УДК 519.8

С.О. МАЩЕНКО

ИНДИВИДУАЛЬНО-ОПТИМАЛЬНЫЕ РАВНОВЕСИЯ НЕКООПЕРАТИВНЫХ ИГР В ОТНОШЕНИЯХ ПРЕДПОЧТЕНИЯ

Ключевые слова: *равновесие Нэша, коалиционная игра, стабильность равновесия.*

Игры, заданные в отношениях предпочтения игроков на множестве ситуаций, представляют собой обобщение игр, в которых цели игроков описываются функциями выигрыша. С одной стороны, такое обобщение позволяет анализировать конфликтные ситуации в случае невозможности построения функций полезности (выигрыша) игроков, с другой — глубже понять суть конфликта, пути его разрешения и используемые принципы оптимальности.

В настоящей работе рассматриваются классические принципы оптимальности в некооперативных играх, заданных отношениями предпочтения игроков, и их обобщение принципом индивидуальной оптимальности [1]. Этот принцип представляет отдельный интерес, но также может использоваться для исследования стабильности других равновесий.

Рассмотрим игру G в нормальной форме $(X_i, R_i; i \in N)$, где $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество из n игроков; X_i — множество стратегий игрока $i \in N$; $R_i \subseteq X \times X$ — бинарное отношение предпочтения игрока $i \in N$, которое определено на множестве ситуаций игры $X = \prod_{i \in N} X_i$. Каждый игрок, выбирая свои стратегии $x_i \in X_i$, стремится к тому, чтобы сложилась насколько возможно более предпочтительная для него ситуация игры. Под предпочтением здесь понимается рефлексивное бинарное отношение, используемое для целевой ориентации игрока.

Отношение предпочтения R индуцирует на X: отношение безразличия $P = R \cap R^{-1}$ — симметричное и рефлексивное бинарное отношение; отношение доминирования $S = R \setminus R^{-1}$ — асимметричное и антирефлексивное бинарное отношение. В свою очередь, отношение доминирования S индуцирует на X отношения безразличия $P = \overline{S} \cap \overline{(S)^{-1}}$ и предпочтения $R = S \cup P$.

Игра G в нормальной форме $(X_i, R_i; i \in N)$ является обобщением игр $(X_i, u_i; i \in N)$ с заданными скалярными функциями выигрыша игроков $u_i : X \to E^1$ и игр $(X_i, U_i; i \in N)$ с векторными функциями выигрыша игроков $U_i : X \to E^{m_i}$, где m_i — количество критериев, по которым игрок $i \in N$ оценивает свой выигрыш. Это обосновывается тем, что любая скалярная функция $u : X \to E^1$ порождает отношение доминирования $u(x) > u(y) \to xSy \;\; \forall\, x, y \in X$, которое, в свою очередь, порождает отношения безразличия $P = \overline{S} \cap \overline{(S)^{-1}}$ и предпочтения $R = S \cup P$. В играх с векторными функциями выигрыша следует различать случаи, когда игрок максимизирует свои критерии одновременно (многокритериальные игры) и когда — поочередно.

В многокритериальных играх в соответствии с аксиомой Парето (слабой аксиомой Парето) вектор-функция $U = (u_j)_{j = \overline{1, m}} : X \to E^m$ порождает отношение доминирования $u_j(x) \geq u_j(y)$, $j = \overline{1, m}$, $U(x) \neq U(y) \to xSy \;\#\, x, y \in X$ (и так называемое отношение сильного доминирования $u_j(x) > u_j(y)$, $j = \overline{1, m} \to x S^s y$, $\forall\, x, y \in X$).

В играх, в которых игрок максимизирует свои критерии поочередно, отношение доминирования определяется как строгий лексикографический порядок S^{lex}. Говорят, что $xS^{\text{lex}}y$, если $\exists\ k=\overline{1,m}$, для которого $u_j(x)=u_j(y)$, $j=\overline{1,k-1}$, и $u_k(x)>u_k(y)$. Отношения безразличия и предпочтения определяются аналогично случаю со скалярными функциями выигрыша игроков.

Рассмотрим известные принципы оптимальности, которые можно применить для некооперативной игры G в нормальной форме $(X_i, R_i; i\in N)$.

Концепция оптимальности по Парето, например [2], является основополагающей в теории кооперативных игр и многокритериальной оптимизации. Применение этого принципа при некооперативном поведении игроков никоим образом не может быть аргументировано. Поэтому в классической теории некооперативных игр оптимальность по Парето скорее представляет собой определенный эталон, с которым сравниваются другие принципы оптимальности. В данной работе используем оптимальность по Парето в технических целях для анализа других принципов.

Пусть S_i — отношение доминирования игрока $i\in N$, индуцированное отношением предпочтения R_i, т.е. $S_i=R_i\setminus R_i^{-1}$. Для использования концепции оптимальности по Парето в игре G агрегируем отношения доминирования S_i игроков $i\in N$ в отношение доминирования всего их сообщества $S_N=\bigcap\limits_{i\in N} S_i$. Ситуация x называется оптимальной по Парето, если $\overline{\exists}\ y\in X: yS_N x$. Обозначим $PO(G)=\{x\in X \mid y\overline{S}_N x\ \ \forall\ y\in X\}$ множество оптимальных по Парето ситуаций игры G. Очевидно, что $PO(G)=\Omega_+(S_N)$, где $\Omega_+(S)=\{x\in X \mid y\overline{S}x\ \forall\ y\in X\}$ — множество мажорант отношения S.

Одним из способов задания множеств, а следовательно, и бинарных отношений, является характеристическая функция. Булеву функцию $r: X\times X\to\{0,1\}$ назовем характеристической функцией бинарного отношения R, определенного на множестве ситуаций X игры G, если $r(x, y)=1 \Leftrightarrow xRy$, $r(x, y)=0 \Leftrightarrow x\overline{R}\ y$ $\forall\ x, y\in X$. Пусть S_i — отношение доминирования игрока $i\in N$, индуцированное отношением предпочтения R_i, которое задано характеристической функцией r_i. Тогда, очевидно, характеристическая функция отношения $S_i=R_i\setminus R_i^{-1}=R_i\cap\overline{R_i^{-1}}$ будет определяться как $s_i(x, y)=\min\,(r_i(x, y), (1-r_i(x, y)))$, а отношения S_N — соответственно как $s_N(x, y)=\min\limits_{i\in N} s_i(x, y)$. Здесь и далее будем обозначать отношение прописной буквой, а соответствующую характеристическую функцию — строчной. Множество оптимальных по Парето ситуаций игры G в терминах характеристической функции примет вид

$$PO(G)=\{x\in X \mid s_N(x, y)=0\ \ \forall\ y\in X\}=\{x\in X \mid \min_{i\in N} s_i(x, y)=0\ \ \forall\ y\in X\}.$$

Если игроки полностью информированы, то им целесообразно заключить определенное необязательное соглашение, которое невыгодно ни одному из них нарушать. Идея стабильного соглашения приводит к следующему определению [3]. Ситуация x^* называется равновесием по Нэшу (их множество обозначим $NE(G)$), если $x^* R_i(y_i, x^*_{N\setminus i})\ \forall\ y_i\in X_i$, $i\in N$. Вектор $(y_i, x^*_{N\setminus i})$ обозначает ситуацию, в которой игрок $i\in N$ поменял стратегию x_i^* на y_i, а остальные игроки $j\in N\setminus\{i\}$ выбрали x_j^*.

Введем $R^{NE(T)}$ — отношение NE-предпочтения коалиции игроков $T\subseteq N$, порожденное некоторым отношением предпочтения R. Будем говорить, что $xR^{NE(T)}y$, если $xRy\neq(x_{N\setminus T}\neq y_{N\setminus T})$. Очевидно, $R^{NE(T)}\subset R$ и рефлексивно, поэтому также является отношением предпочтения. В терминах NE-предпочтений определение равновесия Нэша примет следующий вид: $x^* \in NE \Leftrightarrow x^* R_i^{NE(\{i\})} y$ $\forall\ y \in X$, $\forall\ i \in N$. Тогда равновесие Нэша x^* является максимальным элементом каждого отношения $R_i^{NE(\{i\})}$, $i \in N$, т.е. $x^* \in \bigcap\limits_{i \in N} \Omega^+ (R_i^{NE(\{i\})})$. Напомним, что множество максимальных элементов отношения R на множестве X определяется как $\Omega^+(R) = \{x \in X \mid xRy\ \ \forall\ y \in X\}$.

Если максимального элемента не существует, то целесообразно искать мажоранту. В частности, это может быть в случае, когда отношения предпочтения игроков порождены векторными функциями выигрыша игроков [4].

Пусть $S^{NE(T)} = R^{NE(T)} \setminus (R^{NE(T)})^{-1}$ — отношение NE-доминирования, порожденное некоторым отношением NE-предпочтения $R^{NE(T)}$ коалиции игроков $T \subseteq N$. Отношение NE-предпочтения $R^{NE(T)}$ порождено некоторым отношением предпочтения R, которое, в свою очередь, порождает отношение доминирования $S = R \setminus R^{-1}$. Рассмотрим связь отношений S и $S^{NE(T)}$.

Теорема 1.Справедливо отношение $xS^{NE(T)} y \Leftrightarrow (xSy) \vee (x_{N\setminus T} = y_{N\setminus T})$ $\forall\ T \subseteq N$.

Доказательство. Справедлива следующая цепочка импликаций $\forall\ T \subseteq N$:

$$S^{NE(T)} = R^{NE(T)} \setminus (R^{NE(T)})^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((xRy) \neq (x_{N\setminus T} \neq y_{N\setminus T})) \cap \overline{((yRx) \neq (x_{N\setminus T} \neq y_{N\setminus T}))} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((xRy) \neq (x_{N\setminus T} \neq y_{N\setminus T})) \cap ((y\overline{R}x) \vee (x_{N\setminus T} = y_{N\setminus T})) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((xRy) \cap ((y\overline{R}x) \vee (x_{N\setminus T} = y_{N\setminus T}))) \neq (((x_{N\setminus T} \neq y_{N\setminus T}) \vee$$

$$\vee (x_{N\setminus T} = y_{N\setminus T})) \cap (y\overline{R}x)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (xRy) \cap ((y\overline{R}x) \vee (x_{N\setminus T} = y_{N\setminus T})) \Leftrightarrow (xSy) \vee (x_{N\setminus T} = y_{N\setminus T}).$$

Теорема доказана.

Далее будем называть $S^{NE(T)}$ отношением NE-доминирования коалиции игроков $T \subseteq N$, порожденное отношением доминирования S.

Назовем ситуацию x^* мажорантным (векторным [4]) равновесием по Нэшу, если $y\overline{S}_i^{NE(\{i\})} x^*$ $\forall\ y \in X$, $\forall\ i \in N$ (их множество обозначим $MNE(G)$). Очевидно, $NE(G) \subseteq MNE(G)$. Поскольку на основании теоремы 1 $yS_i^{NE(\{i\})} x \Leftrightarrow (yS_i x) \vee (x_{N\setminus i} = y_{N\setminus i})$, то $x^* \in MNE \Leftrightarrow (y_i, x^*_{N\setminus i}) \overline{S}_i x^*$ $\forall\ y_i \in X_i$, $i \in N$. Поэтому в терминах характеристической функции мажорантные равновесия Нэша определим как

$$MNE(G) = \{x^* \in X \mid s_i((y_i, x^*_{N\setminus i}), x^*) = 0\ \ \forall\ y_i \in X_i, i \in N\}.$$

Несмотря на кажущуюся привлекательность, концепция оптимальности по Нэшу не лишена недостатков. Она обоснована только в игровых ситуациях, когда игроки экстремально прагматичны (эгоистичны). Равновесия Нэша (в чистых стратегиях) не всегда существуют даже в простых играх с конечными множествами стратегий игроков. Их нахождение бывает достаточно серьезной вычислительной проблемой. Если равновесие Нэша неединственно, то возникает сложная проблема выбора [5].

Концепция коалиционного равновесия является обобщением равновесия Нэша на случай, когда стратегии и цели рассматриваются для коалиций игроков $\varnothing \neq N(k) \subseteq N$, $k \in K$, где K — множество коалиций.

Пусть $Q=\{N(k)\}_{k\in K}$ — некоторое разбиение множества игроков на коалиции: $N(k)\subseteq N$, $k\in K$: $N(i)\cap N(j)=\varnothing$, $i\neq j$; $\bigcup\limits_{k\in K} N(k)=N$. Поскольку отношение доминирования $S_{N(k)}$ коалиции $N(k)\subseteq N$ на множестве ситуаций игры определяется отношениями доминирования всех ее членов $i\in N(k)$, то $S_{N(k)}=\bigcap\limits_{i\in N(k)} S_i$, $k\in K$. Ситуация x^* называется коалиционным равновесием [6] в игре G при заданном разбиении $Q=\{N(k)\}_{k\in K}$ множества игроков на коалиции, если

$$(y_{N(k)}, x^*_{N\setminus N(k)})\bar{S}_{N(k)}x^* \quad \forall\, y_{N(k)}\in X_{N(k)},\ \forall\, k\in K, \tag{1}$$

где $X_{N(k)}=\prod\limits_{i\in N(k)} X_i$ — множество стратегий коалиции $k\in K$. Будем обозначать множество этих равновесий игры G как $KNE_Q(G)$. Обозначим $s_{N(k)}(x, y)$ характеристическую функцию отношения доминирования коалиции $k\in K$. Очевидно, $s_{N(k)}(x, y)=\min\limits_{i\in N(k)} s_i(x, y)$. Тогда множество коалиционных равновесий определяется следующим образом:

$$KNE_Q(G)=\left\{x\in X \,\middle|\, \min_{i\in N(k)} s_i((y_{N(k)}, x^*_{N\setminus(k)}), x^*)=0 \;\; \forall\, y_{N(k)}\in X_{N(k)}, k\in K\right\}.$$

.

Коалиционное равновесие x^* стабильно для $|K|$ агентов игры, которыми являются коалиции. Внутри каждой коалиции $k\in K$ коалиционная стратегия $x^*_{N(k)}=(x_i^*)_{i\in N(k)}$ может быть нестабильной, поскольку каждый игрок $i\in N(k)$ может изменить стратегию x_i^* на другую, более выгодную лично для себя.

Из приведенных рассуждений можно сделать следующий вывод. Чем больше коалиций, тем для большего количества агентов игры будет стабильным коалиционное равновесие. В частности, при $|K|=n$ коалиционное равновесие x^* будет равновесием Нэша, которое стабильно для всех игроков. Если $|K|=1$, то ситуация x^* стабильна для единственного агента игры, которым будет все сообщество игроков. В отличие от равновесий Нэша, коалиционные равновесия могут разрешить более широкий круг игровых конфликтов. Во-первых, условия их существования могут быть слабее; во-вторых, они обоснованы в играх, где игроки ради разрешения конфликта готовы на компромисс (в рамках коалиции).

Если равновесия Нэша обоснованы эгоизмом игроков, оптимальные по Парето ситуации — коллективизмом, а коалиционные равновесия обобщают их на случай коалиционной игры, то равновесия Берже [7] обоснованы взаимным альтруизмом игроков. Ситуация x^* называется равновесием по Берже в игре $G=\langle X_i, R_i; i\in N\rangle$, если $x^* R_i (x_i^*, y_{N\setminus i})\ \forall\, y_{N\setminus i}\in X_{N\setminus i}$, $i\in N$, т.е. в равновесии по Берже дополняющая коалиция $N\setminus\{i\}$ каждого игрока $i\in N$ выбирает наиболее предпочтительные для него стратегии (один — за всех, все — за одного). Множество равновесий по Берже игры G обозначим $BE(G)$.

Пусть $R_i^{NE(N\setminus i)}$ — отношение NE-предпочтения дополняющей коалиции $N\setminus\{i\}$ игрока $i\in N$, порожденное отношением R_i ($xR_i^{NE(N\setminus i)}y$, если $xR_i y\neq x_i\neq y_i$). Очевидно, что равновесие по Берже x^* представляет собой максимальный элемент отношения $R_i^{NE(N\setminus i)}$. В случае отсутствия максимального элемента целесообразно искать мажоранту. В частности, это может быть тогда, когда отношения предпочтения игроков порождены векторными функциями выигрыша игроков.

Пусть $S_i^{NE\,(N\setminus i)} = R_i^{NE\,(N\setminus i)} \setminus (R_i^{NE\,(N\setminus i)})^{-1}$ — отношение NE-доминирования дополняющей коалиции $N\setminus\{i\}$ игрока $i\in N$, порожденное отношением $R_i^{NE}\,(N\setminus i)$. На основании теоремы 1 очевидна его связь с отношением доминирования S_i игрока $i\in N$, $xS_i^{NE}\,(N\setminus i)\,y \Leftrightarrow (xS_i\,y)\vee(x_i=y_i)$.

Назовем ситуацию x^* мажорантным равновесием по Берже, если $y\overline{S_i^{NE\,(N\setminus i)}}x^*\quad\forall\, y\in X,\ \forall\, i\in N$ (их множество обозначим $MBE\,(G)$). Очевидно, $BE\,(G)\subseteq MBE\,(G)$. Если использовать отношение доминирования S_i игрока $i\in N$, нетрудно заметить, что

$$x^*\in MBE \Leftrightarrow (x_i^*,\, y_{N\setminus i})\bar{S}_i\, x^*\quad \forall\, y_{N\setminus i}\in X_{N\setminus i},\quad i\in N. \tag{2}$$

В терминах характеристической функции множество мажорантных равновесий по Берже определяется как

$$MBE\,(G)=\{x\in X\,|\, s_i\,((x_i^*,\, y_{N\setminus i}),\, x^*)=0\quad\forall\, y_{N\setminus i}\in X_{N\setminus i},\quad i\in N\}.$$

Рассмотренные принципы оптимальности отличаются как уровнем толерантности игроков, так и уровнем агрегации стратегий. В равновесиях Нэша толерантность игроков минимальна, поскольку каждый учитывает лишь собственные интересы и индивидуально выбирает свои стратегии. В коалиционных равновесиях толерантность игроков увеличивается, поскольку каждый учитывает интересы членов своей коалиции и стратегии выбирает вся коалиция кооперативно. В Парето-оптимальных ситуациях толерантность игроков максимальна, так как каждый учитывает интересы всех, но и стратегии игроки выбирают коллективно. В равновесиях по Берже толерантность игроков перерастает во взаимный альтруизм, стратегии кооперативно выбирает дополнительная коалиция каждого игрока.

В данной работе развивается принцип индивидуальной оптимальности [1], согласно которому каждый игрок выбирает свои стратегии индивидуально, но учитывает при этом предпочтения всех других игроков. Для его формализации в игре G агрегируем отношения доминирования S_i игроков $i\in N$ в отношение доминирования всего их сообщества $S_N=\bigcap_{j\in N} S_j$. Пусть $S_N^{NE\,(\{i\})}$ — отношение NE-доминирования игрока $i\in N$, порожденное агрегированным отношением доминирования S_N. Очевидно,

$$xS_N^{NE\,(\{i\})}\,y \Leftrightarrow (xS_N\,y)\vee(x_{N\setminus i}=y_{N\setminus i})\Leftrightarrow (x\,(\bigcap_{j\in N}S_j)\,y)\vee$$

$$\vee\,(x_{N\setminus i}=y_{N\setminus i})\Leftrightarrow (x_i,\, y_{N\setminus i})(\bigcap_{j\in N}S_j)\,y.$$

Ситуацию x^* назовем индивидуально-оптимальным равновесием (их множество обозначим $IOE\,(G)$), если $y\overline{S_N^{NE\,(\{i\})}}\;x\ \forall\, y\in X,\ \forall\, i\in N$. Очевидно, $x\in IOE\,(G)\Leftrightarrow (y_i,\, x_{N\setminus i}^*)\overline{(\bigcap_{j\in N}S_j)}x^*\ \forall\, y_i\in X_i,\ \forall\, i\in N$, а в терминах характеристических функций $x\in IOE\,(G)\Leftrightarrow \min\limits_{j\in N} s_j\,((y_i,\, x_{N\setminus i}^*),\, x^*)=0\ \forall\, y_i\in X_i,\ \forall\, i\in N$.

Применение индивидуально-оптимальных равновесий мотивируется следующим сценарием игры. Каждый игрок решает, что он потенциально готов учитывать интересы остальных при выборе своих стратегий. Игроки составляют необязательное соглашение (игроки прислушиваются к научно обоснованным рекомендациям компетентных лиц) о том, что они будут придерживаться ситуации $x^*=(x_i^*)_{i\in N}$. Затем игроки независимо один от другого принимают решение о выборе своих стратегий. В том, и только том случае, если основой соглашения будет индивидуально-оптимальное равновесие, каждому игроку $i \in N$ отдельно будет невыгодно выбирать стратегию $y_i \in X_i$, отличную от x_i^*. Это объясняется тем, что его личные интересы и интересы других игроков, которые он учитывает, не улучшатся. Залогом стабильности такого соглашения может быть как лояльность каждого игрока по отношению к другим, так и личная экономическая выгода. Например, если игроки — это фирмы A и B на финансовом рынке, то приобретение акций фирмы A фирмой B означает учет фирмой B интересов фирмы A, приносящий соответствующую экономическую выгоду.

Рассмотрим свойства индивидуально-оптимальных равновесий.

Теорема 2. Справедливо следующее отношение:

$$IOE(G) \subset \{NE(G), MNE(G), KNE_Q(G), PO(G), BE(G), MBE(G)\}.$$

Доказательство. Пусть $Q = \{N(k)\}_{k \in K}$ — некоторое разбиение множества игроков на коалиции $N(k) \subseteq N$, $k \in K$: $N(i) \cap N(j) = \varnothing$, $i \neq j$; $\bigcup_{k \in K} N(k) = N$.

Докажем включение $KNE_Q(G) \subseteq IOE(G)$. Пусть $x^* \in KNE_Q(G)$. Предположим противное, что $x^* \notin IOE(G)$. Тогда $\exists\, i \in N$, $\exists\, y_i \in X_i$: $(y_i, x^*_{N \setminus i})(\bigcap_{j \in N} S_j)x^*$.

Выберем коалицию $N(k)$, к которой принадлежит i-й игрок. Обозначим $y_{N(k)} = (y_i, x^*_{N(k)\setminus})$. Отсюда следует

$$(y_{N(k)}, x^*_{N \setminus N(k)})(\bigcap_{j \in N} S_i)x^* \to (y_{N(k)}, x^*_{N \setminus N(k)})(\bigcap_{l \in K} S_{N(l)})x^* \to$$

$$\to (y_{N(k)}, x^*_{N \setminus N(k)})S_{N(k)}x^*.$$

Согласно (1) получим $x^* \notin KNE_Q(G)$, что противоречит начальной посылке. Поскольку $KNE_Q(G) = MNE(G)$, когда каждый игрок представляет собой отдельную коалицию $N(i) = \{i\}$, $i \in N$, и $NE(G) \subseteq MNE(G)$, то $NE(G) \subseteq MNE(G) \subseteq IOE(G)$. Если коалиция одна и включает в себя всех игроков, т.е. $|K| = 1$; $N(k) = N$, $k \in K$, то $KNE_Q(G) = PO(G)$ и поэтому $PO(G) \subseteq IOE(G)$.

Пусть $x^* \in MBE(G)$. Тогда согласно (2) $(x_j^*, y_{N \setminus j})\bar{S}_j\, x^*$ $\forall\, y_{N \setminus j} \in X_{N \setminus j}$, $\#\, j \in N$. Предположим противное: $x^* \notin IOE(G)$. Тогда $\exists\, i \in N$, $\exists\, y_i \in X_i$: $(y_i, x^*_{N \setminus i})(\bigcap_{l \in N} S_l)x^*$. Для $j \in N$, $j \neq i$, выберем $y_{N \setminus j} = (y_i, x^*_{N \setminus \{i, j\}})$. Отсюда $(x_j^*, y_{N \setminus j})(\bigcap_{l \in N} S_l)x^* \to (x_j^*, y_{N \setminus j})S_j x^*$, что противоречит начальной посылке. Таким образом, $MBE(G) \subseteq IOE(G)$. Отношение $BE(G) \subseteq MBE(G)$ следует из определений.

Теорема доказана.

На основании известных результатов о существовании мажорант [8] и поскольку $IOE(G) \subset PO(G)$, справедливо приведенное далее следствие.

Следствие. Пусть множество ситуаций X игры G принадлежит некоторому компактному топологическому пространству. Если отношение доминирования S_i каждого игрока $i \in N$ полуоткрыто снизу (нижнее сечение $\{y \in X \mid xS_i\ y\}$ — открытое множество) и на любом конечном подмножестве $T \subseteq X$ транзитивное замыкание S_i (пересечение всех транзитивных отношений, содержащих S_i) является строгим частичным порядком (антирефлексивно и транзитивно), то $IOE(G) \neq \varnothing$.

Используем характеристические функции отношений доминирования игроков для параметризации множества индивидуально-оптимальных равновесий.

Теорема 3. Если ситуация $x^* \in IOE(G)$, то всегда существуют такие векторы параметров $\mu_i \in M_i = \left\{ \mu_i = (\mu_i^j)_{j \in N} \,\middle|\, \sum_{j \in N} \mu_i^j = 1; \mu_i^j \geq 0, j \in N \right\}$, $i \in N$, в частности с компонентами $\mu_i^j = \overline{\mu}_i^j = 1/n$, $j \in N$, что справедливы следующие неравенства:

$$\min_{j \in N} (1 + s_j((y_i, x^*_{N \setminus i}), x^*) - \mu_i^j) \leq \min_{j \in N} (1 - \mu_i^j) \quad \forall\, y_i \in X_i, \forall\, i \in N. \qquad (3)$$

Любое решение системы неравенств (3) при заданных $\mu_i \in M_i$, $i \in N$, является индивидуально-оптимальным равновесием.

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть x^* удовлетворяет (3) при некоторых значениях $\mu_i \in M_i$, $i \in N$. Отсюда следует, что $\forall\, i \in N$, $\forall y_i \in X_i$ существует $j \in N$ такое, что $1 + s_j((y_i, x^*_{N \setminus i}), x^*) - \mu_i^j \leq 1 - \mu_i^j$, т.е. $s_j((y_i, x^*_{N \setminus i}), x^*) = 0$. Следовательно, $\min_{j \in N} s_j((y_i, x^*_{N \setminus i}), x^*) = 0$, а поэтому $s_N((y_i, x^*_{N \setminus i}), x^*) = 0$ $\forall\, y_i \in X_i$, $\forall\, i \in N$. Таким образом, $y\overline{S_N^{NE}(i)}x^*$ $\forall\, y \in X$, $\forall\, i \in N$ и $x^* \in IOE(G)$.

Докажем необходимость. Для этого возьмем векторы $\overline{\mu}_i = (\overline{\mu}_i^j)_{j \in N}$, $i \in N$, с компонентами $\overline{\mu}_i^j = 1/n$, $i, j \in N$. Несложно убедиться, что $\overline{\mu}_i \in M_i$, $i \in N$. Из того, что $x^* \in IOE(G)$, следует $y\overline{S_N^{NE}(i)}x^*$ $\forall\, y \in X$, $\forall\, i \in N$, т.е. $\forall\, i \in N$, $\forall\, y_i \in X_i$, $\exists\, j \in N$: $s_j((y_i, x^*_{N \setminus i}), x^*) = 0$, а значит, $1 + s_j((y_i, x^*_{N \setminus i}), x^*) - \overline{\mu}_i^j = 1 - \overline{\mu}_i^j$. Поскольку $\forall\, i \in N$ значение $1 - \overline{\mu}_i^j = (n-1)/n$ $\forall\, j \in N$, то $\forall\, y_i \in X_i$ справедливо

$$\min_{j \in N} (1 + s_j(y_i, x^*_{N \setminus i}) - \overline{\mu}_i^j) \leq (n-1)/n = \min_{j \in N} (1 - \overline{\mu}_i^j).$$

Теорема доказана.

Параметры $\mu_i \in M_i$ позволяют игроку $i \in N$ выразить свое предпочтение на множестве отношений доминирования S_j, $j \in N$, всех игроков. Так, например, если он считает, что для него наиболее важны интересы игрока $j_0 \in N$, то ему следует выбрать $\mu_i^{j_0} = 1$, $\mu_i^j = 0$, $j \in N$, $j \neq j_0$. Варьируя параметрами $\mu_i \in M_i$, $i \in N$, можно находить те или иные индивидуально-оптимальные равновесия, решая неравенства (3). В то же время каждое индивидуально-оптимальное равновесие характеризуется некоторым множеством параметров $\mu_i \in M_i$, $i \in N$, и соответственно предпочтениями на множестве отношений доминирования всех игроков.

Таким образом, теорема 3 дает возможность представить множество индивидуально-оптимальных равновесий $IOE(G)$ (и соответственно множества $MNE(G)$, $KNE_Q(G)$, $PO(G)$, $MBE(G)$) как решения системы неравенств (3) при различных значениях параметров.

Исследуем связь между значениями параметров и свойствами решений системы неравенств (3).

Теорема 4. Пусть $Q = \{N(k)\}_{k \in K}$ — некоторое разбиение множества игроков N на непересекающиеся коалиции. Для $x^* \in KNE_Q(G)$ необходимо, чтобы ситуация x^* удовлетворяла неравенствам (3) со значениями параметров:

$\overline{\mu}_i^j = 1/|N(k)|, \quad j \in N(k); \quad \overline{\mu}_i^j = 0, \quad j \in N \setminus N(k), \quad i \in N(k), \quad \forall\, k \in K.$

Доказательство. Пусть $x^* \in KNE_Q(G)$. Отсюда следует, что $\forall\, k \in K$, $\forall\, y_{N(k)} \in X_{N(k)}$ выполняется равенство $\min\limits_{j \in N(k)} s_j((y_{N(k)}, x^*_{N \setminus N(k)}), x^*) = 0$, т.е. $\forall\, y_{N(k)} \in X_{N(k)}$ существует $j \in N(k)$ такое, что $s_j((y_{N(k)}, x^*_{N \setminus N(k)}), x^*) = 0$. В частности, $\forall\, i \in N$ и $\forall\, y_i \in X_i$ существует $j \in N(k)$ такое, что $s_j((y_i, x^*_{N \setminus i}), x^*) = 0$, откуда следует $1 + s_j((y_i, x^*_{N \setminus i}), x^*) - \overline{\mu}_i^j = 1 - \overline{\mu}_i^j$.

Поскольку $\forall\, i \in N(k)$ значение $1 - \overline{\mu}_i^j = (|N(k)| - 1)/|N(k)|\ \forall\, j \in N(k)$, то $\min\limits_{j \in N(k)} (1 + s_j(y_i, x^*_{N \setminus i}) - \overline{\mu}_i^j) \le (|N(k)| - 1)/|N(k)| = \min\limits_{j \in N(k)} (1 - \overline{\mu}_i^j) \quad \forall\, y_i \in X_i$. Оценим полученные неравенства снизу. Так как при расширении области определения минимум функции не возрастает, справедливы неравенства:

$$\min_{j \in N} (1 + s_j((y_i, x^*_{N \setminus i}), x^*) - \overline{\mu}_i^j) \le \min_{j \in N(k)} (1 + s_j((y_i, x^*_{N \setminus i}), x^*) - \overline{\mu}_i^j) \ \ \forall y_i \in X_i.$$

Таким образом, $\min\limits_{j \in N} (1 + s_j((y_i, x^*_{N \setminus}), x^*) - \overline{\mu}_i^j) \le \min\limits_{j \in N(k)} (1 - \overline{\mu}_i^j)$ $\forall\, y_i \in X_i$, $\forall\, i \in N(k)$, $\forall\, k \in K$, откуда следует (3), поскольку $\overline{\mu}_i^j = 0$, $j \in N \setminus N(k)$, $i \in N(k)$ $\forall\, k \in K$.

Теорема доказана.

Особую роль играют параметры μ_i^i, которые характеризуют предпочтение игрока $i \in N$ собственных интересов (отношения доминирования). Предположим, что множества $MNE(G)$, $KNE_Q(G)$, $PO(G)$, $MBE(G)$ — непустые.

Для индивидуально-оптимального равновесия $\overline{x}$ обозначим $M_i(\overline{x})$ множество значений вектора параметров $\mu_i \in M_i$, при котором $\overline{x}$ удовлетворяет системе неравенств (3). Отметим, что из теоремы 4 следует $M_i(\overline{x}) \ne \varnothing$, $i \in N$. Тогда, если $\overline{x} \in MNE(G)$, равновесие стабильно для n игроков; $\exists\, \overline{\mu}_i = (\overline{\mu}_i^j)_{j \in N} \in M_i(\overline{x})$; $\overline{\mu}_i^i = 1$; $\overline{\mu}_i^j = 0$, $j \in N \setminus \{i\}$, $i \in N$, поэтому $\sum\limits_{i \in N} \overline{\mu}_i^i = n$. Если $\overline{x} \in KNE_Q(G)$, то равновесие стабильно для $|K|$ коалиций, $\exists\, \overline{\mu}_i = (\overline{\mu}_i^j)_{j \in N} \in M_i(\overline{x})$; $\overline{\mu}_i^j = 1/|N(k)|$, $j \in N(k)$; $\overline{\mu}_i^j = 0$, $j \in N \setminus N(k)$, $i \in N(k)$ $\forall\, k \in K$, поэтому $\sum\limits_{i \in N} \overline{\mu}_i^i = |K|$. В случае, когда $\overline{x} \in PO(G)$, равновесие стабильно для одного агента игры, которым является все множество игроков, $\exists\, \overline{\mu}_i = (\overline{\mu}_i^j)_{j \in N} \in M_i(\overline{x})$: $\sum\limits_{i \in N} \overline{\mu}_i^i = 1$. Равновесие Берже $\overline{x} \in MBE(G)$ нестабильно для всех игроков, $\exists\, \overline{\mu}_i = (\overline{\mu}_i^j)_{j \in N} \in M_i(\overline{x})$: $\sum\limits_{i \in N} \overline{\mu}_i^i = 0$. Иные индивидуально-оптимальные равновесия имеют промежуточные значения величины $\sum\limits_{i \in N} \overline{\mu}_i^i$ на интервале $(0, n)$ в зависимости от толерантности игроков.

На основании приведенных выводов можно выдвинуть предположение, что предпочтение каждого игрока собственных интересов характеризует стабильность индивидуально-оптимального равновесия, которая оценивается величиной $\sum\limits_{i \in N} \overline{\mu}_i^i$.

Поскольку индивидуально-оптимальное равновесие может быть одновременно равновесием Нэша, коалиционным равновесием, оптимальной по Парето ситуацией, равновесием Берже и т.д., то важны как максимальная, так и минимальная оценки его стабильности. Максимальный уровень стабильности индивидуально-оптимального равновесия представляет собой агрегированную характеристику того, насколько бескомпромиссными могут быть игроки в ситуации равновесия. В то же время минимальный уровень стабильности — агрегированная характеристика толерантности игроков, необходимой для удержания равновесия.

Для нахождения максимального (минимального) уровня стабильности индивидуально-оптимального равновесия x сформулируем оптимизационную задачу относительно μ_i^j, $i, j \in N$, в которой ситуация x является параметром:

$$\hat{\mu}^{\max}(x) = \max \sum_{i \in N} \mu_i^i \left(\hat{\mu}^{\min}(x) = \min \sum_{i \in N} \mu_i^i \right),$$

$$\min_{j \in N} (1 + s_j((y_i, x_{N \setminus i}), x) - \mu_i^j) \le \min_{j \in N} (1 - \mu_i^j) \quad \forall y_i \in X_i, \quad \forall\, i \in N, \tag{4}$$

$$\mu_i^j \ge 0, \quad i, j \in N; \quad \sum_{j \in N} \mu_i^j = 1, \quad i \in N. \tag{5}$$

Функцию $\hat{\mu}^{\max} : IOE(G) \to [0, n]$ $(\hat{\mu}^{\min} : IOE(G) \to [0, n])$ назовем критерием максимальной (минимальной) стабильности индивидуально-оптимального равновесия x игры G. Ограничения (4), (5) описывают согласно теореме 1 условия индивидуальной оптимальности ситуации $x \in X$.

Принцип индивидуальной оптимальности обобщает классические принципы оптимальности в некооперативных играх и расширяет класс конфликтно-разрешимых игр. Его применение обосновано по крайней мере в двух случаях. Во-первых, если конфликт между игроками не разрешится с помощью классических принципов оптимальности; тогда индивидуально-оптимальные равновесия представляют собой определенный компромисс каждого игрока с другими, который невыгодно нарушать ни одному из игроков. Во-вторых, если способ решения конфликта между игроками определяется на основе общей модели равновесий, построенной по принципу индивидуальной оптимальности; тогда наряду с известными критериями выбора равновесий (доминирование по выигрышу, доминирование по риску [5]) может быть применен критерий стабильности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мащенко С.О. Исследование стабильности равновесий на основе принципа индивидуальной оптимальности // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 4. — С. 162–169.
2. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Наука, 1982. — 255 с.
3. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. — М.: Мир, 1985. — 200 с.
4. Мащенко С.О. Рџвновага за Нешем у багатокритерџальнџй грџ // Вџсн. КиВв. ун-ту. Сер. фџз.-мат. науки. — 2001. — **3**. — С. 214–222.
5. Харшаньи Дж., Зельтен Р. Общая теория выбора равновесия в играх. — С.-П.: Эконом. шк., 2001. — 424 с.
6. Вилкас Э.Й. Оптимальность в играх и решениях. — М.: Наука, 1990. — 256 с.
7. Жуковский В.И., Чикрий А.А. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. — Киев: Наук. думка, 1994. — 320 с.
8. Наумов Г.Е. Существование оптимального выбора на компактном множестве альтернатив // Автоматика и телемеханика. — 1985. — № 3. — С. 5–27.

Поступила 07.05.2008