



В.М. БУЛАВАЦКИЙ, В.В. СКОПЕЦКИЙ

УДК 517.954:532.546

ОБОБЩЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ КОНСОЛИДАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ С РЕЛАКСАЦИЕЙ

Ключевые слова: математическое моделирование, фильтрационная консолидация, массоперенос, релаксация, неклассические модели, системы дифференциальных уравнений в частных производных, краевые задачи, асимптотические приближения, численные решения.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследований в области математического моделирования динамики консолидационных процессов в деформируемых насыщенных пористых средах обусловлена многообразными прикладными задачами, в частности задачами изучения условий безаварийной эксплуатации объектов в процессе деформирования и уплотнения основ накопителей промышленных и бытовых стоков. Некоторые из исследований в рамках данной проблемы подытожены в [1–3]. Отметим, что при построении математических моделей консолидационных процессов в случае наличия сложной внутренней структуры растворов, заполняющих хранилища промышленных или бытовых стоков, важное значение имеет учет релаксационных свойств фильтracионного процесса [4], что обуславливает использование иных зависимостей, чем классический закон Дарси. Значительные отклонения от закона Дарси наблюдаются также в случае нестационарных фильтracионных процессов в слабопроницаемых пористых средах, что приводит к использованию для описания этих процессов релаксационных моделей [5]. Еще большую актуальность приобретает учет влияния релаксационных явлений на динамику процесса фильтracионного уплотнения пористых сред в случае насыщенности их солевыми растворами значительной концентрации. В работе [6] выполнено математическое моделирование процесса фильтracионного уплотнения насыщенной солевым раствором пористой среды в условиях релаксационности фильтracионного процесса. При построении соответствующей математической модели процесса консолидации в [6] предложено обобщение известного закона релаксационной фильтracии [7] на случай движения солевых растворов.

В настоящей работе выполнено математическое моделирование релаксационного процесса фильтracионной консолидации пористых сред, в случае наличия градиента концентрации, на основе более общей, чем в [6], математической модели, построенной с учетом эффектов пространственно-временной нелокальности [8], что позволяет более адекватно моделировать динамику процесса при наличии сложных гидрогеологических условий его протекания.

**ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА.
ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ**

Воспользуемся следующим обобщением закона фильтрации с учетом пространственно-временной нелокальности [8] на случай движения солевых растворов:

$$u_x + \lambda_1 \frac{\partial u_x}{\partial t} = -k \frac{\partial}{\partial x} \left(H + \lambda_2 \frac{\partial H}{\partial t} - \lambda_3 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right) \pm \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(C + \lambda_1 \frac{\partial C}{\partial t} \right). \quad (1)$$

Здесь H — избыточный напор, C — концентрация солей в жидкой фазе, u_x — скорость фильтрации, k — коэффициент фильтрации, ν — коэффициент осмоса (знак «+» соответствует нормальной осмотической фильтрации, а знак «-» — аномальной), λ_i ($i = 1, 3$) — релаксационные параметры [8].

Заметим, что в частном случае $\nu = 0$ из соотношения (1) получаем обобщенный закон диффузии, предложенный в [8], при $\lambda_3 = 0$ и $\nu \neq 0$ — закон релаксационной фильтрации [7], распространенный на случай движения солевых растворов в [6], при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ и $\nu \neq 0$ — закон фильтрации Дарси–Герсеванова [9], распространенный на случай движения солевых растворов в [3].

Уравнение для избыточного напора получим из уравнения неразрывности с учетом линейного закона уплотнения [9] путем исключения скорости фильтрации в соответствии с соотношением (1). Выполняя преобразования, аналогичные изложенным в [6], получаем

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial H}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(H + \lambda_2 \frac{\partial H}{\partial t} - \lambda_3 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right) \mp \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(C + \lambda_1 \frac{\partial C}{\partial t} \right), \quad (2)$$

где C_v — коэффициент консолидации [9], $\mu = \nu C_v k^{-1}$.

Исключая из (1) u_x и подставляя найденное значение u_x в уравнение конвективной диффузии (гидродинамической дисперсии [10]) при фильтрации порового раствора, получаем уравнение для определения концентрации солей в жидкой фазе в виде

$$\sigma \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{k}{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \lambda_2 H + \int_0^t \left[\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) H - \lambda_3 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right] e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_1}} d\tau \right\} \frac{\partial C}{\partial x} \mp \nu \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)^2, \quad (3)$$

где σ — пористость, D — коэффициент конвективной диффузии [10].

Применяя к интегралу в (3) обобщенную теорему о среднем и аппроксимируя полученный интеграл согласно квадратурной формуле трапеций, получаем уравнение для определения функции концентрации $C(x, t)$

$$\sigma \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left(w_1(t) \frac{\partial H}{\partial x} - \lambda_3 w_2(t) \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \right) \frac{\partial C}{\partial x} \mp \nu \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)^2, \quad (4)$$

где

$$w_2(t) = \frac{kt}{2\lambda_1} e^{-\frac{t}{2\lambda_1}}, \quad w_1(t) = k \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) w_2(t).$$

Уравнения (2), (4) являются основой математической модели рассматриваемого консолидационного процесса, называемой далее обобщенной моделью.

Заметим, что в частном случае $\lambda_3 = 0$, отсюда получаем математическую модель процесса фильтрационной консолидации при условии учета в фильтрационном процессе релаксации скорости и давления [6].

В рамках построенной модели изучение процесса фильтрационного уплотнения пористого массива конечной мощности l , расположенного на непроницаемом основании, сводится к решению в области $(0, 1) \times (0, +\infty)$ следующей нелинейной

краевой задачи (рассматривается случай аномальной осмотической фильтрации):

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial H}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(H + \lambda_2 \frac{\partial H}{\partial t} - \lambda_3 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right) + \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(C + \lambda_1 \frac{\partial C}{\partial t} \right), \quad (5)$$

$$\sigma \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left(w_1(t) \frac{\partial H}{\partial x} - \lambda_3 w_2(t) \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \right) \frac{\partial C}{\partial x} + v \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)^2, \quad (6)$$

$$H(0, t) = 0, \quad H_{xx}(0, t) = 0, \quad (7)$$

$$H_x(1, t) = 0, \quad H_{xxx}(1, t) = 0, \quad (8)$$

$$H(x, 0) = 1, \quad H_t(x, 0) = 0, \quad (9)$$

$$C(0, t) = 1, \quad C_x(1, t) = 0, \quad (10)$$

$$C(x, 0) = 0. \quad (11)$$

Здесь введены безразмерные переменные и параметры соотношениями

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{l}, \quad t' = \frac{t}{T}, \quad H' = \frac{H}{H_0}, \quad C' = \frac{C}{C_0}, \quad C'_v = \frac{C_v T}{l^2}, \\ v' &= \frac{v T C_0}{l^2}, \quad D' = \frac{D T}{l^2}, \quad u' = \frac{k H_0 T}{l^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\mu' = \frac{\mu C_0 T}{l^2 H_0}, \quad \lambda'_i = \frac{\lambda_i}{T} \quad (i=1, 2), \quad \lambda'_3 = \frac{\lambda_3}{l^2} \quad (D, T, C_0, H_0 = \text{const}),$$

знак «штрих» над безразмерными величинами опущен. С учетом обозначений (12) имеем

$$w_1(t) = \frac{u \lambda_2}{\lambda_1} + \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) w_2(t), \quad w_2(t) = \frac{u t}{2 \lambda_1} e^{-\frac{t}{2 \lambda_1}}.$$

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИЗБЫТОЧНОГО НАПОРА

Кратко остановимся на одном важном частном случае консолидационного процесса, предполагающем наличие слабовыраженных релаксационных свойств, т.е. будем считать параметры модели λ_i ($i=1, 3$) малыми. Положив $\lambda_1 = \varepsilon$, $\lambda_2 = \alpha \varepsilon$, $\lambda_3 = \beta \varepsilon^2$ ($\alpha, \beta \in R \setminus \{0\}$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр), рассмотрим в области $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ следующую краевую задачу для избыточного напора, поставленную в рамках построенной выше математической модели консолидации:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial H}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(H + \alpha \varepsilon \frac{\partial H}{\partial t} - \beta \varepsilon^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right) + q(x, t), \quad (13)$$

$$H(0, t) = \zeta(t), \quad H_{xx}(0, t) = \theta(t), \quad (14)$$

$$H(x, 0) = h(x), \quad H_t(x, 0) = r(x). \quad (15)$$

Здесь $\zeta(t)$, $\theta(t)$, $h(x)$, $r(x)$, $q(x, t)$ — заданные функции.

В предположениях достаточной гладкости и согласованности начальных и граничных условий приближенное решение рассматриваемой задачи будем искать в соответствии с асимптотическим методом М.И. Вишика–Л.А. Люстерника [11] в виде

$$H(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i (H_i(x, t) + v_i(x, \tau) + \Pi_i(\xi, t)) + R_n, \quad (16)$$

где H_i — регулярные члены асимптотики, v_i, Π_i — пограничные функции, служащие для описания погранслоя в окрестностях $t=0$ и $x=0$ соответственно, $\tau = t/\varepsilon, \xi = x/\varepsilon$ — погранслойные переменные, R_n — остаточный член.

Уравнения для определения регулярной части асимптотики получаются применением стандартной процедуры метода возмущений и имеют вид

$$\frac{\partial H_i}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2 H_i}{\partial x^2} + f_i(x, t) \quad (i = \overline{0, n}), \quad (17)$$

где функции $f_i(x, t)$ рекуррентно выражаются через H_{i-1} :

$$f_i(x, t) = \begin{cases} q(x, t) & (i = 0), \\ \alpha C_v \frac{\partial^3 H_0}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\partial^2 H_0}{\partial t^2} & (i = 1), \\ C_v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\alpha \frac{\partial H_{i-1}}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 H_{i-2}}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2 H_{i-1}}{\partial t^2} & (i = \overline{2, n}). \end{cases}$$

Аналогично получаем уравнения для определения функций v_i ($i = \overline{0, n}$). Указанные уравнения записываются в виде

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial \tau^2} + \frac{\partial v_i}{\partial \tau} = V_i(x, t) \quad (i = \overline{0, n}), \quad (18)$$

где

$$V_i(x, t) = \begin{cases} 0 & (i = 0), \\ r_i(x, \tau) & (i = 1, 2), \\ r_i(x, \tau) - \beta C_v \frac{\partial^4 v_{i-2}}{\partial x^4} & (i = \overline{3, n}), \end{cases}$$

$$r_i(x, \tau) = C_v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(v_{i-1}(x, \tau) + \alpha \frac{\partial v_{i-1}(x, \tau)}{\partial \tau} \right) \quad (i = \overline{1, n}).$$

Для определения функций Π_i ($i = \overline{1, n}$) имеем уравнения

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial \xi^2} - \beta \frac{\partial^4 \Pi_i}{\partial \xi^4} = F_i(\xi, t) \quad (i = \overline{0, n}), \quad (19)$$

где

$$F_i(\xi, t) = \begin{cases} 0 & (i = 0), \\ -\alpha \frac{\partial^3 \Pi_0}{\partial \xi^2 \partial t} & (i = 1), \\ \frac{1}{C_v} \frac{\partial \Pi_0}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^3 \Pi_1}{\partial \xi^2 \partial t} & (i = 2), \\ g_i(\xi, t) & (i = \overline{3, n}), \end{cases}$$

$$g_i(\xi, t) = \frac{1}{C_v} \left(\frac{\partial^2 \Pi_{i-3}}{\partial t^2} + \frac{\partial \Pi_{i-2}}{\partial t} \right) - \alpha \frac{\partial^3 \Pi_{i-1}}{\partial \xi^2 \partial t} \quad (i = \overline{3, n}).$$

Функция H_0 находится из уравнения (17) при $i=0$ с учетом краевых условий

$$H_0(0, t) = \zeta(t), \quad H_0(x, 0) = h(x)$$

и имеет вид [12, 13]

$$H_0(x, t) = \int_0^{+\infty} h(\xi) G(x, \xi; t) d\xi + \frac{x}{2\sqrt{\pi C_v}} \int_0^t \frac{\zeta(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4C_v(t-\tau)}} d\tau + \int_0^t \int_0^{+\infty} q(\xi, \tau) G(x, \xi; t-\tau) d\xi d\tau, \quad (20)$$

где $G(x, \xi; t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi C_v t}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4C_v t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4C_v t}} \right]$ — функция Грина [13].

Из соотношений (18) при $i=0$, с учетом условий $\frac{\partial v_0(x, 0)}{\partial \tau} = 0$, $v_0(x, \tau) \rightarrow 0$ ($\tau \rightarrow +\infty$), получаем $v_0 \equiv 0$. Пограничная функция $v_1(x, \tau)$ находится из (18) с учетом условий

$$\frac{\partial v_1(x, 0)}{\partial \tau} = r(x) - \frac{\partial H_0(x, 0)}{\partial t}, \quad v_1(x, \tau) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow +\infty$$

и является экспоненциально убывающей при $\tau \rightarrow +\infty$:

$$v_1(x, \tau) = e^{-\tau} \left(\frac{\partial H_0}{\partial t} \Big|_{t=0} - r(x) \right). \quad (21)$$

Для определения функции $H_1(x, t)$ имеем краевую задачу

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} + f_1(x, t), \quad (22)$$

$$H_1(0, t) = -\Pi_1(0, t), \quad H_1(x, 0) = -v_1(x, 0), \quad (23)$$

решение которой с учетом (21) согласно [12, 13] запишем в виде

$$H_1(x, t) = \int_0^{+\infty} \left(r(\xi) - \frac{\partial H_0(\xi, 0)}{\partial t} \right) G(x, \xi; t) d\xi + \int_0^t \int_0^{+\infty} f_1(\xi, \tau) G(x, \xi; t-\tau) d\xi d\tau - \frac{x}{2\sqrt{\pi C_v}} \int_0^t \frac{\Pi_1(0, \tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4C_v(t-\tau)}} d\tau. \quad (24)$$

Учитывая формулу (17) и краевые условия для функций H_i ($i = \overline{2, n}$) вида

$$H_i(0, t) = -\Pi_i(0, t), \quad H_i(x, 0) = -v_i(x, 0) \quad (i = \overline{2, n}),$$

получаем согласно [12, 13]

$$H_i(x, t) = - \int_0^{+\infty} v_i(\xi, 0) G(x, \xi; t) d\xi - \frac{x}{2\sqrt{\pi C_v}} \int_0^t \frac{\Pi_i(0, \tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4C_v(t-\tau)}} d\tau + \int_0^t \int_0^{+\infty} f_i(\xi, \tau) G(x, \xi; t-\tau) d\xi d\tau \quad (i = \overline{2, n}). \quad (25)$$

Функции $v_i(x, \tau)$ ($i = \overline{2, n}$), входящие в соотношения (25), находятся как решения уравнений (18) при условиях

$$\frac{\partial v_i(x, 0)}{\partial \tau} = -\frac{\partial H_{i-1}(x, 0)}{\partial t}, \quad v_i(x, \tau) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow +\infty \quad (i = \overline{2, n}).$$

Можно показать, что для этих функций имеют место соотношения

$$v_i(x, \tau) = e^{-\tau} \left[\frac{\partial H_{i-1}(x, 0)}{\partial t} - \int_0^\tau V_i(x, \eta) e^\eta d\eta \right] - \int_\tau^{+\infty} V_i(x, \eta) d\eta \quad (i = \overline{2, n}). \quad (26)$$

Функции погранслоного типа Π_i , входящие в соотношения (25), определяются из (19) с учетом условий

$$\begin{aligned} \Pi_{0_{\xi\xi}}(0, t) = 0, \quad \Pi_{1_{\xi\xi}}(0, t) = \theta(t), \quad \Pi_{i_{\xi\xi}}(0, t) = -H_{(i-2)_{\xi\xi}}(0, t) \quad (i = \overline{2, n}), \\ \Pi_i(\xi, t) \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow +\infty \quad (i = \overline{0, n}). \end{aligned}$$

Отсюда в результате простых, но громоздких преобразований получаем

$$\begin{aligned} \Pi_0 \equiv 0, \quad \Pi_1(\xi, t) = \beta\theta(t) e^{-\frac{\xi}{\sqrt{\beta}}}, \quad \Pi_2(\xi, t) = -\alpha\beta\theta'(t) \left(\sqrt{\beta} + \frac{\xi}{2} \right) e^{-\frac{\xi}{\sqrt{\beta}}}, \\ \Pi_i(\xi, t) = \int_{\xi}^{+\infty} \left(\xi - \xi + \frac{\sqrt{\beta}}{2} e^{\frac{\xi-\zeta}{\sqrt{\beta}}} \right) F_i(\zeta, t) d\zeta + \frac{\sqrt{\beta}}{2} \int_0^{\xi} F_i(\zeta, t) e^{-\frac{\xi-\zeta}{\sqrt{\beta}}} d\zeta - \\ - \frac{\sqrt{\beta}}{2} \int_0^{+\infty} F_i(\zeta, t) e^{-\frac{\xi+\zeta}{\sqrt{\beta}}} d\zeta - \beta e^{-\frac{\xi}{\sqrt{\beta}}} \frac{\partial^2 H_{i-2}(0, t)}{\partial x^2} \quad (i = \overline{3, n}). \end{aligned} \quad (27)$$

Последовательность вычислений согласно полученным соотношениям такова: $H_0, v_1, \Pi_1, H_1, v_2, \Pi_2, \dots$. В основном решение строится с помощью функций H_0, v_1, Π_1 . При этом уравнения для определения регулярных членов асимптотики являются стандартными уравнениями теплопроводности, описывающими процесс фильтрационной консолидации грунтовых массивов в рамках классического закона Дарси [9]. Отсюда можно сделать вывод, что рассматриваемая обобщенная модель фильтрационной консолидации, при малости всех релаксационных параметров, в некотором смысле «близка» к классической модели фильтрационной консолидации Терцаги–Герсеванова, описывающей процесс уплотнения грунтов в рамках закона Дарси. Отметим, что, поскольку функция погранслоного типа $v_1(x, \tau)$ «подправляет» решение $H_0(x, t)$ в момент времени $t \in (0, \varepsilon)$, затухая экспоненциально на больших промежутках времени, решение задачи консолидации в рамках обобщенной математической модели отличается от решения соответствующей задачи в рамках классической математической модели Терцаги–Герсеванова главным образом для малых значений времени t . Аналогичный вывод имеет место и относительно функции $\Pi_1(\xi, t)$, поскольку, как следует из (27), она также является экспоненциальной функцией погранслоного типа по переменной ξ .

Таким образом, учет эффектов пространственно-временной нелокальности в процессах деформирования и уплотнения водонасыщенных грунтовых массивов в сложных горно-геологических условиях особенно важен на начальных стадиях протекания указанных процессов.

АЛГОРИТМ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

В общем случае (без предположения о малости релаксационных параметров) приближенное решение поставленной в рамках рассматриваемой математической модели краевой задачи о консолидации массива конечной мощности (задача (5)–(11)) можно получить следующим образом. Рассмотрим сначала задачу (5), (7)–(9) относительно избыточного напора и применим к ней дифференциально-разностный метод в совокупности с методом суммарных представлений [14, 15]. Введем в рассмотрение сеточную область $x_i = ih$ ($i = 0, m+1$) и поставим в соответствие краевой задаче дифференциально-разностную задачу вида

$$\lambda_1 \frac{d^2 \bar{u}(t)}{dt^2} + \left(1 + \frac{2C_v \lambda_2}{h^2}\right) \frac{d\bar{u}(t)}{dt} - \frac{C_v \lambda_2}{h^2} T_3^{(m)} \frac{d\bar{u}(t)}{dt} + \frac{2C_v}{h^2} \left(1 + \frac{3\lambda_3}{h^2}\right) \bar{u}(t) - \frac{C_v}{h^2} \left(1 + \frac{4\lambda_3}{h^2}\right) T_3^{(m)} \bar{u}(t) + \frac{C_v \lambda_3}{h^4} [(T_3^{(m)})^2 - 2E] \bar{u}(t) = \bar{w}(t), \quad (28)$$

$$\bar{u}(0) = \bar{e}, \quad \bar{u}_t(0) = \bar{0}, \quad (29)$$

где $\bar{e} = (1, 1, \dots, 1)^T$, $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)^T$, $\bar{u}(t) = [H_1(t), H_2(t), \dots, H_m(t)]^T$, $\bar{w}(t) = \frac{\mu}{h^2} \times \left[\lambda_1 (2E - T_3^{(m)}) \frac{d\bar{U}(t)}{dt} + (2E - T_3^{(m)}) \bar{U}(t) - \bar{w}_1 \right]$, $\bar{U}(t) = [C_1(t), C_2(t), \dots, C_m(t)]^T$, $\bar{w}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$, $T_3^{(m)}$ — квадратная матрица порядка m , определенная в [15], E — единичная матрица.

Введем в рассмотрение P -трансформации [15] векторов \bar{u} и \bar{w} согласно соотношениям

$$\tilde{u}(t) = P_3^{(m)*} \bar{u}(t), \quad \tilde{w}(t) = P_3^{(m)*} \bar{w}(t), \quad (30)$$

где $P_3^{(m)*}$ — квадратная матрица порядка m , транспонированная по отношению к матрице $P_3^{(m)} = [p_{kj}^{(3)}]_{k,j=1}^m$, определенной в [15]. Домножив (28), (29) слева на матрицу $P_3^{(m)*}$, с учетом соотношения [15] $T_3^{(m)} = P_3^{(m)} \Lambda_3^{(m)} P_3^{(m)*}$, где $\Lambda_3^{(m)} = [\lambda_1^{(3)}, \lambda_2^{(3)}, \dots, \lambda_m^{(3)}]$ — диагональная матрица собственных чисел матрицы $T_3^{(m)}$, получаем задачу Коши, которая в скалярной форме записывается в виде

$$\lambda_1 \frac{d^2 \hat{u}_i(t)}{dt^2} + \sigma_i \frac{d\hat{u}_i(t)}{dt} + \theta_i \hat{u}_i(t) = \hat{w}_i(t) \quad (i = \overline{1, m}), \quad (31)$$

$$\hat{u}_i(0) = \hat{e}_i, \quad \hat{u}'_i(0) = 0 \quad (i = \overline{1, m}), \quad (32)$$

где

$$\sigma_i = 1 + \frac{C_v \lambda_2}{h^2} (2 - \lambda_i^{(3)}), \quad \theta_i = \frac{C_v}{h^2} \left\{ 2 \left(1 + \frac{3\lambda_3}{h^2}\right) - \left(1 + \frac{4\lambda_3}{h^2}\right) \lambda_i^{(3)} + \frac{\lambda_3}{h^2} [(\lambda_i^{(3)})^2 - 2] \right\},$$

$$\hat{e}_i = \sum_{k=1}^m p_{ki}^{(3)}, \quad \hat{w}_i(t) = \frac{\mu}{h^2} \left[p_{1i}^{(3)} + (\lambda_i^{(3)} - 2) \sum_{k=1}^m p_{ki}^{(3)} \left(1 + \lambda_1 \frac{d}{dt}\right) C_k(t) \right].$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что решение задачи (31), (32) имеет вид

$$\hat{u}_i(t) = \hat{e}_i Q_i(t) + \frac{1}{\lambda_1} \int_0^t \hat{w}_i(\tau) K_i(t - \tau) d\tau \quad (i = \overline{1, m}), \quad (33)$$

где функции $Q_i(t)$, $K_i(t - \tau)$ определены в [6].

Возвращаясь в соотношениях (33) к оригиналам, получаем решение исходной дифференциально-разностной задачи в виде явной зависимости функции напора от концентрации

$$H_i(t) = \Phi_i(t) + \sum_{k=1}^m \int_0^t C_k(\tau) S_{ik}(t-\tau) d\tau \quad (i = \overline{1, m}), \quad (34)$$

где $\Phi_i(t)$, $S_{ik}(t-\tau)$ определяются соответствующими соотношениями из [6].

Переходя к задаче (6), (10), (11), воспользуемся продольной схемой метода прямых [16]. Поставим в соответствие рассматриваемой краевой задаче дифференциально-разностную задачу или, после исключения граничных условий, — задачу Коши, которая в векторно-матричной форме запишется в виде

$$\sigma \frac{d\vec{C}}{dt} = \frac{D}{h^2} A\vec{C} + \frac{w_1(t)}{4h^2} \vec{f}_1(\vec{C}, \vec{H}) - \frac{\lambda_3 w_2(t)}{4h^4} \vec{f}_2(\vec{C}, \vec{H}) - \frac{\nu}{4h^2} \vec{f}_3(\vec{C}) + \vec{g}, \quad (35)$$

$$\vec{C}(0) = \vec{0}, \quad (36)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \vec{C}(t) &= [C_1(t), C_2(t), \dots, C_m(t)]^T, \quad \vec{H}(t) = [H_1(t), H_2(t), \dots, H_m(t)]^T, \\ \vec{f}_1(\vec{C}, \vec{H}) &= [H_2(C_2 - 1), (H_3 - H_1)(C_3 - 1), (H_4 - H_2)(C_4 - C_2), \dots, \\ &\quad \dots, (H_m - H_{m-2})(C_m - C_{m-2}), (H_m - H_{m-1})(C_m - C_{m-1})]^T, \\ \vec{f}_2(\vec{C}, \vec{H}) &= [(H_3 - 2H_2 - H_1)(C_2 - 1), (H_4 - 2H_3 + 2H_1)(C_3 - C_1), \dots, \\ &\quad \dots, (H_{i+2} - 2H_{i+1} + 2H_{i-1} - H_{i-2})(C_{i+1} - C_{i-1}), \dots, 0]^T, \\ \vec{f}_3(\vec{C}) &= [(C_2 - 1)^2, (C_3 - 1)^2, \dots, (C_m - C_{m-1})^2]^T, \quad \vec{g} = \left[\frac{D}{h^2}, 0, \dots, 0 \right]^T. \end{aligned}$$

Отметим, что $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^m$ в соотношении (35) является трехдиагональной матрицей с элементами $a_{ii} = -2$ ($i = \overline{1, m-1}$); $a_{i-1,i} = a_{i,i-1} = 1$ ($i = \overline{2, m}$); $a_{mm} = -1$; $a_{ij} = 0$ при $j > i+1$ $j < i-1$. Обозначив

$$\vec{F}(\vec{C}, \vec{H}) = \frac{1}{4h^2} \left[w_1(t) \vec{f}_1(\vec{C}, \vec{H}) - \frac{\lambda_3 w_2(t)}{h^2} \vec{f}_2(\vec{C}, \vec{H}) - \nu \vec{f}_3(\vec{C}) \right], \quad A_1 = \frac{D}{h^2} A,$$

перепишем рассматриваемую задачу в виде задачи Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\sigma \frac{d\vec{C}}{dt} = A_1 \vec{C} + \vec{F}(\vec{C}, \vec{H}) + \vec{g}, \quad t > 0, \quad \vec{C}(0) = \vec{0}. \quad (37)$$

Для численного решения задачи (37) можно воспользоваться неявной разностной схемой, получаемой, например, следующим образом. Интегрируя (37) по промежутку $[t, t+\tau]$, имеем интегральное соотношение

$$\sigma \vec{C}(t+\tau) = \sigma \vec{C}(t) + A_1 \int_t^{t+\tau} \vec{C}(s) ds + \int_t^{t+\tau} \vec{F}(\vec{C}(s), \vec{H}(s)) ds + \tau \vec{g}, \quad \tau > 0. \quad (38)$$

Задаче (37) на основании (38) поставим в соответствие неявную схему с весами, в которой использовано значение напорной функции из предыдущего временного слоя (далее стрелки над векторами опускаются),

$$(\sigma E - \tau \alpha A_1) \hat{C} - \tau \alpha F(\hat{C}, H) = [\sigma E + \tau(1-\alpha) A_1] C + \tau(1-\alpha) F(C, H), \quad (39)$$

$$\tau > 0, \quad \alpha \in [0, 5; 1],$$

где $\hat{C} = C(t+\tau)$, $C = C(t)$.

Эффективное приближенное решение системы нелинейных алгебраических уравнений (39) находится, например, с использованием метода Ньютона [16].

С учетом изложенного можно предложить следующий алгоритм приближенного решения исходной краевой задачи (5)–(11).

1. На данном временном слое вычисляем концентрацию C в соответствии с разностной схемой (39).

2. С учетом найденных значений C на этом временном слое вычисляем значения избыточного напора H согласно явной зависимости (34).

3. Переходим на следующий временной слой и повторяем вычисления начиная с шага 1.

При численной реализации алгоритма интеграл в соотношениях (34) аппроксимируется с помощью соответствующей квадратурной формулы [16].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численная реализация изложенного алгоритма выполнена для входных данных, приведенных в работе [3]. Некоторые из полученных результатов расчетов в без-

размерных переменных (12) графически изображены на рис. 1, 2. Результаты численных экспериментов позволяют сделать следующие выводы о характере поведения избыточных напоров в массиве, насыщенном солевым раствором и деформирующемся в условиях влияния эффектов памяти, а также пространственной нелокальности.

1. В случае аномальной осмотической фильтрации, при учете всех рассмотренных выше факторов, влияющих на процесс уплотнения, величины избыточных напоров в массиве в фиксированный момент времени являются меньшими по сравнению с соответствующими величинами в случае учета влияния лишь эффектов памяти (рис. 1, где 1, 1' — $t = 0,59$; 2, 2' — $t = 0,85$; 3, 3' — $t = 1,18$; 4, 4' — $t = 1,52$; 5, 5' — $t = 2,54$, $\lambda_3 = 0,025$), что указывает на уменьшение в рассматриваемом случае длительности консолидационного периода.

2. Монотонное возрастание величины релаксационного параметра λ_3 , в случае учета эффектов пространственно-временной нелокальности, приводит к ускоренному рассеиванию избыточных напоров в уплотняющемся в ука-

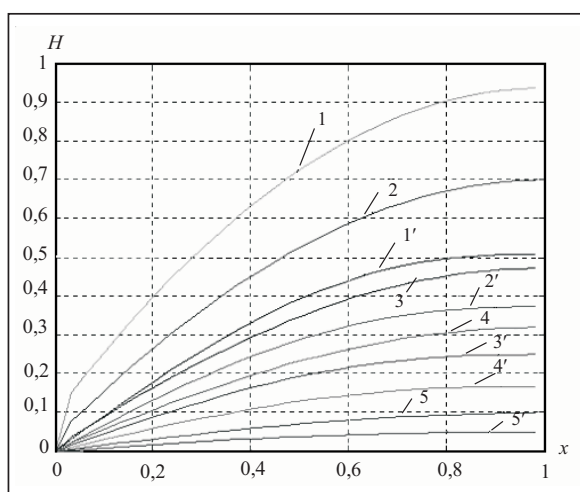


Рис. 1. График поведения избыточных напоров в общем случае (кривые 1'–5') и с учетом влияния лишь эффектов памяти (кривые 1–5) в случае аномальной осмотической фильтрации

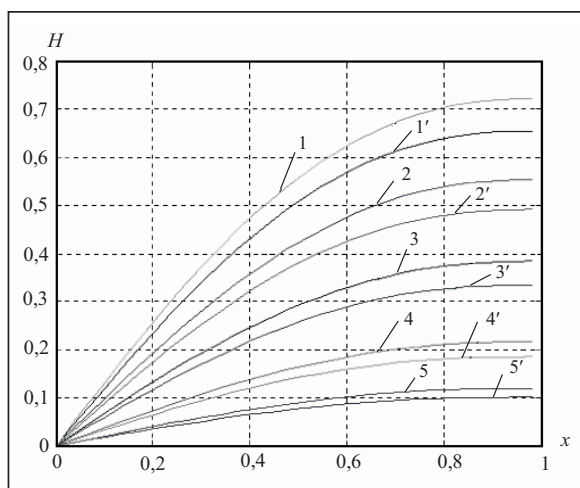


Рис. 2. График влияния вариации параметра λ_3 на величину избыточных напоров в случае аномальной осмотической фильтрации (кривые 1–5 соответствуют значению $\lambda_3 = 0,01$, кривые 1'–5' — значению $\lambda_3 = 0,02$)

занных условиях массиве (рис. 2, где 1, 1' — $t=0,42$; 2, 2' — $t=0,68$; 3, 3' — $t=1,01$; 4, 4' — $t=1,52$; 5, 5' — $t=2,03$).

3. Как показывают расчеты, в случае нормальной осмотической фильтрации, при учете пространственно-временной нелокальности, имеют место аналогичные случаю аномальной фильтрации закономерности поведения избыточных напоров относительно влияния эффекта пространственной нелокальности. Отличие между двумя случаями осмотической фильтрации (нормальной и аномальной) главным образом состоит в том, что в первом из них с течением времени избыточные напоры в массиве могут принимать отрицательные значения, а грунт — переходить в состояние переуплотнения [1, 3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бомба А. Я., Булавацький В. М., Скопецький В. В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. — Київ: Наук. думка, 2007. — 292 с.
2. Булавацький В. М., Скопецький В. В. Системний підхід к проблемі математического моделювання процесу фільтраційної консолідації // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 6. — С. 71–79.
3. Власюк А. П., Мартинюк П. М. Математичне моделювання консолідації ґрунтів в процесі фільтрації сольових розчинів. — Рівне: Вид-во УДУВГП, 2004. — 211 с.
4. Лыков А. В., Берковский Б. М. Законы переноса в неньютоновских жидкостях // Тепло- и массообмен в неньютоновских жидкостях. — М.: Энергия, 1968. — С. 5–14.
5. Динариев О. Ю., Николаев О. В. О релаксационных процессах в низкопроницаемых пористых материалах // Инж.-физ. журн. — 1990. — 58, № 1. — С. 78–81.
6. Скопецький В. В., Булавацький В. М. Математичне моделювання процесу фільтраційної консолідації масивів, насичених сольовими розчинами за умов релаксаційної фільтрації // Доп. НАН України. — 2006. — № 2. — С. 55–61.
7. Молокович Ю. М., Непримеров Н. И., Пикуза В. И., Штанин А. В. Релаксационная фильтрация. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. — 136 с.
8. Aifantis E. C., Hill J. M. On the theory of diffusion in media with double diffusivity // Quart. J. Mech. Appl. Math. — 1980. — 33. — P. 1–21.
9. Иванов П. Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. — М.: Высш. шк., 1991. — 447 с.
10. Ляшко И. И., Демченко Л. И., Мистецкий Г. Е. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. — Киев: Наук. думка, 1991. — 264 с.
11. Вишик М. И., Люстерник Л. Я. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. — 1957. — 12, вып. 5. — С. 3–122.
12. Карташов Э. И. Аналитические методы в теплопроводности твердых тел. — М.: Высш. шк., 1979. — 415 с.
13. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972. — 259 с.
14. Глущенко А. А. Один приближенный метод решения нестационарных задач математической физики // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1978. — № 6. — С. 490–494.
15. Положий Г. Н. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. — Киев: Вища шк., 1962. — 161 с.
16. Ляшко И. И., Макаров В. Л., Скоробогатько А. А. Методы вычислений. — Киев: Вища шк., 1977. — 408 с.

Поступила 18.09.2007