УДК 004.61

Informatics and Mathematical Methods in Simulation
Vol. 7 (2017), No. 1-2, pp. 7-18

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ МЕТОДОВ ТОЧНОСТНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ РЕДУКЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

А.Ф. Верлань[1], А.А. Верлань[2], С.А. Положаенко[3]

[1] Институт проблем моделирования в энергетике,
ул. Генерала Наумова, 15, Киев, 03164, Украина; e-mail: afverl@gmail.com
[2] Норвежский университет науки и технологий,
NTNU Gjøvik, Teknologiveien 22, 2815 Gjøvik, Norway; e-mail: andriy.verlan@ntnu.no
[3] Одесский национальный политехнический университет,
просп. Шевченко, 1, Одесса, 65044, Украина; e-mail: sanp277@gmail.com

На основе излагаемого принципа параметрической редукции предложены подходы к алгоритмизации процессов упрощения математических моделей, а также группа операций, обеспечивающих конструирование и эффективную реализацию соответствующих алгоритмов посредством вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: математическая модель, параметрическая редукция, мера погрешности, коэффициент согласованности, вычислительная сложность, неустранимая погрешность, алгоритм параметрической редукции

Введение

Задача редукции (упрощения) модели ставится как задача минимизации некоторой меры отклонения выходов исходной и упрощенной моделей [1, 2]. При этом, как правило, предполагается, что параметры исходной модели известны точно. Естественно, на практике это обстоятельство не имеет места, в связи с чем вопрос упрощения математических моделей может ставиться как вопрос согласования вида модели с точностными характеристиками исходных данных. Вполне понятно, что не имеет смысла использовать сложные в структурном отношении модели, если их параметры известны с достаточно большой погрешностью. Это обстоятельство обуславливает необходимость согласования таких характеристик моделей, как сложность и точность исходных данных. Несмотря на то, что такая постановка задачи упрощения моделей известна давно, являясь следствием техники приближенных вычислений (см., например, [3, 4, 5]), определение конструктивных путей ее решения имеет важное значение при исследовании сложных объектов и, в частности, при разработке алгоритмического и программного обеспечения вычислительно-управляющих систем различного назначения.

Достаточно общая постановка задачи редукции математических моделей на основе идеи согласования вида модели с точностью исходных данных дана в работе [5], где она формулируется как задача минимизации функционала сложности на классе моделей, формально сопоставимых по точности с наблюдениями (исходными данными). Класс формально сопоставимых моделей определяется ограничением типа неравенства на меру точности. В рамках указанной общей постановки задачи упрощения математических моделей может быть сформулирован ряд частных постановок, одна из которых – точностная параметрическая редукция моделей, и основные подходы к ее решению рассматриваются далее.

Цель работы

Целью работы является получение условий допустимого параметрического упрощения математических моделей исследуемых явлений (точностной параметрической редукции) и разработка алгоритмов решения задачи параметрической редукции в пространстве параметров моделей.

Основная часть

Пусть задано некоторое математическое описание (модель) M моделируемого явления, а исходные данные (обычно это числовые значения параметров) заданы с некоторой погрешностью, мерой которой служит ε_ρ. Если ε_ρ велико, то исходное математическое описание M может быть заменено некоторым другим описанием M' (в том числе более простым) с учетом ε_{yp} – меры погрешности выходных переменных исходной модели, обусловленной неточностью исходных данных, т.е. наличием ε_ρ. Предположим, что $\varepsilon_\rho = 0$, тогда замена исходного описания каким-либо другим (в том числе более простым) приведет к появлению погрешности приближения $\varepsilon_{yM} \neq 0$. В этом случае вопрос о применимости упрощенной модели должен решаться на основе анализа требований к точности моделирования исследуемого явления. Иначе говоря, применение упрощенной модели допустимо, если $\varepsilon_{yM} \leq \varepsilon_з$, где $\varepsilon_з$ – заданное значение меры погрешности моделирования. Если же имеет место строгое неравенство $\varepsilon_{yM} < \varepsilon_з$, то это свидетельствует о возможности дальнейшего упрощения исходной модели.

В общем случае применимость математической модели M или M' определяется условием

$$\varepsilon_{yM} + \varepsilon_{yp} \leq \varepsilon_з . \quad (1)$$

Здесь ε_{yM} – либо мера погрешности описания исследуемого явления моделью M, либо мера погрешности, обусловленной заменой заданной модели M на какую-либо другую M' (в том числе более простую). В дальнейшем под ε_{yM} будет пониматься именно мера погрешности, обусловленной заменой исходной заданной модели более простой.

В качестве характеристики согласованности с погрешностью исходных данных математической модели M', заменяющей модель M, примем величину

$$\alpha = \varepsilon_{yM} / \varepsilon_{yp} , \quad (2)$$

которую будем называть коэффициентом согласованности. При этом условие применимости (1) модели M' приобретает вид

$$(\alpha + 1)\varepsilon_{yp} \leq \varepsilon_3 \quad (3)$$

и модель M' является α - согласованной с погрешностью исходных данных ε_p модели M, если $\varepsilon_{yM} = \alpha\varepsilon_{yp}$ и $\alpha > 0$.

Задача согласования модели M с точностью исходных данных означает получение модели M' с определенным значением коэффициента согласованности. Исходя из практических соображений (например, при решении инженерных задач), в качестве ограничения снизу может быть принято значение $\alpha = 0.01$, так как дальнейшее уменьшение коэффициента согласованности, означающее использование моделей, мало отличающихся от исходной, не приведет к заметному выигрышу в точности моделирования. С другой стороны, если $\alpha > 10$, то общая погрешность моделирования почти целиком будет определяться ε_{yM}, причем в этом случае при моделировании сложных объектов удовлетворительные значения ε_{yM} практически невозможны. Таким образом, коэффициент согласованности математических моделей практически можно ограничить интервалом $(0.01,\ 10)$.

При решении конкретных задач максимальное значение коэффициента согласованности определяется условием применимости (3) как

$$\alpha_{\max} = \varepsilon_3 / \varepsilon_{yp} - 1\,. \tag{4}$$

Пусть теперь N_M – мера вычислительной сложности математической модели M (для динамических объектов, описываемых, например, обыкновенными дифференциальными уравнениями в нормальной форме, в качестве N_M может быть принято число приведенных к одному типу операций, необходимых для вычисления правой части), а μ_α – множество математических моделей, коэффициент согласованности которых с погрешностью исходных данных не превосходит α.

Если $\alpha < \alpha_{\max}$, то все модели из μ_α эквивалентны в смысле применимости, так как для любой модели выполняется условие применимости (3). В то же время, модели из μ_α могут быть не эквивалентными в смысле вычислительной сложности. Именно при этом условии и появляется возможность упрощения заданной модели M путем замены ее на модель $M' \in \mu_\alpha$, для которой мера сложности $N_{M'} < N_M$.

Математическая модель M'_0 будет оптимально упрощенной, если

$$N_{M'_0} = \min_{M' \in \mu_\alpha} N_{M'}\,. \tag{5}$$

Очевидно, что мера вычислительной сложности $N_{M'}$ является убывающей функцией от коэффициента согласованности. Следовательно, коэффициент согласованности оптимальной упрощенной модели M'_0 превосходит α.

Построение α-согласованных, а также оптимальных упрощенных моделей преследует двоякую цель. С одной стороны – это обоснование тех или иных допущений, позволяющих упростить модель, с другой – снижение требований к быстродействию системы, реализующей модель. Практическое же решение рассматриваемой задачи сталкивается со значительными трудностями, обусловленными в основном сложностью задачи оценки величин ε_{yM}, ε_{yp}, а также трудностями формализации множества μ_α.

Реальным путем преодоления трудностей является использование параметрического подхода к построению упрощенных моделей. Сущность его заключается в замене значений определенных параметров исходной модели M на такие значения, которые уменьшают значение меры вычислительной сложности. Обычно это замена заданных значений некоторых параметров исходной модели на нулевые (как для аддитивных, так и для мультипликативных параметров) или/и единичные (для мультипликативных параметров). Такого рода параметрическое упрощение целесообразно применять в тех случаях, когда математические модели исследуемых процессов или явлений содержат достаточно большое количество параметров, значения которых определяются по экспериментальным данным. К таким моделям могут быть отнесены модели в виде систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений большой размерности, систем дифференциальных уравнений (как в обыкновенных, так и в частных производных) с коэффициентами, являющимися сложными функциями входных и выходных переменных, интегральных уравнений с ядрами, вид которых определяется реальными характеристиками исследуемых объектов и др.

Теоретическое обоснование возможности параметрического упрощения математических моделей для построения α-согласованных и оптимальных упрощенных моделей базируется на результатах теории точности применительно к анализу неустранимой погрешности.

Пусть $M(y,V,\rho)$ – математическая модель; y, V, ρ – векторы выходных, входных переменных и параметров соответственно, принадлежащих нормированным пространствам с метриками ρ_y, ρ_V, ρ_p, определяемыми соответствующими нормами; N_p – мера вычислительной сложности.

Пусть ρ_0 – неизвестный вектор точных значений параметров модели, а ρ_3 – вектор заданных значений параметров. При этом известно, что

$$\rho_p(\rho_3, \rho_0) \le \varepsilon_p . \qquad (6)$$

Условие (6) определяет множество Ω_p такое, что из $\rho \in \Omega_p$ следует $\rho_p(\rho_3, \rho) \le \varepsilon_p$. Тем самым определено множество μ возможных моделей

$$\mu = \{M(y,V,\rho) : \rho \in \Omega_\rho, \rho_p(\rho_3, \rho) \le \varepsilon_p\},$$

причем модель $M(y,V,\rho)$ представляет собой исходное математическое описание.

Пусть, далее, $\rho_y(\rho_3, \rho)$ – мера погрешности в пространстве выходных переменных, обусловленная неточностью задания вектора ρ_3, $\rho_y(\rho_3, \rho)$ – мера погрешности, обусловленная заменой заданной модели $M(y,V,\rho_3)$ на некоторую, в частности, более простую модель $M(y,V,\rho_r)$; т.е. $\rho_y(\rho_3, \rho)$ – мера погрешности, характеризующая отличие точной модели $M(y,V,\rho_0)$ от модели $M(y,V,\rho_r)$.

Для указанных погрешностей могут быть определены оценки

$$\rho_y(\rho_3, \rho) / \rho \in \Omega_\rho, V \in \Omega_\rho \le \varepsilon_{yp}, \qquad (7)$$

$$\rho_y(\rho_3, \rho_r) / V \in \Omega_v \le \varepsilon_{yM}, \qquad (8)$$

$$\rho_y(\rho_0, \rho_r) / V \in \Omega_v \le \varepsilon_{yr} \qquad (9)$$

(Ω_v – область возможных значений входных переменных), а неравенство треугольника определяет связь между ними:

$$\varepsilon_{yr} \le \varepsilon_{yM} + \varepsilon_{yp} = (\alpha + 1)\varepsilon_{yp}, \qquad (10)$$

причем, $\varepsilon_{yr} \le \varepsilon_{yM}$. Если $\rho_r \in \Omega_\rho$, то $\varepsilon_{yM} \le \varepsilon_{yr}$ и, следовательно, множество μ возможных моделей представляет собой множество α-согласованных моделей при $\alpha = 1$, т.е. $\mu = \mu_1$. Однако применение параметрического подхода для поиска упрощенных моделей в множестве μ имеет ограниченные возможности. Действительно, множество Ω_ρ, как правило, не содержит точек, принадлежащих координатным осям, в связи с чем при таком упрощении моделей можно рассчитывать лишь на сокращение числа значащих цифр в представлении заданных параметров. Отметим, что такого рода упрощение находит применение в технике приближенных вычислений, а также может использоваться при организации вычислительных процессов в системах моделирования на этапе выбора вычислительных средств.

В общем случае, если $\rho_r \in \Omega_\rho$, то $\varepsilon_{yM} \le \varepsilon_{yr}$ и, следовательно, коэффициент согласованности соответствующей модели будет больше единицы. Тем не менее существует принципиальная возможность определения множества α-согласованных моделей при $\alpha \le 1$ и $\rho_r \overline{\in} \Omega_\rho$. Наличие такой возможности обусловлено тем, что погрешность в пространстве выходных переменных, вызванная неточностью задания вектора ρ_3, оценивается в метрике ρ_y.

Неопределенность значений вектора параметров исходной модели (наличие Ω_ρ) приводит к неопределенности в значениях выходных переменных, количественной мерой которой служит ошибка

$$\Delta y = y(\rho, V) - y(\rho_3, V) / V \in \Omega_V . \quad (11)$$

Область $\Omega_{\Delta y}$ возможных значений ошибки Δy имеет сложную конфигурацию в пространстве выходных переменных, зависящую от вида Ω_ρ, свойств математического описания $M(y, V, \rho)$, и определяется уравнением для неустранимой погрешности. Детальная характеристика $\Omega_{\Delta y}$ методами анализа неустранимой погрешности, развитыми в теории точности, может быть получена лишь для простейших задач. Обычно же область принадлежности ошибки характеризуется некоторым шаром S (в заданной метрике ρ_y), радиус которого (в данном случае ε_{yp}) определяется на основе оценки сверху (7) для соответствующей метрике ρ_y нормы. Вследствие грубости применяемых оценок имеет место соотношение: $S \supset \Omega\Delta y$. Шару S в пространстве выходных переменных соответствует область Ω'_ρ в пространстве параметров такая, что из $\Omega'_\rho \supset \Omega_\rho$ и $\rho \in \Omega'_\rho$ следует $\rho_y(\rho_3, \rho) \le \varepsilon_{y_p}$. Следовательно, если $\rho_r \in \Omega'_\rho$, то $\varepsilon_{yM} \le \varepsilon_{yp}$ и соответствующее множеству Ω'_ρ множество μ' возможных моделей является множеством согласованных моделей при $\alpha = 1$.

Из-за наличия включения Ω'_ρ применение параметрического подхода к упрощению исходного описания в классе моделей μ' имеет бо́льшие возможности по сравнению с классом μ. Объясняется это тем, что для сложных задач с большим числом параметров, задаваемых с не очень высокой точностью, область Ω'_ρ содержит точки, принадлежащие координатным осям пространства параметров. Следовательно, в качестве вектора ρ_r может быть выбран вектор с некоторыми нулевыми компонентами, чем и достигается уменьшение значения меры вычислительной сложности N_{pr}.

В общем случае Ω'_ρ может не пересекаться с координатными осями, однако и при этих условиях, как это можно показать, существует множество $\Omega'_\rho(\alpha) = \{\rho : \rho_y(\rho_3, \rho) \le \alpha\varepsilon_{yp}, \alpha > 1\}$, содержащее точки координатных осей и определяющее множество моделей μ'_α, согласованных с погрешностью исходных данных с коэффициентом согласованности $\alpha > 1$. Действительно, пусть $\Omega'_\rho(\beta) = \{\rho : \rho_p(\rho_3, \rho) \le \rho\varepsilon_p\}$. Ясно, что $\Omega_p(1) = \Omega_p$ и существует такое значение $\beta_0 = 1$, что при $\beta > \beta_0$ шар $\Omega_p(\beta)$ пересекается, по крайней мере, с одной из координатных осей пространства параметров. Множество $\Omega_p(\beta)$ определяет некоторую область возможных значений ошибок выходных переменных $\Omega_{\Delta y}(\beta)$, которая в метрике ρ_y оценивается шаром S_α радиуса $\alpha(\beta)\varepsilon_{yp}$, т.е.

$$\rho_y(\rho_3, \rho) / \rho \in \Omega'_\rho(\beta) \le \alpha(\beta)\varepsilon_{yp}. \tag{12}$$

Здесь $\alpha(\beta)$ – неотрицательная неубывающая функция, причем $\alpha(1) = 1$, т.е. будем считать, что функция $\alpha(\beta)$ – возрастающая и ограниченная. Первое допущение означает, что с ростом погрешности исходных данных погрешность выходных переменных растет (для практических задач можно считать это условие выполняющимся). Второе условие означает корректность всех моделей с параметрами из $\Omega_p(\beta)$, что является ограничением применимости параметрического подхода к упрощению моделей.

Пусть теперь $\Omega'_\rho(\alpha) = \{\rho : \rho_y(\rho_3, \rho) \le \alpha(\beta)\varepsilon_{y_p}\}$ – прообраз в пространстве параметров шара S_α. Так как $\Omega'(\alpha) \supset \Omega(\beta)$, то множество $\Omega'_\rho(\alpha)$ также пересекается по крайней мере с одной из координатных осей, что и требовалось показать. Это свидетельствует о следующем: для любого $\Omega_\rho = \{\rho : \rho_p(\rho_3, \rho) \le \varepsilon_p, \varepsilon_p > 0\}$ существует $\alpha_0 > 0$ такое, что при $\alpha > \alpha_0$ в множестве μ_α α-согласованных с погрешностью исходных данных корректных моделей $M(y, V, \rho)$, определяемом множеством параметров $\Omega_\rho(\alpha) = \{\rho : \rho_y(\rho_3, \rho) \le \alpha\varepsilon_{y_p}\}$, содержится непустое подмножество $\overline{\mu}_\alpha$ моделей $M(y, V, \overline{\rho})$, для которых $N_{\overline{p}} < N_p / \rho \in \Omega_\rho$.

Данный вывод является теоретическим обоснованием возможности применения параметрического подхода к построению упрощенных математических моделей на основе согласования вида модели с точностью исходных данных. А устанавливаемый факт существования α-согласованных моделей с меньшим значением меры вычислительной сложности, чем исходная модель, составляет сущность принципа точностной параметрической редукции математических моделей, который может быть сформулирован следующим образом.

Для любой модели с неточно заданными параметрами при условии, что погрешность выходных переменных является возрастающей и ограниченной функцией от погрешности параметров, существует более простая α-согласованная модель, отличающаяся от исходной значениями некоторых параметров, уменьшающими меру вычислительной сложности.

Естественно, что пригодность параметрически упрощенных моделей, получаемых в результате точностной параметрической редукции, определяется условием (3), так что практический интерес представляет получение более простых, чем исходное, математических описаний с не очень большим значением коэффициента согласованности. Поэтому желательно уметь достаточно просто априори оценивать коэффициент согласованности параметрически упрощаемых моделей.

Оценка неустранимой погрешности в рамках линейной теории точности для широкого класса задач (математические описания которых представляют собой упрощаемые модели) приводит к линейной форме зависимости ε_{yp} от ε_p, т.е.

$$\varepsilon_{yp} = C_M \varepsilon_p , \tag{13}$$

где C_M – константа, определяемая свойствами задачи (для корректных задач – норма обратного оператора линейных уравнений неустранимой погрешности).

В этом случае нетрудно получить гарантированную оценку сверху для значения α_0 коэффициента согласованности моделей, которые могут быть получены в результате точностной параметрической редукции, т.е. для минимального значения α_0 коэффициента согласованности параметрически упрощенной модели $M(y,V,\overline{\rho})$ справедлива оценка

$$\alpha_0 \le \frac{\min\limits_{i=\overline{1,m}} \rho_p(\rho_3, \wp_i)}{\varepsilon\rho} = \alpha_b , \tag{14}$$

где $\wp_{i,}$ $i=\overline{1,m}$ – координатные оси в пространстве параметров.

Условие (13) означает, что функция $\alpha(\beta)$ имеет вид $\alpha(\beta)=\beta$. Значение β_0 определяется из условия, что шар $\Omega_\rho(\beta)$ радиуса $\beta_0\varepsilon_p$ касается ближайшей из координатных осей пространства $\wp_i, i=\overline{1,m}$ параметров, т.е.

$$\beta_0 \le \frac{\min\limits_{i=\overline{1,m}} \rho_p(\rho_3, \wp_i)}{\varepsilon\rho} ,$$

или из включения $\Omega'(\alpha(\beta_0)) \supset \Omega(\beta_0)$ следует $\alpha_0 \le \beta_0$.

Оценка (14) является, по существу, критерием применимости точностной параметрической редукции математических моделей. Так большие значения α_b (порядка десятков) свидетельствуют о нецелесообразности параметрического упрощения моделей и наоборот, малые значения α_b (порядка единиц) означают допустимость применения точностной параметрической редукции для построения приемлемых упрощенных моделей.

Рассмотрим кратко сущность основных подходов к построению алгоритмов точностной параметрической редукции.

1. Алгоритмы построения области $\Omega'(\alpha)$. Строятся на основе непосредственного определения прообраза в пространстве параметров шара S_α, оценивающего в пространстве выходных переменных область возможных значений ошибок. Алгоритмы требуют знания оценок $\varepsilon_{yM}, \varepsilon_{yM}$ и выполнения преобразования шара S_α радиуса $\alpha\varepsilon_{y_p}$ в область $\Omega'(\alpha)$.

2. Алгоритмы параметрической редукции в пространстве параметров. Строятся на основе определения эквивалентного вектора параметров $\rho_э \in \Omega(\alpha)$ такого, что реакция редуцированной модели с априори задаваемым вектором параметров ρ_r отличается от реакции исходной модели с вектором параметров $\rho_э$ на величину, которой можно пренебречь по сравнению с ε_{yM}. Алгоритмы требуют знания оценки ε_{yM} и решения задачи минимизации величины $\rho_y(\rho,\rho_r)$ по ρ при условии $\rho \in \Omega(\alpha)$.

3. Алгоритмы параметрической редукции в пространстве выходных переменных. Сущность алгоритмов этой группы состоит в оценивании принадлежности

ошибки редуцированной модели области $\Omega\Delta y$ (или некоторой ее оценки) возможных значений ошибок выходных переменных исходной модели. Алгоритмы требуют построения оценки области $\Omega\Delta y$ и определения ошибки (или ее оценки) редуцированной модели.

При разработке любого алгоритма из указанных групп возникает необходимость решения ряда частных задач, определяющих их вычислительную сложность и практическую применимость.

Для алгоритмов первой группы наиболее сложным в вычислительном отношении является преобразование S_α в $\Omega'_\rho(\alpha)$. Практическая применимость алгоритмов ограничивается простыми задачами, для которых возможно получение явных аналитических описаний области $\Omega\Delta y$.

Для алгоритмов второй группы наиболее сложным этапом является поиск $\min \rho_y(\rho, \rho_r)$. Практическое применение алгоритмов возможно в случаях, когда могут быть получены в явном виде уравнения для неустранимой погрешности Δy.

Применимость алгоритмов третьей группы определяется возможностью построения оценок области $\Omega\Delta y$.

Существенное влияние на сложность алгоритмов точностной параметрической редукции моделей оказывает решение и таких вопросов, как оценка ε_{yM} (для алгоритмов первой и третьей групп), назначение или определение ρ_r (для алгоритмов второй и третьей групп).

При оценке ε_{yM} преодоление вычислительной сложности достигается путем анализа ε_{yM} в одной точке пространства выходных переменных, соответствующей выбранному режиму моделирования, обладающему экстремальными свойствами.

При оценке реальным путем является использование линейной теории точности, дающей возможность практически оценивать меру погрешности выходных координат модели, обусловленной неточностью задания вектора параметров. При этом может использоваться либо аппарат теории чувствительности, либо организовываться определение частных вкладов в общую погрешность ошибок компонент вектора параметров с последующим их суммированием [4, 5].

Значение функций чувствительности или частных вкладов ошибок компонент вектора параметров позволяет решать задачу назначения или определения ρ_r путем ранжирования компонент вектора ρ_3 по чувствительности или по частному вкладу.

Для алгоритмов второй группы необходимо априори назначать ρ_r. Практическая реализация этой процедуры основывается как на предшествующем опыте исследования моделируемых процессов, так и на априорном анализе значимости отдельных параметров.

Детальный анализ свойств алгоритмов точностной параметрической редукции проведем лишь для алгоритмов второй группы. Структура алгоритмов редукции в пространстве параметров в общем случае определяется совокупностью следующих основных блоков.

1. Определение y_3 – реакции исходной модели с параметрами ρ_3 на выбранном режиме моделирования.

2. Назначение вектора параметров ρ_r такого, что $N_{pr} < N_{p3}$, т.е. априорный выбор редуцированной модели.

3. Определение y_r – реакции редуцированной модели на выбранном режиме моделирования.

4. Определение вектора параметров $\rho_э$ при условии $\|y_э - y_r\| << \|y_3 - y_r\|$, где $y_э$ – реакция исходной модели с параметрами на режиме моделирования.

5. Оценка выполнения условия $\rho_э \in \Omega(\alpha)$, что эквивалентно оценке коэффициента согласованности α при условии малости Ω_ρ.

6. Анализ результатов редукции – если результаты удовлетворительны, то «конец», иначе возврат ко второму блоку.

Рассмотрим представленные основные блоки алгоритма точностной параметрической редукции в пространстве параметров с точки зрения их практической реализации.

<u>Первый блок.</u> Практическая реализация зависит от вида модели и сводится к применению соответствующих численных методов анализа.

<u>Второй блок.</u> Основная трудность реализации заключается в отсутствии формализованных приемов определения значений ρ_r.

Использование предшествующего исследовательского опыта позволяет определить варианты структурной редукции исходных математических моделей, сводящиеся, как правило, к замене каких-либо функциональных зависимостей их линейными членами разложения в степенной ряд. Например, применительно к уравнениям динамики полета самолета подобные варианты структурной редукции часто заключаются в замене отдельных тригонометрических функций линейными членами в предположении малости соответствующих величин [6, 7, 8]. В этих случаях решение задачи точностной параметрической редукции дает возможность обосновать допустимость тех или иных структурных упрощений.

Априорный анализ значимости параметров основывается на сравнении порядка величин аддитивных составляющих, входящих в уравнения динамики. Выявленные при таком анализе члены, вклад которых в значение некоторой величины достаточно мал по сравнению с другими членами, образующими ту же величину, определяют соответствующие им коэффициенты, которые могут претендовать на роль незначимых.

Осуществленный каким-либо образом выбор подозреваемых на незначимость параметров определяет и выбор вектора ρ_r априори редуцированной модели. Следует, однако, отметить, что выбор конкретного значения ρ_r неоднозначен, так как формирование ρ_r может осуществляться с помощью любого подмножества априорного множества подозреваемых на незначимость параметров. С практической точки зрения привлекательной является «максималистская» стратегия формирования ρ_r, в результате чего ρ_r назначается с учетом всего априорного множества подозреваемых на незначимость параметров.

<u>Третий блок.</u> Реализуется аналогично первому блоку.

<u>Четвертый блок.</u> Наиболее сложный в вычислительном отношении, так как представляет собой решение задачи восстановления параметров модели $M(y,V,\rho)$. В общем случае реализация блока основывается на использовании алгоритмов минимизации отклонения реакции y_r редуцированной модели на выбранном режиме моделирования от реакции y_3 на том же режиме исходной модели путем варьирования параметров последней.

Для динамических объектов в математическом плане задача часто может быть сведена к решению нелинейных алгебраических уравнений

$$f(y,V,\rho) = 0\,, \qquad (15)$$

вид которых определяется типом модели относительно неизвестных ρ при условии, что $y = y_r$, $V = V_0$ и $\rho \in \Omega(\alpha)$. Последнее условие является принципиальным, так как в силу самой постановки задачи решение системы (15) существует, единственно и равно $\rho \in \Omega(\alpha)$. Таким образом, видно, что речь идет не просто о восстановлении параметров, а о приближении решения y_r редуцированной системы решением исходной системы при допустимых значениях ее параметров. Иначе говоря, вопрос ставится об эквивалентной замене влияния на точность моделирования подозреваемых на незначимость параметров влиянием допустимых отклонений параметров исходной модели. Именно это обстоятельство обусловливает вычислительную сложность данного блока алгоритма решения задачи параметрической редукции в пространстве параметров.

В предположении малости отклонений $\Delta\rho$ от заданного значения вектора параметров ρ_3 исходной модели уравнение относительно ошибки Δy имеет вид

$$f_y \Delta y + f_p \Delta\rho + \varphi = 0, \tag{16}$$

где f_y, f_p – матрицы Якоби вектор-функции $f(y, V, \rho)$ по соответствующим аргументам, φ – известная функция.

Если $\Delta y_r = y_3 - y_r$ мало, то искомый вектор приращений должен удовлетворять системе

$$f_y \Delta y_r + f_p \Delta\rho + \varphi = 0 \tag{17}$$

и при условии максимальности ранга матрицы f_p, что на практике обычно и бывает, может быть определен из (17) как

$$\Delta\rho = -(f_p^T f_p)^{-1} f_p^T \left(f_y \Delta y_r + \varphi\right) = 0, \tag{18}$$

где f_p^T обозначает транспонированную матрицу f_p.

Другой подход к решению задачи базируется на преобразовании заданного множества Ω_ρ в эквивалентное в смысле точности множество $\Omega_{\bar{\rho}}$, где $\bar{\rho}$ – усеченный вектор параметров исходной модели, компоненты которого выбираются с учетом априорной значимости параметров линейности системы (15) относительно $\bar{\rho}$, а также минимальности размерности. При выборе $\bar{\rho}$ полезной может оказаться концепция фиктивных параметров и ряд других идей, используемых при организации контроля процессов моделирования с применением методов параметрической идентификации. Преобразование Ω_ρ в $\Omega_{\bar{\rho}}$ само по себе представляет достаточно сложную задачу, решение которой требует привлечения аппарата теории точности. Тем не менее, его применение может оказаться целесообразным, если данное преобразование выполнено по каким-либо другим причинам (например, в целях организации упоминавшегося выше контроля).

<u>Пятый блок</u>. Оценка выполнения условия $\rho_э \in \Omega(\alpha)$ не представляет сложности и является очевидной, причем в случае линейной зависимости ε_{yp} от ε_p коэффициент согласованности определяется как

$$\alpha_r = \rho_p(\rho_3, \rho_r) / \varepsilon_p.$$

<u>Шестой блок.</u> Результатом выполнения предыдущих блоков являются значения вектора параметров ρ_r редуцированной модели и коэффициента согласованности α_r

ее с погрешностью исходных данных. Если обозначить нижнюю и верхнюю границы коэффициента согласованности как α_H и α_b, то задача считается решенной, когда $\alpha_H \le \alpha_r \le \alpha_b$. В противном случае осуществляется возврат ко второму блоку. При этом, если $\alpha_H < \alpha_r$, то формирование нового значения вектора параметров ρ_r должно осуществляться с увеличением числа априори незначимых параметров и наоборот, если $\alpha_r < \alpha_b$.

Выводы

Оценивая в целом практическую ценность алгоритмов решения задачи параметрической редукции в пространстве параметров, следует отметить, что узловым моментом, определяющим его применимость, является необходимость пересчета отклонений реакции редуцированной модели от реакции, заданной в области исходных данных. Трудоемкость этого процесса в основном и определяет вычислительную сложность алгоритмов.

Список литературы

1. Горбань, А.В. Об упрощении математических моделей сложных систем и о некоторых приложениях теории / А.В. Горбань // Кибернетика и вычислительная техника. — К.: Наукова думка, 1976. — Вып. 37. — С. 10–14.
2. Суздаль, В.С. Редукция модели при синтезе регуляторов для управления кристаллизацией / В.С. Суздаль, Ю.М. Епифанов // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. — 2011. — Том 2. — Выпуск №3 (50). — С. 31–34.
3. Иванов, В.В. Методы вычислений на ЭВМ: Справочное пособие / В.В. Иванов. — К.: Наукова думка, 1986. — 584 с.
4. Opmeer, M.R. Model reduction for distributed parameter systems: A functional analytic view / M.R. Opmeer // Proceedings of the American Control Conference. — American Automatic Control Council, 2012. — P. 1418–1423.
5. Тихонов, А.Н. О математических методах автоматизации обработки наблюдений. Проблемы вычислительной математики / А.Н. Тихонов. — М.: Из-во Моск. ун-та, 1980. — С. 3-17.
6. Кваско, М.З. Числові методи комп’ютерного моделювання автоматичних систем. Алгоритми і програми: Навч. посібник. / М.З. Кваско, А.І. Кубрак, А.І. Жученко. — К.: Політехніка, 2003. — 360с.
7. Широкопояс, В.А. О возможности упрощения дифференциальных уравнений движения в задаче о максимальной скороподъемности самолета / В.А. Широкопояс // Ученые записки ЦАГИ. — Жуковский: ЦАГИ им. Н. Е. ЖУКОВСКОГО", 1980. — Вып. 1. — Т. XI. — 1980. — С.127-135.
8. Верлань, А.Ф. Вычислительные процессы в системах управления / А.Ф. Верлань, И.Е. Ефимов, А.В. Латышев. — Л.: Судостроение, 1981 — 248 с.

АЛГОРИТМІЗАЦІЯ МЕТОДІВ ТОЧНОСТНОЇ ПАРАМЕТРИЧНОЇ РЕДУКЦІЇ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

А.Ф. Верлань[1], А.А. Верлань[2], С.А. Положаенко[3]

[1]Інститут проблем моделювання в енергетиці,
Вул. Генерала Наумова, 15, Київ, 03164, Україна; e-mail: afverl@gmail.com
[2] Норвезький університет науки та технологій,
NTNU Gjøvik, Teknologiveien 22, 2815 Gjøvik, Norway; e-mail: andriy.verlan@ntnu.no
[3] Одеський національний політехнічний університет,
просп. Шевченка, 1, Одеса, 65044, Україна; e-mail: sanp277@gmail.com

На підставі викладеного принципу параметричної редукції запропоновано підходи до алгоритмізації процесів спрощення математичних моделей, а також група операцій, що забезпечує конструювання та ефективну реалізацію відповідних алгоритмів за допомогою обчислювальних експериментів

Ключові слова: математична модель, параметрична редукція, міра похибки, коефіцієнт узгодженості, обчислювальна складність, неліквідована похибка, алгоритм параметричної редукції

ALGORITHMIZATION OF THE METHODS OF THE ACCURATE PARAMETRIC REDUCTION OF MATHEMATICAL MODELS

A.F. Verlan[1], A.A. Verlan[2], S.A. Polozhaenko[3]

[1] Institute of Modeling Problems in Power Engineering,
Generala Naumova Str., 15, Kiev, 03164, Ukraine; e-mail: afverl@gmail.com
[2] Norwegian University of Science and Technology
NTNU Gjøvik, Teknologiveien 22, 2815 Gjøvik, Norway; e-mail: andriy.verlan@ntnu.no
[3] Odesa National Polytechnic University,
1 Shevchenko Str., Odesa, 65044, Ukraine; e-mail: sanp277@gmail.com

On the basis of the presented parametric reduction principle, approaches are proposed to algorithm the processes of simplification of mathematical models, as well as a group of operations that ensure the construction and effective implementation of the corresponding algorithms through computational experiments.

Keywords: mathematical model, parametric reduction, measure of error, coherence coefficient, computational complexity, unrecoverable error, parametric reduction algorithm