

ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС В ПОДОГРЕВАЕМОЙ СНИЗУ СВОБОДНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ КОНВЕКТИВНОЙ ЯЧЕЙКЕ С КОСИНУСОИДАЛЬНЫМ ПРОФИЛЕМ ДНА

Введение. Процессы конвективного теплопереноса в слоях подогреваемой снизу или охлаждаемой сверху вязкой, несжимаемой жидкости исследуются на протяжении более сотни лет. Предметом исследования являются возникающие в процессе нагрева жидкости конвективные упорядоченные структуры в виде двумерных валов и полигональных трехмерных ячеек, в том числе ячеек Рэлея–Бенара [1, 2], квазидвумерных валиковых структур или конвективных текстур. В обзоре [3] указанные структуры достаточно хорошо описаны и изучены. Здесь дано описание различных подходов к экспериментальному и теоретическому изучению проблемы, систематизированы основные типы структур и режимов тепловой конвекции, рассмотрены различные реализации масштабирования течений. Однако, не смотря на достаточно обширный и проработанный материал по конвективному теплопереносу, вне рамок исследования остались неисследованными такие структуры, как цилиндрические конвективные ячейки. Такие ячейки впервые, без придания им физической трактовки, аналитически описаны в работах [4] и монографии [5]. Позже, в работах [6, 7] было выполнено как экспериментальное, так и теоретическое исследование теплофизических свойств цилиндрической конвективной ячейки в слое подогреваемой снизу вязкой, несжимаемой жидкости. На основании этих исследований было предложено рассматривать цилиндрическую конвективную ячейку как элементарную, из большого количества которых, в результате плотной упаковки, создаются пространственно-периодические структуры типа ячеек Бенара. Таким образом, предложенная элементарная конвективная ячейка позволила объяснить существующее геометрическое подобие свободных ячеек начиная от лабораторных условий [8], и заканчивая супергранулами на Солнце [9]. Приведенное выше описание цилиндрической свободной конвективной ячейки применимо для случая слоя жидкости с плоскими границами. Для конвективной ячейки с неплоским дном будут наблюдаться другие пространственные распределения конвективных потоков. Например, в водоемах с полу-сферическим дном распределение потоков вблизи твердого дна отражают его геометрию [10], что вполне объяснимо требованием выполнения граничных условий: равенством скорости на неподвижной твердой границе нулю [11]. При этом, в качестве базовых функций, на наш взгляд, следует использовать аналитические решения стационарной линейной задачи Рэлея в случае свободных [1–3] граничных условий.

В настоящей работе рассмотрена задача о конвективном теплопереносе в подогреваемой снизу цилиндрической элементарной конвективной ячейке с косинусоидально углубленным дном и свободными граничными условиями.

Схема элементарной ячейки с косинусоидальным углублением. Для описания строения элементарной конвективной ячейки с неплоским профилем дна рассмотрим расположенную в бесконечном вдоль осей x и y слое вязкой, несжимаемой жидкости толщиной h цилиндрическую конвективную ячейку нижней границей, описываемой поверхностью вращения с образующей:

$$z = -\left(\cos\left(\pi r R_c^{-1}\right) + 1\right) \Delta h / 2, \tag{1}$$

которая имеет общую ось с цилиндрической ячейкой. Здесь R_c – радиус цилиндрической элементарной конвективной ячейки, Δh – наибольшее отклонение неплоской нижней границы ячейки. Ось z направлена вверх, перпендикулярно границам слоя $z = 0$ и $z = h$ (см. рис. 1).

Распределение температуры по толщине слоя $T_0(z)$ полагаем линейной функцией от координаты z . Температура нижней границы такой ячейки больше температуры верхней: $T_0(0) = T_2$, $T_0(h) = T_1$, ($T_2 > T_1$), а температура нижней точки границы равна $T_0(-\Delta h) \equiv T_3 = T_2 + \Delta T_{bot}$ ($\Delta T_{bot} > 0$). В отсутствие возмущений линейная зависимость температуры от координаты z дает следующие значения ее градиентов:

$$\bar{\nabla} T_0(z) = -\frac{\Theta}{h} \bar{e}_z \quad (0 \leq z \leq h), \quad \bar{\nabla} T_0(z) = -\frac{\Delta T_{cone}}{\Delta h} \bar{e}_z \quad (-\Delta h \leq z \leq 0), \tag{2}$$

где $\Theta = T_2 - T_1$ – разность температур между нижней и верхней плоскостями, \bar{e}_z – единичный вектор, направленный вдоль оси z , $\Delta T_{bot} = \Theta \Delta h / h$.

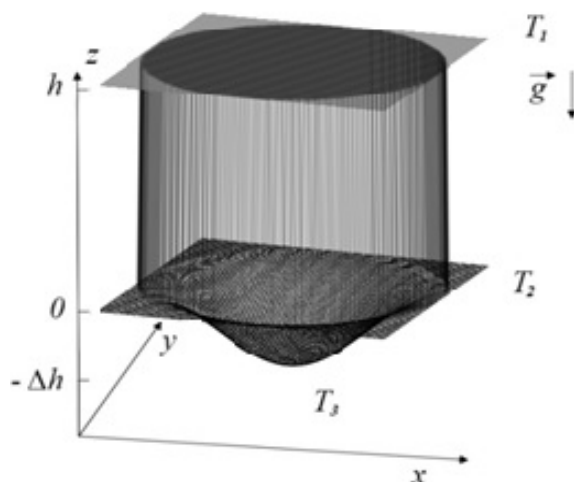


Рисунок 1 – Схема расположения цилиндрической элементарной конвективной ячейки радиусом R_c в слое вязкой, несжимаемой жидкости толщиной h с косинусоидальным профилем дна

Пространственное распределение конвективного массопереноса в ячейке с косинусоидальным профилем дна. Линии Стокса $\Psi_{1s,2s}(r,z)$ цилиндрической ячейки с неплоским профилем дна и свободными граничными условиями, согласно эффекту Фудзивары, аналогично рассмотренной ранее задачи для ЭКЯ с коническим профилем дна, будет определяться суперпозицией функций Стокса двух вихрей. Один вихрь описывает в цилиндрической ячейке с плоскими, свободными границами, второй – в цилиндрической ячейке с неплоским профилем дна и свободными границами:

$$\Psi_{1s,2s}(r,z) = A_0 \left(1 - \vartheta_{1s,2s} \left(z \frac{1 + \Delta h}{\Delta h}, r \right) \right) \psi_0(r, z\Delta h), \quad (4)$$

где $\psi_0(r,z) = r \frac{R_c}{\sigma_{1,1}} \sin\left(\frac{\pi}{\Delta h} z\right) J_1\left(\frac{\sigma_{1,1}}{R_c} r\right)$, $\sigma_{1,1}$ – первый нуль функции Бесселя первого порядка первого рода, $\vartheta_{1s}(r,z) = J_0(\sigma_{0,1}(z/\Delta h - (\cos(\pi r/R_c) - 1/2)))$ и $\vartheta_{2s}(r,z) = \cos((z/\Delta h - (\cos(\pi r/R_c) - 1/2))\pi/2)$ – модельные функции, обеспечивающие свободные граничные условия на дне ячейки с неплоским профилем дна.

На рис. 2 приведены линии Стокса для свободной цилиндрической элементарной конвективной ячейке с косинусоидально углубленным дном с максимальной глубиной $\Delta h = 1/3$ в результате использования эффекта Фудзивары (наложения двух вихрей в ячейке) [12].

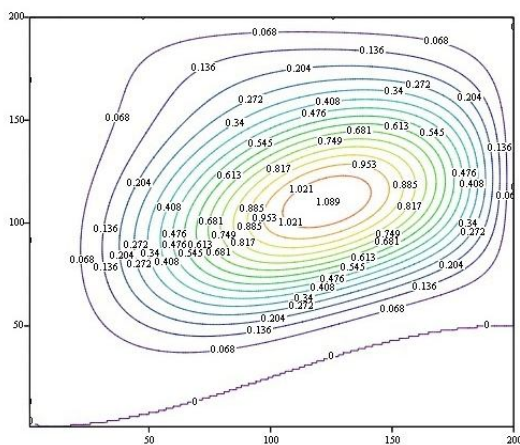


Рисунок 2 – Распределение линий Стокса в свободной цилиндрической элементарной конвективной ячейке с косинусоидальным углубленным профилем дна с максимальной глубиной $\Delta h = 1/3$ для модельной функции $\vartheta_{1s}(r,z)$

Расчеты показывают, что для модельных функций $\vartheta_{1s}(r,z)$ и $\vartheta_{2s}(r,z)$ линии Стокса представляют собой концентрически расположенные гладкие замкнутые линии, форма которых отражает искривленный косинусоидальный профиль дна. Такой вид линий Стокса указывает на формирование в ячейке со свободными граничными условиями конвективного потока в виде одного вихря.

Выводы. Таким образом, в работе исследована тепловая конвекция вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической элементарной конвективной ячейке с косинусоидально углубленным дном и свободными граничными условиями. Построены линии Стокса распределения линий тока в цилиндрической элементарной конвективной ячейке с косинусоидальным дном глубиной $\Delta h=1/3$ со свободными граничными условиями на верхней $z = 1$ и нижних, неплоских границах. С использованием эффекта Фудзивары получены модельные распределения линий тока Стокса и возмущенной температуры в цилиндрической элементарной конвективной ячейке с косинусоидально углубленным дном и свободными граничными условиями.

Литература

1. Strutt J. W. (Lord Rayleigh). On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side // *Phil. Mag.* – 1916. – Vol. 32. – P. 529–546.
2. Gershuni G.Z. Convective stability of incompressible fluid / G.Z. Gershuni, E.M. Zhuxovickij. – M: Science, 1972. – 393 p.
3. Getling A.V. Formation of spatial structures of Rayleigh-Benard convection / A. V. Getling // *UFN.* – 1991. – Vol. 161. – Issue.9. – P. 1–80.
4. Zierep J. Über rotationssymmetrische Zellularkonvektionsströmungen / J. Zierep // *Z. Agev. Mah. Mech.* – 1958. – Bd. 39, № 7/8. – P. 329–333.
5. Koschmieder E. L. Bénard Cells and Taylor Vortices. Monographs on Mechanics / E.L. Koschmieder. – Cambridge: Cambridge University Press, 1993. – 350 p.
6. Бозбей Л.С. Элементарная конвективная ячейка в слое несжимаемой, вязкой жидкости / Бозбей Л.С. // Конференция молодых ученых и специалистов ИПМаш НАН Украины, ноябрь 2013 г.: тезисы докл. – Х., 2013. – С. 29.
7. Bozbiei L.S. Elementary convective cell in incompressible viscous fluid and its physical Properties / L.S. Bozbiei, A.O. Kostikov, V.I. Tkachenko // *Mode Conversion, Coherent Structures and Turbulence: international conference MSS-14, 2014: Space Research Institute.* –M., 2014. – P. 322–327.
8. Бозбей Л.С. Разрушение ячеек Бенара при локальных нарушениях теплового равновесия и их формирование над ячейками Бенара / Л.С. Бозбей, Б.В. Борц, А.О. Костиков, В.И. Ткаченко // *ИТЭ.* – 2016. – №3. – С. 67–79.
9. Патент №114986 Україна, МПК UA 114986 C2 / Катодний витрачуваний електрод для вакуумно-дугового переплаву // Бозбей Л.С., Борц Б.В., Ткаченко В.І.; власник Національний науковий центр “Харківський фізико-технічний інститут”; заяв. 30.05.2016; публ. 28.08.2017, Бюл. №16.
10. Бозбей Л.С. Примітні явища природи: комірки Бенара з вільними межами [Текст] / Л.С. Бозбей, Б.В. Борц, В.І. Ткаченко // *Методичні вказівки до курсу «Ресурсозберігаючі та екологічно чисті технології».* – Х.: ХНУ ім. В.Н. Каразіна. – 2016. – 32 с.
11. Винников С.Д. Гидрофизика: учебник для вузов / С.Д. Винников, Б.В. Проскуряков. – Л.: Гидрометеоиздат, 1988. – 248 с.
12. Fujiwhara S. The natural tendency towards symmetry of motion and its application as a principle in meteorology / S. Fujiwhara // *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society.* – 1921. – Vol. 47, is. 200. – P. 287–292.

Bibliography (translated)

1. Strutt J.W. (Lord Rayleigh). On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side // *Phil. Mag.* – 1916. – Vol.32. – P. 529–546.
2. Gershuni G.Z. Convective stability of incompressible fluid / G.Z. Gershuni, E.M. Zhuxovickij. – M: Science, 1972. – 393 p.
3. Getling A.V. Formation of spatial structures of Rayleigh-Benard convection / A.V. Getling // *UFN.* – 1991. – Vol. 161. – Issue.9. – P. 1–80.
4. Zierep J. Über rotationssymmetrische Zellularkonvektionsströmungen / J. Zierep // *Z. Agev. Mah. Mech.* – 1958. – Bd. 39, № 7/8. – P. 329–333.

5. Koschmieder E.L. Bénard Cells and Taylor Vortices. Monographs on Mechanics / E.L. Koschmieder. – Cambridge: Cambridge University Press, 1993. – 350 p.
6. Bozbiei L.S. Elementarnaya konvektivnaya yacheyka v sloe neszhimaemoy, vyazkoy zhidkosti / Bozbiei L.S. // Konferentsiya molodyih uchenyih i spetsialistov IPMash NAN Ukrainyi, noyabr 2013 g.: tezisy dokl. – Kh., 2013. – P. 29.
7. Bozbiei L.S. Elementary convective cell in incompressible viscous fluid and its physical Properties / L.S. Bozbiei, A.O. Kostikov, V.I. Tkachenko // Mode Conversion, Coherent Structures and Turbulence: international conference MSS-14, 2014: Space Research Institute. – M., 2014. – P. 322–327.
8. Bozbiei L.S. Razrushenie yacheek Benara pri lokalnyih narusheniyah teplovogo ravnovesiya i ih formirovanie nad yacheykami Benara / L.S. Bozbiei, B.V. Borts, A.O. Kostikov, V.I. Tkachenko / ITE. – 2016. – #3. – P. 67–79.
9. Patent #114986 Ukrayina, MPK UA 114986 C2 / Katodniy vitrachuvaniy elektrod dlya vakuumno-dugovogo pereplavu // Bozbiei L.S., Borts B.V., Tkachenko V.I.; vlasnik Natsionalniy naukoviy tsentr “Harkivskiy fiziko-tehnichniy institut”; zayav. 30.05.2016; publ. 28.08.2017, Byul. #16.
10. Bozbiei L.S. Primitni yavischa prirodi: komirki Benara z vilnimi mezhami [Tekst] / L.S. Bozbiei, B.V. Borts, V.I. Tkachenko // Metodichni vkazivki do kursu «Resursozberigayuchi ta ekologichno chisti tehnologiyi». – H.: HNU im. V.N. Karazina. – 2016. – 32 p.
11. Bozbiei L.S. Primitni yavischa prirodi: komirki Benara z vilnimi mezhami [Tekst] / L.S. Bozbiei, B.V. Borts, V.I. Tkachenko // Metodichni vkazivki do kursu «Resursozberigayuchi ta ekologichno chisti tehnologiyi». – H.: HNU im. V.N. Karazina. – 2016. – 32 p.
12. Fujiwhara S. The natural tendency towards symmetry of motion and its application as a principle in meteorology / S. Fujiwhara // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. – 1921. – Vol. 47, is. 200. – P. 287–292.

УДК 536.25

Бозбей Л.С., Костіков А.О., Ткаченко В.І.

ТЕПЛОМАСОПЕРЕНІС У ВІЛЬНІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ЕЛЕМЕНТАРНІЙ КОНВЕКТИВНІЙ КОМІРЦІ, ЩО ПІДГРІВАЄТЬСЯ ЗНИЗУ, З КОСІНУСОЇДАЛЬНИМ ПРОФІЛЕМ ДНА

Розглянуто задачу про теплову конвекцію в'язкої нестисливої рідини у циліндричній елементарній конвективній комірниці з косіносуїдально поглибленим дном та вільними граничними умовами. Побудовано функції Стокса у циліндричній вільній конвективній комірниці з неплоскими межами. На підставі ефекту Фудзіварі отримано модельні розподіли ліній струму Стокса та обуреної температури у циліндричній елементарній конвективній комірниці з неплоским профілем дна.

Bozbiei L.S., Borts B.V., Kostikov A.O., Tkachenko V.I.

HEAT AND MASS TRANSFER IN THE HEATED FROM BELOW ELEMENTARY CONVECTIVE CELL WITH FREE BOUNDARIES AND COSINE BOTTOM

The problem of thermal convection of a viscous incompressible fluid in a cylindrical elementary convective cell with a cosine bottom and free boundary conditions is considered. The analytical solutions of a stationary linear Rayleigh problem in the case of free boundary conditions as basic functions should be used. The spatial field distribution of the flow velocities in the cell with cosine bottom is defined. Stokes' functions are built in a cylindrical free convective cell with plane boundaries and in the cosine cavity bottom as well. Current lines distributions in cells with different model functions are qualitatively alike; different model functions of current lines differ in the numerical value of their maximum. The distribution model Stokes' streamlines temperature perturbations in a cylindrical elementary convective cell with a cosine bottom and free boundary conditions is obtained based on the Fujiwara effect.