УДК 519.852:004.424.27.021

Informatics and Mathematical Methods in Simulation
Vol. 5 (2015), No. 1, pp. 84-91

МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ИХ ЭФФЕКТИВНОСТЬ

Б.И. Юхименко

Одесский национальный политехнический университет,
просп. Шевченко, 1, Одесса, 65044, Украина; e-mail: pm1987pm@gmail.com

В работе дан краткий обзор разработок по комбинаторным методам решения задач целочисленной линейной оптимизации. Приведены основные составляющие метода ветвей и границ, которые можно рассматривать по-разному и получать новые модификации этого метода. Даны некоторые оценки эффективности работы модификационных составляющих.

Ключевые слова: оценка, последовательное построение, конкретизация, частичное решение, функции предпочтения.

Введение

Оптимизация. Принятие оптимальных решений. Эти фразы всё чаще используются в разговорах современных людей. Действительно, любое разумное решение можно назвать оптимальным. Оно определяется путём сравнения с другими возможными решениями. С математических позиций «оптимальное решение» требует значительно больше. Математик может назвать решение оптимальным только тогда, когда оно удовлетворяется признаку оптимальности.

Многовариантность и наличие критерия предопределяет теорию оптимизации. Нахождение оптимального варианта согласно выбранному критерию создает основу методов оптимизации. Метод оптимизации во многом зависит от форм математического описания, как множества вариантов, так и самого критерия оптимизации. В связи с этим хорошо известна условная и безусловная, дискретная и непрерывная оптимизация.

Наибольшего внимания среди математиков вызывает условная дискретная оптимизация. Такая популярность предопределяется простотой математического описания задач оптимизации, а также их реализации в вычислительном смысле. Теоретически возможный полный перебор вариантов заменяется частичным, и чем меньше вариантов пересматривается, тем алгоритм считается более эффективным. При разработке, в основном, используется комбинаторный подход. Это дает возможность вводить новые элементы при разработке или модификации алгоритмов. Не сложно перерабатывается программное обеспечение и сами IT-технологии, что упрощает реализацию практических задач, относящихся к задачам дискретной оптимизации.

Основная часть

Первые разработки по алгоритмизации, разработке методов и методик решения задач дискретной оптимизации были направлены на использование имеющегося математического аппарата для решения задач непрерывной оптимизации. К примеру, идея Данцига [1], предопределяющая возможность использовать симплекс метод для решения задач линейной дискретной оптимизации, дала начало целому направлению решения задач целочисленного линейного программирования. Идею Данцига реализовал Гомори [2]. Ему удалось решить все проблемы, связанные с алгоритмизацией и возможностями практического использования этой идеи. В настоящее время методы отсекающих плоскостей широко известны в сфере дискретной оптимизации.

Другое направление в дискретной оптимизации имеет свое начало с появлением работы Лэнд и Дойг [3]. Метод, предложенный австрийскими математиками, так же основан на симплекс методе, но уже в другом ракурсе. Решение определённой задачи линейного программирования используется, в основном, для получения оценки подмножества вариантов. Значение целевой функции при оптимальном варианте подмножества ограничивает сверху (снизу) значения целевой функции других его вариантов. В принципе, метод Лэнд и Дойг имеет комбинаторный характер. При помощи дополнительных ограничений формируется подмножество вариантов. Введен признак оптимальности с использованием оценок подмножеств. Данное направление в дискретной оптимизации стало именоваться методом ветвей и границ.

Широкого использования метод Лэнд и Дойг не получил. Следующим толчком в дискретной линейной оптимизации было появление работы Литла, Мурти и др. Им предложен метод ветвей и границ для решения задачи о коммивояжере [4]. Это была та идея, которая породила множество алгоритмов современной дискретной вычислительной математики. Тогда ещё интуитивное суждение о разбиении множества вариантов решения на подмножества, не что иное, как идея последовательного построения решения [5].

Что касается оценивания подмножеств, это идея сужения – расширения множества вариантов [6]. Другими словами, приведение задачи к легко разрешаемой задаче, с целью использования существующего программного обеспечения для её решения.

Метод ветвей и границ состоит из трёх основных процедур:

1. Разбиение множества вариантов на подмножества;
2. Оценивание подмножества вариантов;
3. Проверка на оптимальность полученного варианта.

Разбиение множества вариантов на подмножества – это разделение вариантов по определённому признаку. Скажем, в алгоритмах метода Лэнд и Дойг множество вариантов делится на два подмножества. В одном подмножестве некоторая переменная должна быть не меньше определённого целого значения, а во втором меньше. Практически, это исключение из рассмотрения нецелочисленных значений рассматриваемой переменной в единичном интервале. К примеру, если в результате решения компонента x_k^* получила нецелочисленное значение, то формируется ограничения типа

$$x_k \geq \left[x_k^*\right] + 1, \tag{1}$$

$$x_k \leq \left[x_k^*\right], \tag{2}$$

где $\left[x_k^*\right]$ – целая часть x_k^*.

Объединение ограничений (1) и (2) поочередно с ограничениями исходной линейной задачи, формируются два подмножества вариантов с определёнными требованиями к компоненте x_k.

Совсем другой подход ветвления был предложен Литлом и его коллегами. Параметром разбиения множества вариантов объезда городов является пара городов

(k,l). Пара либо включается в вариант объезда либо нет. Таким образом, имеется два подмножества вариантов. Одно подмножество содержит переезд из k в l, другое – этот переезд запрещен. Математически, если вариант решения задачи о коммивояжере представляется матрицей инцидентности, то строка k либо инцидентна столбцу l, либо нет.

Оценивание подмножества вариантов – это определение границы сверху (снизу – для задач минимизации) значения целевой функции вариантов оцениваемого подмножества. Оценка предопределяет приоритетность подмножеств. Для дальнейшего разбиения выбирается самое приоритетное подмножество. Его обычно называют перспективным подмножеством вариантов.

Существуют различные способы получения оценок подмножеств вариантов. Однако, чем точнее, т.е. чем ближе значение оценки к экстремальному значению целевой функции вариантов подмножества, тем лучшим считается способ оценивания. Через оценки подмножеств выражается признак оптимальности метода ветвей и границ. Что, в свою очередь, влияет на скорость сходимости алгоритма.

Простейшим и самым точным способом оценивания является решение соответствующей задачи линейного программирования для получения оценок множества целочисленных вариантов. Этот способ был выявлен при создании метода Лэнд и Дойг. В самом деле, это не что иное, как расширение множества вариантов и приведение задачи целочисленного линейного программирования к задаче линейного программирования. Решение такой задачи не составляет трудностей в алгоритмическом смысле, но является не эффективным в вычислительном смысле, поскольку решать линейных задач приходится достаточно много.

Что касается признака оптимальности, то формально он состоит из двух частей. Первая часть – проверяется наличие перспективного подмножества вариантов, то есть подмножества, в котором может находиться лучше вариант, чем проверяемый на оптимальность. Если таких подмножеств не существует, то рассматривается вторая часть признака. Поскольку в подмножестве вариантов может находиться вариант лучше проверяемого, то значение целевой функции проверяемого варианта сравнивается с оценкой подмножества. Требуется совпадение по величине этих значений. Этот момент и предопределяет скорость сходимости алгоритма, зависящего от точности оценки.

Перебираемое количество вариантов в методе вервей и границ в некоторой степени зависит и от выбранной вершины дерева решений в случае, если полученный очередной вариант окажется не оптимальным. Обычно выбирается вершина с наилучшей (максимальной или минимальной) оценкой. Этот прием понимается, как само собой известный, используется, можно сказать, по умолчанию. Однако, максимальные по значению оценки имеют подмножества, в которых количество вариантов побольше. Это в дереве решений находится в верхних ярусах и до получения варианта необходимо пройти длинный путь, что уменьшает эффективность работы алгоритма. Возможны другие подходы, в том числе и рандимизированный по отношению к оценкам подмножеств. В работе [7] были предложены функции предпочтения, используемые при выборе вершины. Это ещё один элемент, позволяющий модифицировать алгоритмы метода ветвей и границ с целью увеличения их скорости сходимости.

Приведем несколько подходов реализации метода ветвей и границ и доведения до алгоритмов.

Достаточно давно [7] был предложен способ оценивания множества вариантов решения задачи линейного программирования с булевыми переменными, используя идею расширения – сужения множества вариантов. Сама идея была предложена профессором Шкубой В.В. [6]. Её использование значительно упрощает процедуру получения оценок, хотя далеко не всегда даёт желаемую точность оценивания. Однако часто неточность компенсируется вычислительной простотой процедуры определения значения оценки.

Идея состоит в том, что множество вариантов, задаваемых системой ограничений, расширяется путем отбрасывания некоторых требований к искомым величинам. Задача переносится в другой класс задач линейной оптимизации, решение которой не составляет трудностей.

Пусть имеется задача целочисленного линейного программирования (ЦЛП) в постановке

$$Z = \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j , \tag{3}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i ,\ i = \overline{1,m}; \tag{4}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}; \tag{5}$$

$$x_j \in \{0, N\}, \tag{6}$$

где N – множество натуральных чисел.

Отбрасывая требования целочисленности (6), получаем задачу линейного программирования (ЛП). Значение целевой функции при оптимальном решении задачи ЛП даст оценку множества вариантов, описываемых ограничениями (4)-(5)-(6), причем достаточно точную.

Если требование (6) заменить на требование

$$x_j \in \{0,1\}, \tag{7}$$

то имеем задачу ЦЛП с булевыми переменными. Соответствующая задача ЛП будет иметь удвоенную размерность. Требование (7) распадается на два требования, а именно

$$x_j \le 1;$$

$$x_j \text{ –целое.}$$

Матрица условий становится размером (m+n)×n. Решение задачи симплекс методом, причем многократно, при такой размерности затруднительно во времени.

Процедуру решения задачи ЦЛП с булевыми переменными с целью оценки множества вариантов можно привести к решению m одномерных не целочисленных задач о ранце [6].

Данный подход был опубликован [9] и сразу получил позитивную оценку и был использован при определении оптимального размещения геологических установок [10].

В 60-х годах XX столетия в институте кибернетики АН УССР был разработан метод последовательного анализа вариантов, состоящий в последовательном поэтапном конструировании конкурентоспособных вариантов [5].

Последовательное конструирование решения представляет собой пошаговый процесс. На каждом шаге конкретизируется значение одной компоненты вектора решений. Присвоение значения компоненте предопределяет подмножество тех вариантов, которые содержат компоненту с конкретным значением. Таким образом, последовательное построение решения используется как способ разбиения множества вариантов на подмножества.

Сама организация последовательного построения решений – это последовательная «сборка» варианта по одной компоненте с конкретным её значением. Номер компоненты, подлежащей конкретизации на очередном шаге может определяться по-разному. Простейший способ – это следование лексикографическому упорядочению самих компонент. На первом шаге конкретизируется первая компонента, на втором – вторая и т.д. Однако в таком случае необходимо пересмотреть все компоненты, независимо от того, компонента может иметь положительное значение или только нулевое. Любое упорядочение с учётом значений коэффициентов целевой функции, а также влияние конкретизируемой положительным значением компоненты на неувязки в системе ограничений не может не влиять на скорость сходимости алгоритма.

Установление очереди конкретизации переменных имеет начало в методе Балаша [11]. Метод является основным (может и единственным) представителем одностороннего ветвления. Здесь отсутствует понятие оценки подмножеств. Вводится понятие множества так называемых «хороших векторов». Смысл состоит в том, что на основе уже имеющегося частичного решения выбираются остальные компоненты вектора решений, которые могут принимать значение «единица». Вариант решения считается определенным, если не имеется компонент, конкретизируемых единичным значением. Признак оптимальности в данном методе тоже обособленный. Заключается он в том, что больше единичных значений нельзя поставить ни в одном продолжении ни одного частичного решения. Такой признак считается «слабым» и может привести к полному перебору, чтобы убедиться в отсутствии лучшего варианта. Довольно часто [12] проверка на оптимальность занимает больше времени, чем получение самого оптимального решения. Однако эту идею установки приоритетности переменных удалось перенести в алгоритмы с двухсторонним ветвлением, где признак оптимальности более «жесткий».

Случай определения номера конкретизируемой компоненты, навеянный идеями алгоритма Балаша, был предложен автором [13], и дал очень хорошие результаты в смысле скорости сходимости [14]. Сущность этого подхода состоит в том, что предпочтение отдается компоненте, которая дает относительно больший «вклад» в значение целевой функции и, тем самым, меньше всего «исчерпает» компоненты вектора ограничений.

С целью уменьшения количества пересматриваемых компонент создается множество называемых «хороших» компонент, т.е. тех, которые могут принимать положительное значение.

Каждая переменная, которая в силу ограничений может принимать положительное значение, оценивается. По величине оценки устанавливается приоритетность (перспективность) каждой переменной. Другими словами, устанавливается очередь их конкретизации, т.е. включение переменных в вариант решения с положительным значением. Величина оценки приоритетности зависит от двух моментов. Во-первых, какой «вклад» в значении целевой функции принесет конкретизируемая переменная. Это определяется как относительная величина по сравнению с минимальным значением коэффициента целевой функции. Во-вторых, насколько в сумме изменится значение компонент вектора ограничений, если переменная будет подлежать конкретизации. Произведение этих двух величин даст оценку переменной. Более подробно смотрите [13].

Что касается стратегии выбора вершины для дальнейшего ветвления, то включение эвристик в детерминированную часть алгоритмов метода ветвей и границ также дает свой результат. Структура метода позволяет осуществить выборку любой вершины дерева решений. Исход – получение лучшего решения зависит от того «начала», которое было выбрано. Какой вершине отдать предпочтение предопределяет функция предпочтения.

В детерминированном случае выбор ветви может осуществляться согласно величине оценки ветви. Довольно часто оценки ветвей либо одинаковые, либо близки между собой. Однозначный выбор одной из них не всегда оправдан. По этому, схемы решения дополняются идеями Монте-Карло таким образом, что выбор ветви осуществляется с частотой, пропорциональной значению оценки, либо с одинаковой частотой.

Предположим, что вершины пронумерованы от 1 до N. Сопоставим в соответствие каждой вершине величину p_q такую, что $\sum_{q=1}^{N} p_q = 1$, и некоторый интервал $[r, s]$, где $r_q = S_{q-1}; s_q = r_q + p_q u r_0 = 0$.

Длина интервала p_q может быть различной. Рассматриваются три случая:

1. Все вершины имеют одинаковую вероятность при выборе: $p_q = 1/N$;
2. Величина вероятности пропорционально зависит от величины оценки ветви: $p_q = \xi_q \Big/ \sum_{q=1}^{N} \sigma_q$;
3. Величина вероятности пропорционально зависит от k «наилучших» оценок вершин $p_q = \xi_q \Big/ \sum_{q \in R_q} \sigma_q$, где R_q номера k вершин с наибольшими значениями оценок.

Алгоритмически реализация функций предпочтения осуществляется через генерацию равномерно-распределенных случайных чисел из интервала $[0,1]$. Функции предпочтения могут использоваться в работе детерминированных алгоритмов метода ветвей и границ. Тогда их эффективность оценивается числом итераций при получении оптимального решения. Если алгоритм предназначен для получения достаточно «хорошего решения», то их эффективность оценивается рядом показателей, основанных на статистике. В первую очередь необходимо определить степень близости к оптимальному плану, из планов, получаемых этой функцией предпочтения. Кроме того, математическое ожидание отклонения полученных планов от оптимального тоже является оценкой эффективности функции предпочтения. При более серьезной оценке функции предпочтения следует рассмотреть динамику изменения отклонений от оптимального плана, что можно использовать при прогнозировании появления улучшенного плана.

Выводы

Были приведены различные модификации метода ветвей и границ для решения задач целочисленного линейного программирования. Модифицировались все основные составляющие самого метода. Упрощалась процедура получения оценок множества вариантов. Решение соответствующей линейной задачи заменялось решением ряда нецелочисленных одномерных задач о ранце. При таком упрощении процедуры оценивания «ослаблялась» точность получения оценок, но значительно упрощалась вычислительная сложность. Потеря точности компенсировалась простотой вычислительной процедуры и ускорила получение оптимального решения.

Приведенная процедура разбиения множества вариантов на подмножества имеет две модификации. На основе последовательного построения решения была предложена компоновка решения согласно лексикографическому упорядочению компонент варианта решения и выборочным способом конкретизации переменных. Оба способа являются дополнением классического метода ветвей и границ. Кроме того, второй способ (выборочный) значительно ускорил сходимость алгоритмов, построенных на этой идее.

В практическое использование метода ветвей и границ введены элементы Монте-Карловских процессов. Функции предпочтения со случайным выбором ветви для продолжения компоновки решения, можно сказать, новый элемент по сравнению и детерминированным выбором по наибольшей оценке ветви. Небольшой эксперимент даёт надежду на ускорение сходимости алгоритмов с использованием функции предпочтения.

Все рассмотренные моменты модифицирования метода ветвей и границ между собой независимы, так как усовершенствуются разные элементы метода. Следуя этому, можно создать не один алгоритм метода и выбрать самый удачный.

Список литературы

1. Dantzig, G.B. Discrete –variable extremum problems / G.B. Dantzig // Operat. Res. – 1957. – Vol. 5, №2. – PP. 266–277.
2. Gomory, R.E. Outline of an algorithm for integer solution to linear programs / R.E. Gomory // Bull. Amer. Math. Soc. – 1958. – Vol. 64, №5. – PP. 275–276.
3. Land, A.H. An automatic of solving discreate programming problems / A.H. Land, A.G. Doig // Econometrica. – 1960. – Vol. 28, №3. – PP. 497–520.
4. Little, I.D.C. An algorithm for the traveling salesman problems / I.D.C. Little, K.G. Murty, D.W. Sweeney, C. Karel // Operat Res. – 1963. – Vol. 11, №6. – PP. 972-980.
5. Михалевич, В.С. Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение, I, II / В.С. Михалевич // Кибернетика. – 1965. – №1. – С. 45–55; №2. – С. 85–89.
6. Шкурба, В.В. Конструктивные подходы к решению задач дискретной оптимизации / В.В. Шкурба // В кн. «IVсимпозиум по экстремальным задачам» тезисы докладов, Каунас, 1969. – С. 15–17.
7. Лиепоните-Юхименко, Б.И. Об эффективности функций предпочтения целочисленнорго линейного программирования / Б.И. Лиепоните-Юхименко // Lietuvos matematikos rinkinys. – 1983. – XXIII, №1. – С. 134–140.
8. Шкуба, В.В. Схема ветвей и границ в задачах целочисленного линейного программирования с булевыми переменными / Шкуба В.В., Юхименко Б.И. // Труды Одесского политехнического института. – 1989. – Вып. 2. – С. 176–215.
9. Юхименко, Б.И. О блочном подходе решения задач целочисленного линейного программирования методом ветвей и границ / Б.И. Юхименко // В сб.: Теоретические и методологические основы создания АСУ. – Межвуз. Научн. сб.: М., 1974. – С. 188–191.
10. Венгерова, И.В. Применение целочисленного программирования к оптимальному планированию геологических мероприятий / И.В. Венгерова, А.В. Тарасенко // Экономико-математические методы. – 1974. – Т. 10, № 5. – С. 1018–1020.
11. Balas, E. An additive algorithm for solving linear programs with zero-one variables / E. Balas // Operat Res. – 1965. – Vol. 13, №4. – PP. 517–546.
12. Корбут, А.А. Дискретное программирование / А.А. Корбут, Ю.Ю. Финкельштейн. – М.: Наука, 1969. – 370 с.
13. Юхименко, Б.И. Ускоренный алгоритм метода ветвей и границ для решения задач целочисленного линейного программирования / Б.И. Юхименко // Труды Одесского политехнического университета. – 2004. – Вып. 2. – С. 223–226.
14. Юхименко, Б.И. Сравнительная характеристика алгоритмов метода ветвей и границ для решения задач целочисленного линейного программирования / Б.И. Юхименко, Ю.Ю. Козина // Труды Одесского политехнического университета. – 2005. – Вып. 2 (24). – С. 199–204.
15. Юхименко, Б.І. Вибір ефективного алгоритму розв'язання задач цілочисельного лінійного програмування / Б.І. Юхименко // Труди Одеського політехнічного університета. – 2003. – Вип. 2 (20). – С. 172–176.
16. Юхименко, Б.И. Обобщение алгоритмов метода ветвей и границ для решения задач линейного программирования с булевыми переменными / Б.И. Юхименко // Информатика и математические методы в моделировании. – 2012. – Том 2, №2. – С. 173–179.

МОДИФІКАЦІЇ МЕТОДУ ГІЛОК І МЕЖ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЦІЛОЧИСЛОВОГО ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА ЇХ ЕФЕКТИВНІСТЬ

Б. В. Юхименко

Одеський національний політехнічний університет,
просп. Шевченка, 1, Одеса, 65044, Україна; e-mail: pm1987pm@gmail.com

В роботі дано короткий огляд розробок за комбінаторних методів розв'язання задач цілочислової лінійної оптимізації. Наведено основні складові методу гілок і меж, які можна розглядати по-різному і отримувати нові модифікації цього методу. Наведено оцінки ефективності роботи модифікаційних складових.
Ключові слова: оцінка, послідовне побудова, конкретизація, часткове рішення, функції переваги.

BRANCH AND BOUND METHOD MODIFICATIONS FOR THE SOLUTION OF INTEGER LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS AND THEIR EFFICACY

B.I. Yukhimenko

Odessa National Polytechnic University,
1, Shevchenko Ave., Odessa, 65044, Ukraine; e-mail: pm1987pm@gmail.com

The combinatorial approaches to the solution of integer linear optimization problems were briefly reviewed. We discussed the main components of a branch and bound method which can be considered differently to obtain new modifications of the method. The efficacy of the operation of modified components was assessed.
Keywords: assessment, sequential sampling, obtaining specific forms, preference functions.