

Ведь Е.В., Толчинский Ю.А.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОВОГО И ГИДРАВЛИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

При анализе гетерогенных смесей удобно использовать следующие бинарные оппозиции: изолированность – неизолированность; связность – несвязность; конечность – бесконечность. Если фаза представлена в каждом объеме двухфазной среды, то она считается бесконечной, а в противном случае – конечной. Если любые две точки фазы можно соединить непрерывной кривой, не выходящей за пределы этой фазы, то такая фаза – связанная; в противном случае – несвязная. Изолированной фазой будет такая, элементы которой окружены другой фазой.

Модель коэффициента теплопроводности для такой среды заключается в построении коэффициента теплопроводности для типичного элемента фильтрующей среды. Такой элемент представлен кубом, в середине которого расположена пара кубической формы. Такое представление оправдано тем обстоятельством, что для включений с не слишком сильно выраженной анизотропией формы коэффициент теплопроводности слабо зависит от формы включения [1]. Для учета такого факта, что частицы фильтрующей среды касаются друг друга по площадям контакта, поверхность куба имеет выступы кубической формы. Элемент с перечисленными свойствами куба имеет выступы кубической формы. При построении формул для вычисления коэффициента теплопроводности используется способ, восходящий к Рэлею [1]. Производится изотермическое и адиабатическое разбиение элемента. Используются правила сложения тепловых сопротивлений при их последовательном и параллельном расположении. В итоге для коэффициента теплопроводности λ_{s1} получается следующее выражение:

$$\lambda_{s1} = \lambda_{ss} \frac{1 + (\omega_{ss} - 1)m_1^{2/3}}{1 + (\omega_{ss} - 1)m_1^{2/3}(1 - m_1^{2/3})}, \tag{1}$$

$$\omega_{ss} = \lambda_g / \lambda_{ss},$$

в котором λ_{ss} коэффициент теплопроводности твердой фазы; λ_g – коэффициент теплопроводности газа в поре. Выражение (1) относится к элементу без учета контактных выступов. С учетом этих выступов коэффициент теплопроводности принимает следующий вид:

$$\lambda_{s2} = \lambda_{ss} \frac{\lambda_{s1}}{1 + f(N) \frac{\lambda_{s1}}{\lambda_{ss}} \left(\frac{1 - m_1}{m_2} \right)^{1/3}}, \tag{2}$$

где λ_{s2} – коэффициент теплопроводности элемента с учетом контактных выступов. Величина $f(N)$ – множитель, который показывает, какое число площадок контакта передаёт тепло в направлении его потока.

По причине ненулевой проницаемости фильтрующей среды, обе фазы являются связными и взаимопроницаемыми. Коэффициент теплопроводности такого элемента определяется коэффициентом теплопроводности газа и коэффициентом теплопроводности твердой фазы. Выражение для коэффициента теплопроводности учитывает пористость каналов – m_2 только один раз, поскольку в выражении (2) для величины λ_{s1} эта пористость не учитывается. Наличие сужений и расширений в элементе может быть легко учтено. Ценою такого уточнения является значительное усложнение формул [1]. Ниже используется простейший вариант геометрии межпорового канала.

С учетом сказанного коэффициент теплопроводности принимает следующий:

$$\lambda_m = \lambda_{s2} \left[\theta^2 + \omega_{ss} - (1-\theta)^2 + \frac{2\omega_{ss}(1-\theta)}{1+\omega_{ss}\theta-\theta} \right],$$

$$\theta = \left(\frac{1-m_2}{1-2m_2} \right)^{1/2}.$$
(3)

Выражение (3) учитывает наличие пор с газом и каналов, их соединяющих. В это выражение входит коэффициент теплопроводности газа λ_g , а сам газ в поре считается неподвижным. В общем случае это не так. Наличие тепловой конвекции в порах приводит к тому, что коэффициент теплопроводности газа увеличивается, то есть в формулах (1)–(3) следует заменить λ_g на λ_{g1} по правилу:

$$\lambda_{g1} = \lambda_g (1 + Ra^\xi); \quad \xi \approx 0,30 \div 0,33; \quad g = 9,8 \text{ м/с}^2$$

$$Ra = \frac{\Omega L g \beta_T \Delta t}{\nu_g \chi_g}; \quad \nu_g = \mu_g / \rho_g \quad \chi_g = \lambda_g / \rho_g c_{pg},$$
(4)

в котором Ra – число Рэлея; Ω – проницаемость фильтрующей среды; L – характерный размер фильтрующей среды; β_T – коэффициент теплового расширения газа; Δt – изменение температуры в фильтрующей среде; μ_g , ρ_g , c_{pg} – вязкость, плотность, теплоёмкость газа соответственно [2].

Использование выражения (4) несет в себе некоторую неопределенность. Эта неопределенность порождается строением фильтрующей среды. Если рассмотреть такую среду, в которой поры почти изолированы друг от друга, то в выражении для числа Ra в качестве величины Ω следует использовать квадрат размера поры, а в качестве величины L – размер поры. Если рассматривать среду, в которой поры хорошо сообщаются между собой, то масштабом конвекции является масштаб всей среды. Реальная ситуация свидетельствует о том, что тепловая конвекция существенна там и тогда, где и когда выполняется условие: $Ra > 10^3$.

Для описания гидравлического поведения системы частиц необходимо установить связь между перепадом давлений и среднеобъемной скоростью газа. На основании положения о наличии двух масштабов пористости m_1 и m_2 будет использоваться такая модель порового канала. Поровый канал имеет характерный поперечный размер порядка $m_2^{1/3}d$, если d – характерный размер частицы. Реальный поровый канал имеет сужения и расширения, которые моделируются ступенчатого изменения сечения и ступенчатого изменения направления.

Перепад давлений на границах объёма, содержащего отдельную пару, обусловлен числом N^+ каналов, входящих в пору и числом N^- каналов, выходящих из поры. Также перепад давлений зависит от деталей гидродинамики потоков внутри поры. Не задаваясь детальным геометрическим строением поры, располагая только величины N^+ , N^- , $m_1^{1/3}d$, $m_2^{1/3}d$ можно сформулировать чисто кинематическую модель, основанную только на уравнении Бернулли. Сущность модели состоит в следующем. Места входа и выхода каналов на поверхности поры расположены под разными углами. Размеры каналов и пор сильно отличаются по величине. Поток, попадая из канала в пору, испытывает расширение. Поток, попадая в пору, испытывает расширение. Поток, покидает пору через канал, испытывает сжатие. Направления входных и выходных каналов не совпадают так, что отдельные потоки внутри поры испытывают повороты на некоторые углы. Внутри поры происходит перестройка входных потоков в выходные

Попадая в пору, поток сначала расширяется от величины d_j^+ до величины Δ_{j1}^+ , затем изменяется до величины Δ_{j2}^- , а затем сужается до величины d_i^- . Учитывая то, что вклад местных сопротивлений учитывается аддитивно, можно составить систему уравнений Бернулли, в которых в качестве крайних выступают сечения 1, 01, 02 и 2. такая система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 p^+ + \frac{\rho(\omega_i^+)^2}{2} &= p_{01} + \frac{\rho\omega_{01}^2}{2} + \xi_i^+ \frac{\rho(\omega_i^+)^2}{2}; \quad i = 1, 2, \dots, N^+; \\
 p_{02} + \frac{\rho\omega_{01}^2}{2} &= p^- + \frac{\rho(\omega_j^-)^2}{2} + \xi_j^- \frac{\rho(\omega_j^-)^2}{2}; \quad i = 1, 2, \dots, N^-,
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

в котором P^+ и P^- – значения давлений в сечениях; ξ_j^+ , ξ_j^- – коэффициенты местных сопротивлений на входе и выходе из поры j -ого входного и i -ого выходного каналов соответственно. Результат решения этой системы уравнений может быть записан в виде совокупности таких формул:

$$\begin{aligned}
 \omega_j^+ &= \frac{\omega_{01} s_{01} / \sqrt{1 + \xi_j^+}}{\sum_{j=1}^{N^+} s_j^+ / \sqrt{1 + \xi_j^+}}; \quad \omega_i^- = \frac{\omega_{02} s_{02} / \sqrt{1 + \xi_i^-}}{\sum_{i=1}^{N^-} s_i^- / \sqrt{1 + \xi_i^-}}; \\
 \omega_{01} &= \frac{\sqrt{2\Delta p^+ / \rho}}{\sqrt{1 - \frac{s_{01}^2}{\left(\sum_{j=1}^{N^+} s_j^+ / \sqrt{1 + \xi_j^+}\right)^2}}}; \quad \omega_{02} = \frac{\sqrt{2\Delta p^- / \rho}}{\sqrt{1 - \frac{s_{02}^2}{\left(\sum_{j=1}^{N^-} s_i^- / \sqrt{1 + \xi_i^-}\right)^2}}}; \\
 \Delta p^+ &= p^+ - p_{01}, \quad \Delta p^- = p_{02} - p^-,
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

где w_{01} и w_{02} – скорости перемешанного суммарного потока, образованного входными потоками перемешанного выходного потока из которого образуются выходные потоки; S_j^+ и S_i^- – площади поперечных сечений входных и выходных потоков. В этих формулах величины S_j^+ и S_i^- имеют порядок $m_2^{2/3} d^2 / N^+$ и $m_2^{2/3} d^2 / N^-$, а величины S_{01} и S_{02} имеют порядок $m_1^{2/3} d^2$. В рассматриваемой схеме принято, что перестройка отдельных потоков заменяется перестройкой усредненного потока от скорости w_{01} и до скорости w_{02} . Отказ от схемы с полным смешением входных и выходных потоков влечет значительные трудности, поскольку при этом необходимо рассматривать множество вариантов соединения и разъединения. Количество возможностей \aleph и при этом определяется числом разбиений N^+ элементов на N^- групп по такой формуле:

$$\begin{aligned}
 \aleph &= \sum_{N_j} \frac{N^+!}{\prod_{j=1}^{N^-} N_j!}; \\
 \sum_j N_j &= N^+; \\
 1 &\leq j \leq N^-.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Изменение площади поперечного сечения при перестройке его из входного в выходной, которое определяет величину соответствующего местного сопротивления, имеет порядок. При заданном направлении градиента давления поверхность поры можно разделить на две части по принципу, чтобы проекции градиента давления на направления входных и выходных потоков вне поры были положительными. Тогда для пор с не слишком большой анизотропией формы типичные углы для расположения мест впадения входных каналов в пору равны $\pi i / \sqrt{N^+ + 1}$, а такие же углы для выходных каналов равны $\pi j / \sqrt{N^+ + 1}$. Таким образом, углы поворота потоков будут равным всевозможным суммам вида

$\pi\left(i/\sqrt{N^+ + 1} + j/\sqrt{N^- + 1}\right)$, $1 \leq i \leq N^+$; $1 \leq j \leq N^-$. Соответствующие местные сопротивления следует усреднить по множеству возможных комбинаций, число которых дается формулой (7).

Представленная модель, в случае различия величин N^+ и N^- , следовательно, предполагает два способа вычисления сопротивления поры. Первый способ учитывает сужения и расширения потоков при входе в пору и выходе из нее, учет перестройки потоков внутри поры при условии полного перемешивания. Повороты потоков в этой схеме не учитываются. Во втором способе каждый поток внутри поры сохраняет свою индивидуальность. При этом учитываются расширения и сужения потоков, повороты на разные углы, что равносильно допущению об отсутствии вообще какого-либо перемешивания. Во втором способе необходимо вычислять статистическую сумму по всем возможным конфигурациям входных и выходных каналов для нахождения средних значений.

Ниже рассматривается второй способ в рамках предлагаемой модели, в котором принято, что $N^+ = N^-$, все каналы имеют одинаковое поперечное сечение при пересечении поверхности поры, перемешивания внутри поры нет. При таких условиях коэффициенты местных сопротивлений на входе, выходе и повороте потоков имеют следующие выражения:

$$\begin{aligned} \xi^+ &= (0,6 + 9/\sqrt{\text{Re}})\left(1 - s^+/(s_0/N)\right)^2 \quad / \text{расширение}/; \\ \xi^- &= (0,5 + 13/\sqrt{\text{Re}})\left(1 - s^-/(s_0/N)\right)^{3/4} \quad / \text{сужение}/; \\ \xi_\varphi &= \lambda \varphi r_0/d_0 \quad / \text{поворот}/; \\ \lambda &= \frac{20}{\text{Re}^{0,45}} \left(\frac{d_0}{2r_0}\right)^{0,175}, \\ 50 &< \text{Re} \sqrt{\frac{d_0}{2r_0}} < 600, \end{aligned} \quad (8)$$

где индексы i и j опущены; γ – угол поворота потока; r_0 – радиус кривизны поворота; N – число входных (выходных каналов); d_0 – размер потока; R_e – локальное число Рейнольдса потока в канале. Используя свойство аддитивности местных сопротивлений и связь величин $S^+ = S^-$ с пористостью m_2 , а величины $S_0 - cm_1$ суммарное сопротивление потока при пересечении пары можно записать так:

$$\begin{aligned} \xi &= (0,6 + 9/\sqrt{\text{Re}}) \left[1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{2/3} \frac{1}{N^{2/3}}\right]^2 + (0,5 + 13/\sqrt{\text{Re}}) \left[1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{2/3} \frac{1}{N^{2/3}}\right]^{3/4} + \\ &+ \lambda (\text{Re}) \gamma \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{1/3}. \end{aligned} \quad (9)$$

Местное сопротивление отдельного канала, то есть потока вне поры можно представить в виде суммы отдельных сопротивлений сужений и расширений и поворотов. Оценка для местного сопротивления ξ_k отдельного канала принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \xi_k &= \frac{d}{2\Delta} \left\{ (0,6 + 9/\sqrt{\text{Re}}) \left[1 - \left(1 - \left(\frac{\delta}{dm_2^{1/3}}\right)\right)^2\right]^2 + (0,5 + 13/\sqrt{\text{Re}}) \left[1 - \left(1 - \left(\frac{\delta}{dm_2^{1/3}}\right)\right)^2\right]^{3/4} + \right. \\ &\left. + \lambda (\text{Re}) \frac{m_2^{1/3} d}{\Delta} \cdot \frac{dm_2^{1/3} \delta}{\delta^2 + \Delta^2} \arcsin \frac{2\delta\Delta}{\delta^2 + \Delta^2} \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для элемента объема фильтрующей среды сопротивление отдельного канала складывается из сопротивлений по формулам (9) и (10), в которых величины m_1 , m_2 , N , δ , Δ следует считать заданными. На длине L помещается L/d междупоровых каналов. Средний по сечению расход движения газа \dot{V} связан со скоростью движения газа W в канале, которая входит в число Re в формулах (8)–(10) таким соотношением:

$$\langle \dot{v} \rangle = \omega(1 - m_1)^{2/3} \frac{N}{2} m_2^{2/3} \quad (11)$$

с помощью которого связь перепада давления и средним принимает такой вид:

$$\dot{V} = m_2^{2/3} (1 - m_1)^{2/3} \left(N^{2/3} / 2 \right) \sqrt{\frac{2\Delta p}{L} \frac{d}{\xi + \xi_k}}. \quad (12)$$

Результаты, полученные в предыдущих частях настоящей работы, дают возможность сделать уравнения для нахождения толщин диффузионных пограничных слоёв δ_i замкнутыми. Подстановка выражений приводит к уравнениям для x_{i0} такого вида:

$$\begin{aligned} & -\frac{2(x_{10} - x_1^\infty)}{\delta_1} \left\{ -[D_{12}(x_{10} + x_{20})(1 - x_{10})x_{20} + D_{12}(1 - x_{20})(1 - x_{10})(1 - x_{10} - x_{20})] \xi - D_{31}x_{10}\xi \right\} - \\ & -\frac{2(x_{20} - x_2^\infty)}{\delta_2} (D_{21} - D_{31})x_{10}\xi = U_w^\infty d x_{10} / dx \Big|_{y=0}; \\ & -\frac{2(x_{10} - x_1^\infty)}{\delta_1} (D_{12} - D_{32})x_{20}\xi - \frac{2(x_{20} - x_2^\infty)}{\delta_2} \left\{ -[D_{21}(x_{10} + x_{20})(1 - x_{20})x_{10} + \right. \\ & \left. + D_{23}(1 - x_{10})(1 - x_{20})(1 - x_{10} - x_{20})\xi] - D_{32}x_{20}\xi \right\} = U_w^\infty d x_{20} / dx \Big|_{y=0}. \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнения гидродинамики и теплообмена для смеси имеют такой вид:

$$\begin{aligned} & -\nabla P + \frac{\rho |\vec{v}|^\infty}{2d} (\xi + \xi_k) \vec{v}^\infty = 0; \\ & \xi = \xi(\text{Re}); \\ & \xi_k = \xi_k(\text{Re}); \\ & \rho c_p (v^\infty \nabla) T^\infty = i(v^\infty, T^\infty, x_j^\infty); \\ & (v^\infty \nabla) x_i^\infty = i(v^\infty, T^\infty, x_j^\infty); \\ & \rho = \rho(x_j^\infty, T^\infty); \\ & c_p = c_p(x_j^\infty, T^\infty); \\ & \mu = \mu(x_j^\infty, T^\infty), \end{aligned} \quad (14)$$

в котором \dot{J}_T и \dot{J}_i – источники для температуры и компонентов смеси соответственно.

Все величины, отмеченные индексом « ∞ » относятся к области, расположенной вне соответствующих пограничных слоёв. Уравнения (14) следует решать для конкретной области течения смеси с обычными граничными условиями для скорости температуры.

Представленная модель предназначена для описания гидродинамического и тепломассообменного поведения смеси газов в реакции доокисления монооксида углерода в приближении ламинарного характера пограничных слоёв в интервале температур, не превышающем 1000 К и давлении смеси порядка $0,1 \cdot 10^5$ Па и менее. Модель допускает распространение на турбулентный режим течения без изменения своих методологических оснований. Увеличение числа компонентов газовой смеси для других реакций изменяет количество диффузионных потоков и уравнений. Структура формул позволяет по индексации записывать выражения для потоков с любым количеством компонентов. Гидравлические характеристики фильтрующей среды относятся к случаю неконсолидированного тела, состоящего из отдельных частиц, поверхность которого покрыта слоем катализатора. Иные способы организации каталитической поверхности требуют иных моделей, однако, используемые в настоящей модели элементы, порождающие местные сопротивления – сужение, расширение, поворот, представляются универсальными и такими, которые можно использовать при описании любой внутренней поверхности.

Литература

1. Gebhart B., Jaluria Y., Mahajan R., Sammakia B Buoyancy-induced flows and transport. Hemisphere Publishing Corporation; a subsidiary of Harper and Row Incorporated. – New York. – 1988. – 528 p.
2. Groot S., Mazur P. Non-Equilibrium thermodynamics. North Holland publishing company. – Amsterdam. – 1962. – 456 p.

УДК 66-93

Ведь Е.В., Толчинский Ю.А.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЕПЛОВОГО ТА ГІДРАВЛІЧНОГО ОПОРУ

Розроблено модель, яка описує гідродинамічну й тепломасообмінну поведінку суміші газів у реакції доокислення монооксиду вуглецю в наближенні ламинарного характеру граничних шарів.

Ved E.V., Tolchinsky Y.A

A MATHEMATICAL MODEL OF THERMAL AND HYDRAULIC RESISTANCE

The model which describes the hydrodynamic and heat-mass exchange behavior of the gas mixture in the reaction of carbon monoxide oxidation in approximation to the laminar character of boundary layers has been developed.