УДК 62-50

**В.Ф. ЗАДОРОЖНЫЙ**

# УПРАВЛЯЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПЕРАТОР КАРЛЕМАНА

**Ключевые слова:** *динамическая система, компакт, управление, устойчивость, операторы Гильберта–Шмидта и Карлемана, мера.*

## ВВЕДЕНИЕ

Понятие динамической системы возникло как обобщение понятия механической системы, движение которой описывается дифференциальными уравнениями Ньютона, Лагранжа или Гамильтона–Якоби. Развиваясь, оно наполнялось новым глубоким математическим содержанием, объединяя разные по смыслу прикладные задачи. В настоящее время понятие динамической системы является весьма широким. Оно охватывает системы любой природы: физической, химической, биологической, экономической и т.д. Описание динамических систем (математические модели) также допускает большое разнообразие: оно может быть представлено с помощью дифференциальных уравнений, или средствами функций алгебры логики, или с помощью графов, символической динамики, марковских цепей и т.д. Введем понятие непрерывной динамической системы [1, 2].

**Определение 1.** Динамической системой (с непрерывным временем), или потоком на множестве $M^n$, называют такое семейство преобразований $\Psi_t, t \in R^1$, на $M^n$, что $\Psi_0$ — тождественное преобразование и $\Psi_{t+s} = \Psi_t \circ \Psi_s$.

При этом накладываются дополнительные ограничения — непрерывность, гладкость и т.д. Преобразование $\Psi_t$ задается с помощью векторного поля $X(x)$ или векторного нелинейного уравнения

$$\dot{x} = X(x), \ x \in M^n, \tag{1}$$

где $M^n$ — $C^r$-многообразие. Иногда говорят о векторном поле $X(x)$, $x \in M^n$, как о динамической системе. Далее динамические системы рассматриваются исключительно на замкнутых ограниченных (компактах) $C^r$-многообразиях $\overline{\Omega} \subset R^n$. Векторные поля $X(x)$ на таких многообразиях образуют компактные динамические системы. Обозначим их $\sum$.

**Теорема Коши** [2]. Пусть (1) — компактная динамическая $\sum$-система. Пусть компакт $\overline{\Omega}$ — гладкое $C^r$-многообразие. Тогда через любую точку $x$ на $\Omega = \operatorname{int} \overline{\Omega}$ как через начальную проходит, и притом только одна, интегральная кривая $x_t(x) : t \to x_t(x) \in \Omega$. Данная кривая принадлежит классу $C^r$. Для каждого $t \in [0, \infty)$ равенство $\Psi_t(x) \triangleq x_t(x)$ определяет отображение $\Psi_t : \Omega \to \Omega$. При этом $\Psi_0$ является тождественным отображением и $\Psi_{t_1} \circ \Psi_{t_2} = \Psi_{t_1 + t_2}$ $(x_{t_1}(x_{t_2}(x)) = x_{t_1 + t_2}(x))$.

Равенство $\Psi(t, x) = x_t(x)$ определяет отображение $\Psi_t$: $R \times M^n \to M^n$. Это отображение принадлежит классу $C^r$. Используя ядро $k(x, y)$, $x$, $y \in \Omega$, введем оператор $A$, где $k(x, \cdot) \in L^2(Y)$ для почти всех $x(0) = x \in \Omega$. Пусть $k(x, \cdot)$ — ядро Карлемана и пусть $g \in L^2 \overline{\Omega}$, тогда $k(x, \cdot) g(\cdot) \in L^1(Y)$ для почти всех $x$. Для таких ядер область определения $g$ состоит из функций $g(x)$, образ которых принадлежит $L^2(\overline{\Omega})$. Теорема приводит условия существования и единственности решения $x_t(x) \doteq T_t(x)$ в целом. Будем считать, что система (1) имеет решение в целом для любого момента времени, если для почти всех точек $x$ с обычной лебеговой мерой существует для всех $t \in [0, \infty)$ решение системы (1) при начальных условиях $x(0) = x$, для которого каждая точка множества $\Omega$, за исключением точек некоторого множества меры нуль, не уходит на бесконечность за конечное время. Введем в рассмотрение важный класс интегральных операторов, которые идейно и исторически связаны с именем Карлемана. Оператор Карлемана (для простоты записи обозначим его $A$) порождается ядром Карлемана [4, с. 73].

**Определение 2.** Ядром Карлемана называется такое ядро, для которого $k(x,\cdot) \in L^2(Y)$ для почти всех $x$.

Пусть $k(x,\cdot)$ является ядром Карлемана и пусть $g \in L^2(Y)$, тогда $k(x,\cdot)g(\cdot) \in L^1(Y)$ для почти всех $x$. Для таких ядер область определения состоит из тех функций $g \in L^2(Y)$, образ которых принадлежит $L^2(X)$. Используя ядро $k(x, y)$, введем оператор Карлемана $A$.

**Определение 3.** Для каждого ядра $k(x,\cdot)$ имеется связанная с ним функция $\gamma(\cdot)$ в $L^2$, определенная равенством $\gamma(x)(y) = k(x, y)$, такая, что действие индуцированного оператора определяется формулой

$$(Ag)(x) = (g, \gamma(x)).$$

Функция $\gamma(x)$ слабо измерима, так как $(g, \gamma(x)) \in L^2$ измерима для каждого $g(x)$. Более того, если $k(x, y)$ — ограниченное ядро, то эти функции и оператор $A$ ограничены, т.е. существует положительное число $p$ такое, что

$$\int_\Omega (g, \gamma(y))dy \le p^2 ||g||_2^2.$$

Таким образом, в терминах гильбертова пространства, если $g \in L^2(\Omega)$, то

$$(Ag)(x) = \int_\Omega k(x, y)g(y)dy = (g, k(x,\cdot)). \qquad (2)$$

Сравнительно новый важный класс динамических систем составляют управляемые динамические системы $\sum_u$ [5, 6]. Для таких систем векторное поле $X = X(x,u)$, $u \in U \subset R^m$, $m \le n$, явно зависит от некоторого управляющего вектора из заданного класса функций. Главная проблема теории управления — выбор (синтез) управляющих параметров таких, чтобы заданный критерий качества $J(t, x, u)$, характеризующий работу системы $\sum_u$ с учетом возможных ограничений, был минимальным (возможно допустимым).

### КОМПАКТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПЕРАТОР КАРЛЕМАНА

Фазовый портрет системы $\sum$ состоит из стационарных и переходных режимов. Стационарные режимы бывают только двух классов: неподвижные точки и замкнутые кривые. Первым соответствуют положения равновесия, вторым — колебательные процессы (А. Пуанкаре). Здесь считается, что детерминированный хаос — это колебания с очень большим периодом. Важной особенностью систем $\sum$ является наличие функций $\varphi(x)$, на которых несобственный интеграл сходится и выполняется следующее равенство:

$$-\nu(x) = \int_0^\infty \varphi(x_t(x))dt < \infty, \ \varphi(x) \ge 0.$$

**Лемма 1.** Пусть $\{\psi_i(x)\}$ — ортонормированная система элементов в гильбертовом пространстве $L^2$, пусть $x_t(x)$ — решение компактной системы $\sum$ на полупрямой $t \in [0, \infty)$, тогда система функций $\{\psi_i(x_t(x)\}$ образует базис в пространстве $L^2[0, \infty, d\mu[t])$, $d\mu[t] = d\mu(x_t(x))$.

Доказательство леммы легко получить. Для этого нужно доказать, что система функций $\{\psi_i(x_t(x)\}$ линейно независимая и полная, что следует из того, что $\{\psi_i(x)\}$ — полная ортонормированная система функций в $L^2(\overline{\Omega})$.

**Теорема 1.** Компактная динамическая система $\sum$ индуцирует на компактном многообразии $\overline{\Omega}$ интегральный оператор Карлемана.

Прежде чем доказывать данное утверждение, введем некоторые определения и пояснения. Пусть $B$ — пространство с мерой $\sigma$, причем $\Lambda \in M^n$ — объединение счетной совокупности множеств конечной меры, где $\Lambda$ — класс всех $\sigma$-измеримых подмножеств пространства $L^2(M^n)$. Представляет интерес частный случай построения оператора $A$ для компактной динамической системы $\sum$. Положим $\overline{\Omega} \in R^n$ и рассмотрим пространство Гильберта $L^2(\overline{\Omega})$ с обычной мерой Лебега $dx$. Напомним, что оператор $A$ является оператором Карлемана, если и только если существует измеримая функция $\gamma$ на $\Omega \in R^n$ такая, что $k(x, \cdot) \in L^2(\overline{\Omega})$, $x \in \Omega$, почти всюду для каждой функции $g(x) \in L^2(\overline{\Omega})$. Заметим, что наиболее естественными интегральными операторами на $L^2$ являются те, которые индуцируются ядрами Карлемана $k(x, y)$ для почти всех $x \in \Omega$. Из этого определения карлемановского ядра следует, что если $A$ — оператор Карлемана, то $A$ переводит последовательность $\{\psi_i(x)\}$, сходящуюся к нулю по норме, в последовательность, сходящуюся к нулю почти всюду.

**Доказательство.** Пусть задан ортонормированный произвольный базис $\{\psi_i(x)\}$ в пространстве $L^2(\overline{\Omega})$. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^\infty g[t] d\mu[t], \tag{3}$$

где $d\mu[t] = \varphi(x_t(x))dt$ почти для всех $x$ как начальных значений решений $x_t(x)$ динамической системы $\sum$ и при этом $\gamma(x) = \left\{ \sum \left| \int_0^\infty \psi_s[y] d\mu[t] \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty$, где $\mu[t]$ — некоторая функция, суммируемая на интервале $t \in [0, \infty)$. Такую функцию легко построить для компактной динамической системы, например, $\mu = \rho(x)\exp(-\lambda t)$.

Разложим функцию $g(x) \in L^2(\Omega)$ в обобщенный ряд Фурье в произвольной точке $x \in \Omega$ по элементам системы $\{\psi_i(x_t(x))\}$: $g[t] = \sum c_s(x)\psi_s[t]$. Здесь и далее область интегрирования для удобства опускается. Запишем функцию Карлемана следующим образом:

$$\gamma(x) = \left\{ \sum \left| \int_0^\infty \psi_s[t] d\mu[t] \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty \text{ почти всюду.} \tag{4}$$

Если $(Ag)(x) = \sum c_s A\psi_s[t]$, то $\sum c_s A\psi_s[t] \to Ag$, $n \to \infty$, следовательно, $|Ag| \le \{\sum c_s^2\}^{1/2} \{\sum |A\psi_s[t]|^2\}^{1/2} \le ||(A)g||_2\, \gamma(x)$ почти всюду. Учитывая, что подпоследовательность последовательности частных сумм $\eta_N = \sum_{s=1}^N c_s(x)\psi_s[t]$ сходится к $\gamma(x)$, $0 \le \gamma(x) < \infty$, почти всюду, имеем

$$\left|Ag\right| \le ||g||_2 \, \gamma(x). \tag{5}$$

Следовательно, оператор $A$ является оператором Карлемана в гильбертовом пространстве, что и требовалось доказать.

Данный оператор интегральный и имеет полный набор собственных функций, возможно обобщенных, по которым можно разложить карлемановское ядро, а также определить спектр $\sigma(A)$. Обобщенные собственные функции (неинтегрируемые в квадрате), как известно, соответствуют непрерывному спектру оператора $A$. Наметим план поиска функции Карлемана, которая порождается заданной динамической системой. Для этой цели введем оператор $L$, который будет самосопряженным расширением оператора $L_0$, заданного динамической системой и являющегося реализацией дифференциального выражения $X\partial_x \circ$ в пространстве $L^2(\Omega)$.

Поскольку компактная динамическая система сохраняет меру согласно известной теореме Крылова–Боголюбова [7], оператор $L_0$ является симметрическим и может расшириться до самосопряженного $L$. Теперь нужно так подобрать функцию Карлемана $\gamma$, чтобы оператор $L$, а точнее, оператор $(nI - L)$, имел обратный и этот обратный был оператором типа оператора Карлемана.

**Теорема Иосиды** [8]. Оператор $(\lambda I - L)$ при значениях $\lambda > 0$ обладает обратным оператором,

$$R(\lambda, L) = (\lambda I - L)^{-1} = \int\limits_0^\infty \exp(-\lambda t)\varphi[t]\,dt \tag{6}$$

при всех $x$, $Re(\lambda)$ и произвольном ортонормированном базисе, тогда $k(x,\cdot)g(y) \in L^1$, как только $k \notin E$, где $E$ — некоторое нульмерное множество.

Важно заметить, что сумма $\eta$ не зависит от выбора ортонормированной системы. Следовательно, сумма $\eta$ является характеристическим свойством карлемановских операторов. Из конечности суммы $\eta = \lim\limits_{N \to \infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \eta_n$ следует, что оператор $A$ отображает каждую сходящуюся по норме последовательность в последовательность, сходящуюся почти всюду. Иными словами, все вещественные положительные числа и все комплексные числа (в силу самосопряженности) принадлежат резольвентному множеству $R(\lambda, L)$ оператора $\lambda I - L^{-1}$. Следовательно, правая полуплоскость комплексной $\lambda$-плоскости является резольвентным множеством $R(\lambda, L)$ оператора $L$,

$$f = \int k(x, y) g(y) dy. \tag{7}$$

Под интегралом стоят функции, в терминах которых и была найдена карлемановская функция. Формула (6), таким образом, устанавливает связь заданного самосопряженного оператора $L$, характеризующего компактную динамическую систему, с оператором Карлемана. Найдем теперь уравнение, которое определяет данную функцию. Продифференцируем (пока формально) левую и правую части, в силу векторного поля уравнения (6), заданной динамической системы:

$$Lf = \int k(x, y)^* g(y) dy, \quad x, y \in \Omega, k(x, y)^* = \partial_x k(x, y) \circ X. \tag{8}$$

Представим функцию $Lf$ как сумму искомой функции $g$ и некоторой заданной функции $v$ соответственно. Согласно условиям разложения в пространстве $L^2$ должно выполняться условие ортогональности $\int gv^* dx = 0$. Ядро уравнения (8) $k(x, y)^*$ будем понимать как обобщенную производную в силу системы $\sum$. Действительно, ряд $\sum \mu_s \psi_s(x) \psi_s(y)^*$ сходится равномерно и абсолютно, поэтому его можно дифференцировать, в обобщенном смысле, по направлению заданного векторного поля $X$. Следовательно, обобщенная производная существует и это уравнение принимает вид

$$\lambda g + v = \int k(x, y)^* g(y) dy. \tag{9}$$

Решая уравнение (8), находим функцию $g$, которая удовлетворяет условию $\int g v^* dx = 0$ при заданной функции $v(x)$. Покажем, что ядро $k^* = \sum \mu_s D_x \psi_s(x) \psi_s(y)^*$ тоже карлемановское.

Известно [8], что достаточно высокая степень $\kappa$ резольвенты $(\lambda I - L)^{-\kappa}$ самосопряженного расширения $L$ эллиптического оператора $L_0$ является оператором Карлемана. Поскольку здесь рассматриваются динамические системы, имеет место теорема о разложении по собственным функциям Гординга–Маутнера (см., например, [8]). В то же время оператор $L$ — самосопряженный дифференциальный, связанный с динамической системой, сохраняющей меру. Следовательно, существует система элементов $\{\chi_i\}_{i=1}^{\infty} \in W_2^1(\Omega)$ пространства Соболева, являющихся обобщенными собственными функциями этого оператора (см. теорему Гельфанда–Костюченко [9]).

Резюмируем эти результаты следующим образом.

1. Дифференциальные уравнения динамической системы на компакте взаимооднозначно порождают интегральные уравнения с ядрами типа ядер Карлемана.

2. Если $L$ — дифференциальный оператор, индуцируемый компактной динамической системой, то ее можно разложить по собственным функциям. Отсюда следует, что обобщенные собственные функции $\{\chi_i\}_{i=1}^{\infty} \in W_2^1(\Omega)$ являются решениями дифференциального уравнения (9). Важны случаи (условия), когда собственные функции регулярны, а спектр динамической системы образуется только собственными числами. Один из таких примеров, который зна́чим и сам по себе, когда область int $\overline{\Omega}$ является областью притяжения точкой положения равновесия системы $\sum$.

## АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И ОПЕРАТОРЫ ГИЛЬБЕРТА–ШМИДТА

Покажем, что в области притяжения оператор Карлемана трансформируется в оператор Гильберта–Шмидта. Действительно, в этом случае функция Карлемана должна принадлежать пространству Гильберта. От оператора Карлемана легко можно перейти к оператору Гильберта–Шмидта. Достаточно показать, что карлемановская функция принадлежит пространству Гильберта. Докажем принадлежность их пространству Гильберта, не используя решения динамической системы.

**Теорема 2.** Пусть динамическая система $\sum$ на компакте $(\overline{\Omega})$ имеет одно положение равновесия $x = 0$ и область int $\overline{\Omega}$ — область притяжения этой точки, тогда оператор Карлемана будет оператором Гильберта–Шмидта.

**Доказательство.** В силу того что область $\Omega$ — область притяжения, в ней существует пара функций $(v, w)$, удовлетворяющих теореме Зубова об асимптотической устойчивости [10]. Введем в рассмотрение ортонормированную, в смысле $L^2$, систему $\{\psi_s(x)\}$ и оператор $R$ следующим образом:

$$Rg = \int_0^{\infty} g d\sigma[t].$$

Здесь $g$ — произвольная непрерывная функция. Представим ее обобщенным рядом Фурье $\sum c_s \psi_s(x)$, так что $c_s = \int g(x) \psi_s(x)^* dx$ и $||g||_2^2 = \int g(x) g(x)^* dx$ — квадрат нормы в $L^2$. Заменяя под знаком интеграла функцию $g$ суммой ее ряда

$\sum c_s \psi_s^*(x)$ и вводя оператор $Rg = \int_0^\infty g d\sigma[t]$, приходим к неравенству $|Rg|^2 \le N^2 \left| \int_0^\infty g d\sigma \right|^2$, где $N = \sup \left\{ \sum \left| \int \psi_s \, d\sigma \right|^2 \right\}^{1/2}$. Учитывая, что $\sum \left| \int \psi_s d\sigma \right|^2$ — непрерывная на компакте функция, имеем $N = \sup \left\{ \sum \left| \int \psi_s d\sigma \right|^2 \right\}^{1/2} < \infty$. Получаем следующее неравенство:

$$\left| Rg \right| \le ||g||_2 \sup \left\{ \sum \left| \int \psi_s d\sigma \right|^2 \right\}^{1/2}.$$

Окончательно приходим к необходимым и достаточным условиям существования оператора Гильберта–Шмидта

$$\left| Rg \right| \le N ||g||_2 \, V(x). \tag{10}$$

Данное неравенство — необходимое и достаточное условие того, что оператор $R$ является оператором Гильберта–Шмидта [4]. Доказательство закончено.

Таким образом, динамическая система в области притяжения (вплоть до границы области асимптотической устойчивости) индуцирует оператор Гильберта–Шмидта. Напомним, что оператором Гильберта–Шмидта называется компактный интегральный оператор, спектр которого образован числами, суммируемыми с квадратом [8]. Следовательно, собственными элементами оператора будут регулярные функции. Решения дифференциального уравнения (1) при этом представимы следующим образом:

$$f(x) = \int \omega(x, y) g(y) dy. \tag{11}$$

Разложим ядро $\omega$ по элементам выбранного базиса $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty} \subset L^2(\Omega)$ пространства и продифференцируем левую и правую части соотношения (11), чтобы ряд $Lf = \sum \mu_s h_s \dot{\varphi}_s(x)$, полученный в результате дифференцирования в силу (1), равномерно сходился. Покажем, что это условие выполняется для ядер со сходящимися собственными числами $\{\mu_s\}$. Напомним, что интегральные операторы с такими собственными числами называются ядерными операторами [4]. Действительно, в этом случае ряд $\sum \mu_s h_s \varphi_s(x)$, $h_s = (g, \varphi_s)$, должен сходиться не хуже чем ряд $\sum \mu_s h_s$. При этом оператор, разрешающий уравнения компактной динамической системы, должен быть ядерным.

**Теорема 3.** Интегральный оператор $R$, разрешающий уравнение (1),

$$Rg = \int_0^\infty g[t] d[t], \tag{12}$$

является ядерным оператором.

**Доказательство.** Для всякого элемента $g(\cdot) \in L^1(\Omega)$ уравнение (11) разрешимо в виде

$$f(x) = \int \omega(x, y) g(y) dy$$

с гильбертовым ядром. Так как решения системы — непрерывные функции, ряд $\sum \mu_s h_s$ должен сходиться равномерно и абсолютно, т.е. $\sum \left| \mu_s h_s \right| < \infty$ для всех $g(\cdot) \in L^1(\Omega)$. Из принципа равномерной ограниченности следует, что это неравенство будет выполняться тогда и только тогда, когда $\sum \left| \mu_s \right| < \infty$. Отметим, что бесконечномерные ядерные операторы наиболее близки к конечномерным операторам (матрицам): 1) существуют абсолютно сходящиеся определители, т.е. к таким операторам полностью применима теория интегральных операторов Фредгольма; 2) матричный след совпадает с его спектральным следом; 3) сумма $\sum \mu_s \varphi_s(x)\varphi_s(y)^*$ не зависит от выбора ортонормированной системы (см. об этом подробно в [4]). Воспользуемся свойством 3 и зададимся ядром $\sum \mu_s \varphi_s(x)\varphi_s(y)^*$. Если оператор $R$ ядерный, то сумма $\sum \mu_s \varphi_s(x)\varphi_s(y)^*$ не зависит от выбора ортонормированного базиса в гильбертовом пространстве.

А.М. Ляпунов, устанавливая необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости линейных конечномерных систем, опирался на свойство диссипативности линейных операторов. Однако и бесконечномерные, неограниченные операторы могут обладать этим свойством, а именно, линейный оператор $L$, отображающий $D(L) \subseteq L^2$ в $L^2$, называется диссипативным, если $\Re(Lg, g) \le 0$.

**Теорема 4.** Если оператор $L$ диссипативен, то для всякого ядерного положительного оператора $C$ уравнение

$$AR + R^* A = C \tag{13}$$

разрешимо в виде положительного оператора $A$ Гильберта–Шмидта.

**Доказательство** состоит в прямом построении определенно-отрицательного ядра $a(x, z)$ как решения уравнения

$$\{a(x, z)\omega^*(z, y) + \omega^*(y, z)a(z, x)\} = -c(x, y),$$

которое на множестве функций из пространства Соболева $W_2^1(\Omega)$ удовлетворяет условию

$$\int c(x, y)g(x)g(y)dxdy \ge 0.$$

### ОПТИМАЛЬНОЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЕ

Важной особенностью систем $\sum$ является наличие функций $w(x)$, $x \in \Omega$, на которых несобственный интеграл сходится и выполняется равенство

$$\int_0^\infty w(x_t(x))dt < \infty.$$

Таким образом, функция, характеризующая переходной процесс в системе с одним положением равновесия, убывает вдоль траекторий системы. В.И. Зубовым доказано [6], что переходной процесс будет затухать оптимальным образом, если и только если функция Ляпунова $\upsilon(x)$ будет наибольшей демпфирующей функцией. Как известно, умножение векторного поля $X$ на непрерывную положительную функцию $\rho(x)$ не меняет траекторий, но меняет скорость движения. Поставим следующую задачу: найти положительную функцию $\rho(x)$, при которой скорость убывания функции Ляпунова $\upsilon(x)$, удовлетворяющей уравнению

$$\partial_x \upsilon \, X\rho = w(1 - \upsilon), \tag{14}$$

будет наибольшей при допустимых ограничениях на скорость движения.

Пусть положение равновесия $x = 0$ системы (1) асимптотически устойчиво и область притяжения — область int $\Omega$. Как показано ранее, динамической системе ставим в соответствие интегральное однородное уравнение

$$g(x) = \int \sum \mu_s \dot{\psi}_s(x)\psi_s(y)g(y)dy,$$

где $\dot{\psi}_s = D_x \omega(x, y)X(x)\rho(x)$, $x, y \in \Omega$.

Решая это уравнение, находим $g(x)=\int\sum\mu_s\dot\psi_s(x)\psi_s(y)g(y)dy.$ Определим $\rho(x)$ из условия

$$k_{ij} = -\delta_{ij},\ i,j\le n,\ k_{ij}=0,\ i,j\ge n.$$

Теперь поставленную задачу можно трактовать как известную проблему моментов [12]: задано $n\times n$ коэффициентов $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\ne j,\end{cases}$ $i,j\le n,$ задано $n\times n$ функций $\{\psi_i(x)\dot\psi_j(x)\},$ найти наибольшее $\rho(x)$, удовлетворяющее условию ограниченности $||\rho(x)||\le l.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1971. — 239 с.
2. Тамура И. Топология слоений. — М.: Мир, 1979. — 315 с.
3. Повзнер А. Теорема существования в целом для нелинейной системы и индекс дефекта линейного оператора // Сиб. мат. жур. – 1964. — **5**, № 2. — С. 377–386.
4. Халмош П., Сандер В. Ограниченные интегральные операторы в пространстве $L^2$. — М.: Наука, 1985. — 158 с.
5. Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений. Дополнение IV к монографии: И.Г. Малкин. Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966. — 530 с.
6. Зубов В.И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. — Л.: Машиностроение, 1974. — 333 с.
7. Боголюбов Н.Н. Полное собрание сочинений. — К.: Наук. думка, 1976. — Т. 2. — 517 с.
8. Морен К. Методы гильбертова пространства. — М.: Мир, 1965. — 570 с.
9. Гельфанд И.М., Костюченко А.Г. О разложении по собственным функциям дифференциальных и других операторов // Докл. АН СССР. — 1955. — **103**, № 3. — С. 349–352.
10. Зубов В.И. Интегральные уравнения для функции Ляпунова // Там же. — **314**, № 4. — 1990. — С. 780–782.
11. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. — М.: Наука, 1965. — 127 с.
12. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1978. — 305 с.
13. Задорожный В.Ф. Проблема Ляпунова в задачах управления динамическими системами // Кибернетика и системный анализ. — 2002. — № 6. — С. 133–142.


*Поступила 10.01.2008*