемо знаходити як

$$\begin{gathered} y_m(s) = \overline{y}(\alpha_m, s), \; \alpha_m : \|\tilde{y}(\alpha_m, s)\| = \min_{\alpha} \|\tilde{y}(\alpha_m, s)\|, \\ \|\tilde{y}(\alpha_m, s)\| = \int_{\Omega} \tilde{y}^2(\alpha, s)ds, \; \tilde{y}(\alpha, s) = \begin{cases} \overline{y}(\alpha_m, s), & \overline{y}(\alpha_m, s) < 0 \\ 0, & \overline{y}(\alpha_m, s) \geq 0 \end{cases}. \end{gathered} \tag{9}$$

Задачу мінімізації (9) можна розв’язувати, зокрема, градієнтними методами, а отриманий розв’язок буде невід’ємною апроксимацією, або наближенням до неї, вихідних даних з врахуванням похибки їх вимірювання (процедура 3).

Запропоновані процедури знаходження невід’ємної інтерполяції були програмно реалізовані та тестовані на наборі даних з 55 точок. Результати інтерполяції без використання процедур знаходження невід’ємного розв’язку зображено на рис.1, а з використанням трьох вищеописаних процедур на рис.2-4.

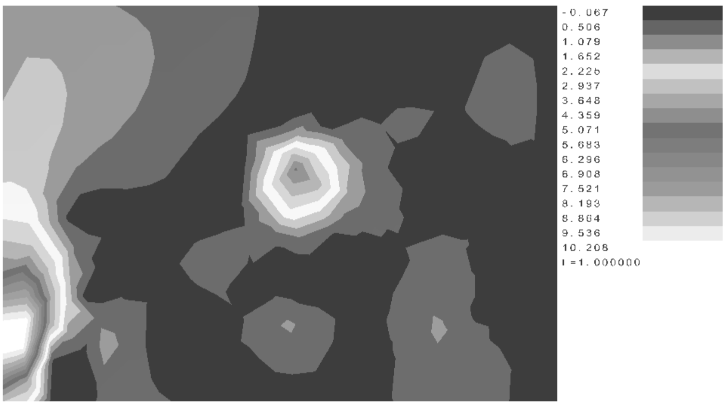

Рисунок 1 – Результат інтерполяції без використання процедур знаходження невід’ємного розв’язку

Рисунок 2 – Результат інтерполяції з використанням процедури 1

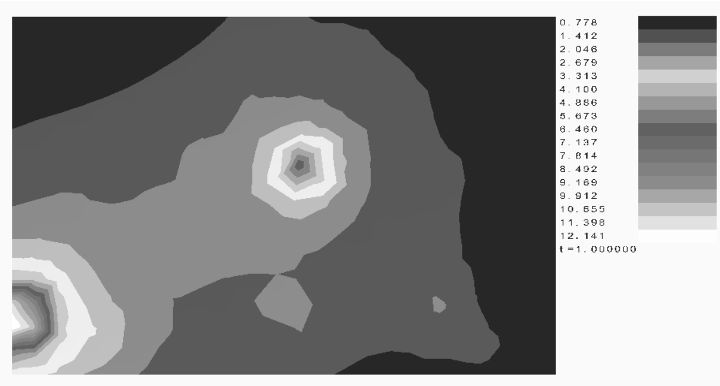

Рисунок 3 – Апроксимація з використанням процедури 2

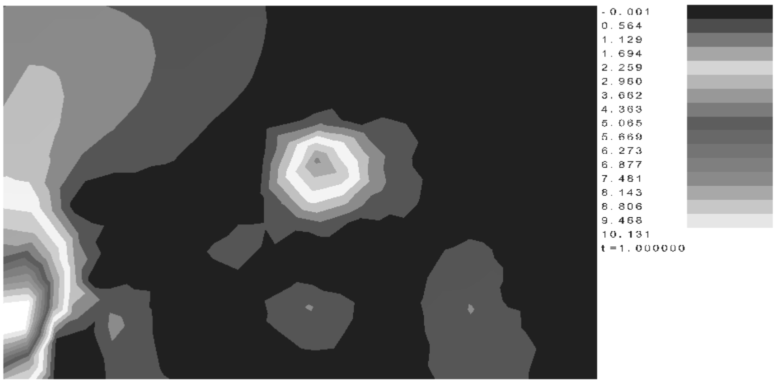

Рисунок 4 – Апроксимація з використанням процедури 3 з врахуванням 30% похибки вимірювання

Висновки

1. Алгоритм інтерполяції геоінформаційних даних, базований на символічному підході Лур'є, методі функцій Гріна та методики псевдообернення дозволяє отримувати множини інтерполяцій щодо яких були розроблені процедури вибору невід'ємного розв'язку та врахування похибок вимірювання вихідних даних.
2. Аналіз розрахованих інтерполяцій показав, що у певних випадках розроблені процедури дозволяють отримати фізично коректні розв'язки, які неможливо отримати базовим алгоритмом.

Список літератури

1. Li, J., A. D. Heap A review of spatial interpolation methods for environmental scientists, Geoscience Australia, Canberra, 2008, 137pp.
2. Matheron, G., Principles of geostatistics // Economic Geology, 58, pp 1246–1266, 1963
3. Ковальчук П.І., Шевчук С.А. Математичне моделювання в системі моніторингу затоплення і підтоплення сільгоспугідь і сільських населених пунктів // Вісник УДУВГП. Вип. 4(40). Ч. 1. – Рівне. – 2007. – С. 285 – 290.
4. Лурье А.И. К теории толстых плит // Прикл. Математика и механика – 1942. – 6, вып. 23. – С. 12-36.
5. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1955. – 370 с.
6. Скопецький В.В., Стоян В.А., Кривонос Ю.Г. Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами - К.:Наукова Думка, 2002.- 361 с.
7. Стоян В.А. Псевдообращение интегральных операторов в задачах наблюдения, терминального управления и моделирования динамики систем с распределенными параметрами // Проблемы управления и информатики. –1998. –№4. С. 112–120.

Стаття надійшла: 14.02.12.

Відомості про авторів

Богаєнко Всеволод Олександрович, к. т. н., старший науковий співробітник, Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАНУ, sevab@ukr.net.

Даниленко Юлія Юріївна, к. т. н., зав. лабораторії, Інститут водних проблем і меліорації НААН України.

Финин Георгий Семенович, д. ф.-м. н., главный научный сотрудник, Институт водных проблем и мелиорации НААН Украины.