УДК 519.21

Н.Ю. КУЗНЕЦОВ

ОЦЕНКА КОЛИЧЕСТВА ЛАТИНСКИХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ МЕТОДОМ УСКОРЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Ключевые слова: *латинский прямоугольник, латинский квадрат, трансверсаль, метод ускоренного моделирования, несмещенная оценка, выборочная дисперсия, относительная погрешность*.

Латинским прямоугольником называется прямоугольная матрица размера $n\times m$, $m\le n$, каждый столбец которой является перестановкой (без повторений) элементов множества $S=\{a_1,\dots,a_n\}$, причем в каждой строке элементы не повторяются. Если $m=n$, то получим квадратную матрицу порядка $n\times n$, каждая строка и каждый столбец которой являются перестановкой элементов множества S. Квадратная матрица, обладающая указанным свойством, называется латинским квадратом. Термин «латинский» восходит еще к Эйлеру, который в качестве элементов множества S использовал буквы латинского алфавита. В настоящее время в качестве S принято использовать множество $S=\{1,\dots,n\}$.

Проблема перечисления всех латинских прямоугольников является *NP*-полной и в общем случае не решена. Задача определения, может ли частично заполненный квадрат быть дополненным до латинского квадрата, также является *NP*-полной [1]. Явные аналитические формулы для определения количества латинских прямоугольников известны лишь для $m=2$ (задача о числе беспорядков) и $m=3$ (задача о числе размещений n супружеских пар за круглым столом с условием, чтобы ни одна из пар не сидела вместе) [2, 3]. Обозначим: $L(n,m)$ — количество латинских прямоугольников размера $n\times m$, $m\le n$; $N(n,m)$ — количество латинских прямоугольников с фиксированным первым столбцом $(1,2,\dots,n)^{\mathrm T}$ (нормализованные прямоугольники); $M(n,m)$ — количество латинских прямоугольников с фиксированным первым столбцом $(1,2,\dots,n)^{\mathrm T}$ и первой строчкой $(1,2,\dots,m)$ (редуцированный прямоугольник или прямоугольник стандартного вида).

Имеют место очевидные соотношения:

$$L(n,m)=n!\,N(n,m)=n!\,A_{n-1}^{m-1}M(n,m)=\frac{n!(n-1)!}{(n-m)!}M(n,m). \tag{1}$$

Проблема нахождения точного количества латинских квадратов требует огромных вычислительных затрат, которые экспоненциально возрастают с ростом n. Использование самой современной вычислительной техники позволило определить $L(n,n)$ лишь для $n\le 11$ [4]. Поэтому основной акцент в исследованиях следует сделать на развитие приближенных методов расчета количества латинских квадратов и латинских прямоугольников.

В настоящей статье предлагается альтернативный подход, основанный на использовании специальных приемов моделирования, позволяющих направленным образом строить латинский прямоугольник, аналитически вычисляя при этом соответствующие нормирующие множители, произведение которых и служит оценкой. При заданных относительной погрешности ε и доверительной вероятности γ строятся оценка $\hat L(n,m,\varepsilon,\gamma)$ и соответствующий доверительный интервал $\hat\Delta(n,m,\varepsilon,\gamma)$. За счет выбора параметров ε и γ удается существенно расширить область значений n и m, для которых при сравнительно небольших затратах времени могут быть построены оценки для $L(n,m)$. Например, соответствующие оценки построены для $L(n,n)$ при $n=20$, $\varepsilon=5\,\%$, $\gamma=0{,}99$ и для $L(n,m)$ при $n=1000$, $m=10$, $\varepsilon=1\,\%$, $\gamma=0{,}99$. Если не требуется столь высокая точность вычислений, то соответствующие оценки могут быть построены для значительно бóльших значений n и m.

Проведено подробное исследование точности предлагаемого метода. Проверяется, попадают ли точные значения $L(n, m)$ в соответствующие доверительные интервалы. Кроме того, исследуется взаимное поведение статистических и асимптотических оценок.

В последнем разделе статьи строится статистическая нижняя оценка максимального количества трансверсалей в латинских квадратах, которая сравнивается с последними результатами в данном направлении [5].

ОЦЕНКА $M(n, m)$ МЕТОДОМ УСКОРЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Основное внимание сосредоточим на оценке $M(n, m)$ (количество редуцированных латинских прямоугольников). Общее количество латинских прямоугольников $L(n, m)$ и количество нормализованных прямоугольников $N(n, m)$ определяются согласно (1). Поскольку первый столбец и первая строчка заполнены, остается заполнить еще $(m-1)(n-1)$ позиций в остальных $m-1$ столбцах, причем в столбце j $(2 \le j \le m)$ могут размещаться лишь символы $\{1, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}$. Предположим, что они расположены случайным образом ($(n-1)!$ вариантов для каждого столбца). Обозначим $P(n, m)$ вероятность построения латинского прямоугольника. Очевидно, что

$$P(n, m) = \frac{M(n, m)}{[(n-1)!]^{m-1}}. \qquad (2)$$

Как отмечалось, не существует аналитических методов нахождения $P(n, m)$ (единственным исключением является случай $m \le 3$). Альтернативный подход основан на использовании метода Монте-Карло, позволяющего строить приближенные оценки для $P(n, m)$. В то же время с ростом n и m $(m \le n)$ вероятность $P(n, m)$ стремительно убывает, что делает метод Монте-Карло практически непригодным для использования даже при весьма умеренных значениях n и m.

В настоящем разделе предлагается метод ускоренного моделирования (вариант метода взвешенного моделирования), позволяющий направленно выбирать позиции, на которых может быть размещен тот или иной символ. Несмещенность оценки достигается за счет подходящего выбора весовых множителей. «Ускорение» происходит благодаря резкому возрастанию количества реализаций, в которых удается построить латинский прямоугольник. При этом соответствующие весовые множители по своему порядку сравнимы с $P(n, m)$. За счет этого существенно уменьшается дисперсия оценки, а следовательно, и количество реализаций, необходимых для достижения требуемой точности оценки. Введем вспомогательные индикаторы

$$\nu_i(k) = \begin{cases} 1, & \text{если символ } k \text{ расположен в строке с номером } i, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\mu_j(k) = \begin{cases} 1, & \text{если символ } k \text{ расположен в столбце с номером } j, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

определяющие расположение символов по строкам и столбцам. Метод ускоренного моделирования сформулируем в виде алгоритма построения оценки $\hat{P}_1(n, m)$ в одной реализации для $P(n, m)$.

1. Полагаем $q = 1$ (начальное значение нормирующего множителя) и задаем начальное состояние заполняемой матрицы $A = (a_{ij})_{i=1,\, j=1}^{n,\, m}$:

$$a_{ij} = \begin{cases} i, & \text{если } j = 1, \\ j, & \text{если } i = 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В последующих шагах 2–8 алгоритма размещаем символы множества $C = \{2, \ldots, n-1\}$. Положим $k = 2$.

2. Задаем начальные значения вспомогательных индикаторов:

$$\nu_i(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, \\ 0 & \text{в противном случае}, \end{cases} \quad \mu_j(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k, \\ 0 & \text{в противном случае}. \end{cases}$$

3. Строим множество $D_k = \{j : 2 \le j \le m, \mu_j(k) = 0\}$ номеров столбцов, в которых должен быть расположен символ k.

4. Для каждого столбца определяем количество позиций, в которых допускается расположение символа k:

$$r_j = \sum_{i : \nu_i(k)=0,\, a_{ij}=0} 1, \; j \in D_k, \; j_0 = \arg \min_{j \in D_k} r_j .$$

5. Если $r_{j_0} = 0$, то в данной реализации латинский прямоугольник не может быть построен. Алгоритм окончен, в качестве оценки выбираем $\hat{P}_1(n, m) = 0$.

6. Пусть $r_{j_0} > 0$. Обозначим l_{j_0} количество свободных позиций в столбце j_0, т.е.

$$l_{j_0} = \sum_{i : a_{ij_0}=0} 1.$$

Положим $q := q \dfrac{r_{j_0}}{l_{j_0}}$ (здесь и в дальнейшем символ «$:=$» указывает, что новое значение некоторой величины вычисляется как соответствующая функция ее старого значения).

7. Равновероятным образом выбираем одну из r_{j_0} строчек, в которых может быть размещен символ k. Пусть это будет строчка i_0.

8. Полагаем $a_{i_0 j_0} = k$, $\nu_{i_0}(k) = 1$, $\mu_{j_0}(k) = 1$ и строим множество $D_k = \{j : 2 \le j \le m, \mu_j(k) = 0\}$. Если $D_k \ne \varnothing$, то переходим на шаг 4 алгоритма. Если $D_k = \varnothing$ и $k < n-1$, то полагаем $k := k + 1$ и переходим на шаг 2 алгоритма. В случае $D_k = \varnothing$ и $k = n-1$ переходим на шаг 9.

9. В прямоугольной матрице A размещены все символы множества $C = \{2, \ldots, n-1\}$. На оставшихся свободных позициях осталось разместить символы 1 и n. Если в строчке n имеются хотя бы две свободные позиции или в одной из строчек $2, \ldots, n-1$ существуют три незанятые позиции, то латинский прямоугольник построен быть не может. В этом случае алгоритм окончен, в качестве оценки выбираем $\hat{P}_1(n, m) = 0$. Если указанное условие не выполнено, то латинский прямоугольник может быть построен. При этом матрица A имеет следующую структуру. Если $m = n$, то каждая строчка i $(2 \le i \le n-1)$ и каждый столбец j $(2 \le j \le n-1)$ содержат по две свободных позиции, в то время как строчка n и столбец n — по одной свободной позиции. Если $m < n$, то все столбцы (кроме первого) содержат по две свободных позиции, а каждая строчка i $(2 \le i \le n-1)$ — не более двух свободных позиций. Последняя строчка содержит не более одной свободной позиции.

10. Учитывая количество незаполненных позиций в каждом столбце, полагаем

$$q := \begin{cases} q \dfrac{1}{2^{n-2}}, & \text{если } m = n, \\ q \dfrac{1}{2^{m-1}}, & \text{если } m < n. \end{cases}$$

11. Если в строчке n есть свободная позиция, то размещаем на ней символ 1, затем символ n в соответствующем столбце, затем символ 1 в строчке и т.д. Такой

циклический алгоритм позволяет иногда заполнить все свободные позиции матрицы (латинский прямоугольник построен). В этом случае в качестве оценки выбираем $\hat{P}_1(n,m)=q$.

12. Предположим, что в строчке n не было свободных позиций или указанный циклический алгоритм позволил лишь частично заполнить матрицу. В этом случае выберем произвольную строчку, содержащую хотя бы одну свободную позицию. На этой позиции с вероятностью 0,5 разместим символ 1 либо символ n. Далее заполняем матрицу циклическим образом (см. шаг 11). При этом полагаем $q:=2q$. Указанная процедура повторяется до тех пор, пока не будут заполнены все позиции матрицы A. В качестве оценки выбираем $\hat{P}_1(n,m)=q$.

Замечания. 1. Несмещенность оценки $\hat{P}_1(n,m)$ очевидным образом сохраняется за счет направленного моделирования позиций, на которых могут быть размещены соответствующие символы, а также подходящего выбора нормирующих множителей.

2. Для упрощения изложения в алгоритме опущен важный этап, позволяющий существенно увеличить процент реализаций, в которых удается построить латинский прямоугольник. Анализируя причины, препятствующие построению латинского прямоугольника, отметим, что наибольшую сложность вызывает размещение символов в нескольких последних столбцах (например, в случае латинского квадрата в последнем столбце для размещения остается лишь одна позиция, которая уже может быть занятой). Дополнительный этап позволяет найти все допустимые варианты размещения символа в четырех последних столбцах и выбрать один из них.

3. При заданных относительной погрешности ε и доверительной вероятности γ обычными статистическими методами [6] строятся оценка $\hat{P}(n,m,\varepsilon,\gamma)$ для $P(n,m)$ и доверительный интервал. Согласно (2) и (1) с соответствующей точностью строятся оценки и доверительные интервалы для $M(n,m)$, $N(n,m)$ и $L(n,m)$.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ $L(n,m)$

В данном разделе приведены аналитические и асимптотические формулы [2] для вычисления количества латинских прямоугольников, известные к настоящему времени:

$$L(n,2)=n!D_n, \tag{3}$$

$$L(n,2)\underset{n\to\infty}{\sim} L_{as}(n,2)=(n!)^2 e^{-1}, \tag{4}$$

$$L(n,3)=n!\sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^k D_{n-k} D_k U_{n-2k}, \tag{5}$$

$$\mathrm{L(n,3)}\underset{\mathrm{n}\to\infty}{\sim} \mathrm{L_{as}(n,3)=(n!)^3 e^{-3}}, \tag{6}$$

где

$$\mathrm{D_r}=\mathrm{r}!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{\mathrm{r}}}{\mathrm{r}!}\right],\ \mathrm{r}=2,\ldots,\mathrm{n},\ \mathrm{D}_0=1,\ \mathrm{D}_1=0,$$

$$U_r=r!-2r(r-1)!+\ldots+(-1)^k\frac{2r}{2r-k}C_{2r-k}^k(r-k)!+\ldots+(-1)^r 2,$$

$$r=3,\ldots,n,\ U_0=1,\ U_1=-1,\ U_2=0.$$

Кроме того, в [7] доказано, что при $m^3<n$

$$L(n,m)\sim L_{as}(n,m)=(n!)^m e^{-C_m^2}. \tag{7}$$

Воспользуемся указанными формулами для тестирования точности оценок, получаемых предложенным выше методом ускоренного моделирования.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Введем следующие обозначения:

ε — относительная погрешность оценки;

γ — доверительная вероятность (в дальнейшем во всех расчетах предполагается, что $\gamma = 0{,}99$);

$\hat{L}(n, m, \varepsilon, \gamma)$ — оценка, построенная для $L(n, m)$ с относительной погрешностью ε и доверительной вероятностью γ;

$\hat{S}(n, m, \varepsilon, \gamma)$ — количество реализаций, использованных для построения оценки $\hat{L}(n, m, \varepsilon, \gamma)$;

$\delta_{as}(n, m, \varepsilon, \gamma) = \dfrac{|L_{as}(n, m) - \hat{L}(n, m, \varepsilon, \gamma)|}{\hat{L}(n, m, \varepsilon, \gamma)} \cdot 100\,\%$ — относительное отклонение асимптотической оценки от оценки, полученной ускоренным моделированием;

$\Delta(n, m, \varepsilon, \gamma)$ — доверительный интервал для $L(n, m)$, построенный с относительной погрешностью ε и доверительной вероятностью γ;

$T(n, m, \varepsilon, \gamma)$ — время (в секундах), потраченное на построение оценки $\hat{L}(n, m, \varepsilon, \gamma)$;

$\hat{K}(n, m, \varepsilon, \gamma)$ — оценка относительного количества реализаций, в которых алгоритм строит латинский прямоугольник.

Все приведенные далее вычисления производились на компьютере с процессором Pentium IV, 3.2 GHz.

Проведем сравнение оценок $\hat{L}(n, m, \varepsilon, \gamma)$, построенных с относительной погрешностью $\varepsilon = 1\,\%$, с точными значениями $L(n, m)$ и асимптотическими оценками $L_{as}(n, m)$ для $m = 2$ в табл. 1 (формулы (3), (4)) и $m = 3$ в табл. 2 (формулы (5), (6)) соответственно.

Приведенные численные данные свидетельствуют о высокой точности оценок (все точные значения попадают в однопроцентный доверительный интервал). Отметим, что с возрастанием n убывает количество реализаций (оцениваемое величиной $\hat{S}(n, m, \varepsilon, \gamma)$), требуемых для достижения заданной точности. Это означает, что соответствующим образом убывает и дисперсия оценки. Если при $m = 2$ асимптотическая формула уже при $n = 6$ обеспечивает высокую точность, то при $m = 3$ сходимость к точному значению несколько замедляется.

Таблица 1

n	$L(n, 2)$	$L_{as}(n, 2)$	$\hat{L}(n, 2, \varepsilon, \gamma)$	$\hat{S}(n, 2, \varepsilon, \gamma)$
3	12	13,24	12,00	1
6	$1{,}908 \cdot 10^{5}$	$1{,}907 \cdot 10^{5}$	$1{,}907 \cdot 10^{5}$	6 067
10	$4{,}844 \cdot 10^{12}$	$4{,}844 \cdot 10^{12}$	$4{,}842 \cdot 10^{12}$	5 365
50	$3{,}403 \cdot 10^{128}$	$3{,}403 \cdot 10^{128}$	$3{,}404 \cdot 10^{128}$	2 611
100	$3{,}204 \cdot 10^{315}$	$3{,}204 \cdot 10^{315}$	$3{,}200 \cdot 10^{315}$	1 643
500	$5{,}477 \cdot 10^{2267}$	$5{,}477 \cdot 10^{2267}$	$5{,}487 \cdot 10^{2267}$	425
1 000	$5{,}956 \cdot 10^{5134}$	$5{,}956 \cdot 10^{5134}$	$5{,}965 \cdot 10^{5134}$	349

В табл. 3 для $m = 5$ исследуется точность асимптотической формулы (7). Поскольку точные значения $L(n, 5)$ неизвестны, сравнение ведется с оценками, построенными с однопроцентной относительной погрешностью.

Как и ранее, наблюдается убывание количества реализаций $\hat{S}(n, 5, \varepsilon, \gamma)$ с возрастанием n. Если при $n = 10$ погрешность асимптотической формулы составляет 246 % (с точностью до 1 % погрешности оценки), то с возрастанием n эта погрешность убывает. Лишь при $n \geq 500$ относительная погрешность асимптотической оценки составляет около 1 %.

Таблица 2

n	$L(n,3)$	$L_{as}(n,3)$	$\delta_{as}(n,3,\varepsilon,\gamma)$, %	$\hat{L}(n,3,\varepsilon,\gamma)$	$\hat{S}(n,3,\varepsilon,\gamma)$
3	12	10,75	10,4	12,00	1
6	$1{,}532 \cdot 10^{7}$	$1{,}858 \cdot 10^{7}$	18,6	$1{,}535 \cdot 10^{7}$	18 911
10	$2{,}131 \cdot 10^{18}$	$2{,}379 \cdot 10^{18}$	12,0	$2{,}124 \cdot 10^{18}$	19 128
50	$1{,}372 \cdot 10^{192}$	$1{,}401 \cdot 10^{192}$	1,2	$1{,}384 \cdot 10^{192}$	8 051
100	$4{,}006 \cdot 10^{472}$	$4{,}047 \cdot 10^{472}$	0,50	$4{,}027 \cdot 10^{472}$	5 227
500	$9{,}026 \cdot 10^{3400}$	$9{,}044 \cdot 10^{3400}$	0,54	$9{,}093 \cdot 10^{3400}$	1 567
1 000	$3{,}241 \cdot 10^{7701}$	$3{,}244 \cdot 10^{7701}$	0,37	$3{,}256 \cdot 10^{7701}$	884

Таблица 3

n	$L_{as}(n,5)$	$\hat{L}(n,5,\varepsilon,\gamma)$	$\hat{S}(n,5,\varepsilon,\gamma)$	$\delta_{as}(n,5,\varepsilon,\gamma)$, %
10	$28{,}567 \cdot 10^{27}$	$8{,}253 \cdot 10^{27}$	97 886	246
25	$4{,}076 \cdot 10^{121}$	$2{,}653 \cdot 10^{121}$	57 841	53,6
50	$11{,}815 \cdot 10^{317}$	$9{,}644 \cdot 10^{317}$	34 761	22,5
75	$4{,}267 \cdot 10^{542}$	$3{,}720 \cdot 10^{542}$	25 200	14,7
100	$3{,}214 \cdot 10^{785}$	$2{,}897 \cdot 10^{785}$	20 686	10,9
125	$10{,}738 \cdot 10^{1041}$	$9{,}865 \cdot 10^{1041}$	17 256	8,85
150	$2{,}763 \cdot 10^{1309}$	$2{,}590 \cdot 10^{1309}$	14 687	6,68
200	$1{,}385 \cdot 10^{1870}$	$1{,}312 \cdot 10^{1870}$	11 953	5,56
500	$1{,}228 \cdot 10^{5666}$	$1{,}212 \cdot 10^{5666}$	5 673	1,32
1 000	$4{,}789 \cdot 10^{12833}$	$4{,}734 \cdot 10^{12833}$	3 244	1,16

В работе [7] формула (7) доказана при $m^3 < n$. Возникает естественный вопрос, как будет изменяться точность этой асимптотической формулы при $n = m^3$ с ростом n. Соответствующие оценки ($\varepsilon = 1$ %), построенные вплоть до $m = 10$, приведены в табл. 4.

Таблица 4

m	$L_{as}(m^3, m)$	$\hat{L}(m^3, m, \varepsilon, \gamma)$	$\hat{S}(m^3, m, \varepsilon, \gamma)$	$\delta_{as}(m^3, m, \varepsilon, \gamma)$, %
4	$6{,}425 \cdot 10^{353}$	$6{,}031 \cdot 10^{353}$	15 916	6,53
5	$10{,}738 \cdot 10^{1041}$	$9{,}865 \cdot 10^{1041}$	17 256	8,85
6	$3{,}097 \cdot 10^{2465}$	$2{,}827 \cdot 10^{2465}$	17 778	9,55
7	$1{,}116 \cdot 10^{5047}$	$1{,}007 \cdot 10^{5047}$	17 611	10,8
8	$1{,}478 \cdot 10^{9320}$	$1{,}315 \cdot 10^{9320}$	17 310	12,4
9	$6{,}154 \cdot 10^{15933}$	$5{,}443 \cdot 10^{15933}$	16 881	13,1
10	$3{,}186 \cdot 10^{25656}$	$2{,}819 \cdot 10^{25656}$	16 789	13,0

Численные данные показывают, что при $n = m^3$ количество требуемых реализаций весьма слабо зависит от m. В то же время с ростом m точность асимптотической формулы падает.

В табл. 5 для $n = m$ исследуется точность метода ускоренного моделирования при вычислении количества латинских квадратов вплоть до $n = 20$.

Таблица 5

n	ε, %	$L(n,n)$	$\hat{L}(n,n,\varepsilon,\gamma)$, $\Delta(n,n,\varepsilon,\gamma)$	$\hat{T}(n,n,\varepsilon,\gamma)$, с	$\hat{K}(n,n,\varepsilon,\gamma)$, %
4	1	576	$5{,}747\cdot10^{2}$ $(5{,}689\cdot10^{2},\ 5{,}804\cdot10^{2})$	0,06	100,0
5	1	161 280	$1{,}609\cdot10^{5}$ $(1{,}593\cdot10^{5},\ 1{,}625\cdot10^{5})$	0,14	97,9
6	1	$8{,}129\cdot10^{8}$	$8{,}135\cdot10^{8}$ $(8{,}054\cdot10^{8},\ 8{,}217\cdot10^{8})$	0,41	100,0
7	1	$6{,}148\cdot10^{13}$	$6{,}149\cdot10^{13}$ $(6{,}087\cdot10^{13},\ 6{,}210\cdot10^{13})$	1,2	97,9
8	1	$1{,}088\cdot10^{20}$	$1{,}095\cdot10^{20}$ $(1{,}084\cdot10^{20},\ 1{,}106\cdot10^{20})$	3,8	95,0
9	1	$5{,}525\cdot10^{27}$	$5{,}531\cdot10^{27}$ $(5{,}475\cdot10^{27},\ 5{,}586\cdot10^{27})$	9,8	90,9
10	1	$9{,}982\cdot10^{36}$	$9{,}991\cdot10^{36}$ $(9{,}891\cdot10^{36},\ 10{,}091\cdot10^{36})$	26,5	86,3
11	1	$7{,}770\cdot10^{47}$	$7{,}777\cdot10^{47}$ $(7{,}700\cdot10^{47},\ 7{,}855\cdot10^{47})$	61,4	81,3
12	1	—	$3{,}083\cdot10^{60}$ $(3{,}053\cdot10^{60},\ 3{,}114\cdot10^{60})$	159,3	76,1
13	1	—	$7{,}427\cdot10^{74}$ $(7{,}353\cdot10^{74},\ 7{,}502\cdot10^{74})$	401,3	70,8
14	1	—	$1{,}261\cdot10^{91}$ $(1{,}249\cdot10^{91},\ 1{,}274\cdot10^{91})$	1 080	65,3
15	1	—	$1{,}728\cdot10^{109}$ $(1{,}710\cdot10^{109},\ 1{,}745\cdot10^{109})$	2 845	59,8
16	2	—	$2{,}211\cdot10^{129}$ $(2{,}167\cdot10^{129},\ 2{,}255\cdot10^{129})$	16 262	54,6
17	2	—	$2{,}766\cdot10^{151}$ $(2{,}711\cdot10^{151},\ 2{,}821\cdot10^{151})$	3 113	49,6
18	3	—	$4{,}163\cdot10^{175}$ $(4{,}038\cdot10^{175},\ 4{,}288\cdot10^{175})$	3 618	44,8
19	4	—	$8{,}594\cdot10^{201}$ $(8{,}250\cdot10^{201},\ 8{,}937\cdot10^{201})$	14 271	40,3
20	5	—	$2{,}263\cdot10^{230}$ $(2{,}150\cdot10^{230},\ 2{,}376\cdot10^{230})$	10 448	36,1

Из приведенных результатов видно, что все известные до сих пор значения $L(n,n)$ (вплоть до $n=11$) попадают в построенные однопроцентные доверительные интервалы. Заметим, что для построения оценки при $n=11$ с точностью $\varepsilon=1\,\%$ требуется всего 61 с. Важной характеристикой метода являются значения $\hat{K}(n,n,\varepsilon,\gamma)$. Алгоритм устроен таким образом, что при $n\le 9$ более 90 % реализаций оканчиваются построением латинского квадрата. С ростом n число «успешных» реализаций падает, хотя и при $n=20$ оно является весьма значительным (36 %). Таблица содержит также данные о времени $\hat{T}(n,n,\varepsilon,\gamma)$, затраченном на построение оценки с указанной точностью. Отметим неожиданно большие затраты времени при $n=16$. Это произошло за счет так называемых «выбросов» (большое значение оценки в конкретной реализации). В случае очередного «выброса» резко увеличивается количество реализаций, требуемых для достижения относительной погрешности ε. Процесс вычисления иллюстрирует табл. 6.

Из приведенных данных следует, что было три существенных «выброса». Первый из них произошел между реализациями 400 000 и 500 000. При этом количество требуемых реализаций возросло в 33 раза, но сама оценка увеличилась лишь на 25 %. Последующие два выброса хотя заметно увеличили число требуемых реализаций, однако весьма слабо повлияли на увеличение оценки. Это объясняется сглаживающим эффектом большого количества проведенных реализаций. Окончательная оценка лишь незначительно отличается от оценки, построенной по 100 000 реализаций.

Таблица 6

Количество проведенных реализаций	**Оценка вероятности $\hat{P}(n, m, \varepsilon, \gamma)$**	**Требуемое количество реализаций**
100 000	$1{,}508 \cdot 10^{-78}$	12 113 670
⋮	⋮	⋮
400 000	$1{,}468 \cdot 10^{-78}$	11 409 208
500 000	$1{,}837 \cdot 10^{-78}$	380 007 803
⋮	⋮	⋮
13 500 000	$1{,}445 \cdot 10^{-78}$	29 016 668
13 600 000	$1{,}458 \cdot 10^{-78}$	50 087 023
⋮	⋮	⋮
26 700 000	$1{,}444 \cdot 10^{-78}$	29 205 035
26 800 000	$1{,}451 \cdot 10^{-78}$	39 996 382
⋮	⋮	⋮
33 308 643	$1{,}446 \cdot 10^{-78}$	33 308 642

НИЖНЯЯ ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОГО КОЛИЧЕСТВА ТРАНСВЕРСАЛЕЙ

Большой интерес представляет оценка максимального количества трансверсалей в латинских квадратах. Набор различных символов (перестановка) $(i_1, \ldots, i_n)$ называется трансверсалем, если никакие два элемента этого набора не расположены в одном и том же столбце или одной и той же строчке латинского квадрата. Обозначим: Λ_n — множество всех латинских квадратов размерности $n \times n$; $T(L_n)$ — количество трансверсалей в латинском квадрате $L_n \in \Lambda_n$; $T(n) = \max\limits_{L_n \in \Lambda_n} T(L_n)$.

Нахождение количества трансверсалей тесно связано с исследованием количества «хороших» перестановок, проведенным в [8–12]. В работе [5] построены верхняя и нижняя оценки: если $n \geq 5$, то

$$\mathrm{E}_\mathrm{n}^\mathrm{L} = \mathrm{b}^\mathrm{n} \leq \mathrm{T(n)} \leq \mathrm{c}^\mathrm{n} \sqrt{\mathrm{n}}\, \mathrm{n}\,! = \mathrm{E}_\mathrm{n}^\mathrm{U}, \tag{8}$$

где $b \approx 1{,}719$, $c \approx 0{,}614$.

Сформулированный метод ускоренного моделирования не позволяет строить верхнюю оценку для $T(n)$. В то же время для каждого построенного латинского квадрата можно применить ускоренное моделирование для оценки количества трансверсалей. Таким образом, можно строить нижнюю оценку для $T(n)$, указывая при этом латинский квадрат L_n, на котором этот минимум достигается. В табл. 7 сравниваются верхняя и нижняя оценки (8) с нижней оценкой $\hat{V}_n^L$, построенной ускоренным моделированием (в качестве этой оценки выбирается нижняя граница соответствующего доверительного интервала). В таблице указано также точное значение $T(n)$, известное при $n \leq 9$.

Приведенные численные данные показывают, что при $n \leq 7$ ускоренное моделирование позволяет практически точно оценить максимальное количество трансверсалей. С увеличением n точность ухудшается. В то же время при больших значениях n нижняя оценка $\hat{V}_n^L$ на несколько порядков лучше теоретической оценки E_n^L (в $6{,}8 \cdot 10^5$ раз при $n = 20$).

Т а б л и ц а 7

n	$T(n)$	E_n^L	$\hat{V}_n^L$	E_n^U
4	8	—	8	—
5	15	15,01	15	23,42
6	32	25,80	31,69	94,50
7	133	44,35	131,53	438,69
8	384	76,24	142,11	2 303,64
9	2 241	$1{,}31\cdot10^2$	$2{,}60\cdot10^2$	$1{,}35\cdot10^4$
10	—	$2{,}25\cdot10^2$	$8{,}58\cdot10^2$	$8{,}74\cdot10^4$
11	—	$3{,}87\cdot10^2$	$3{,}43\cdot10^3$	$6{,}19\cdot10^5$
12	—	$6{,}66\cdot10^2$	$1{,}61\cdot10^4$	$4{,}76\cdot10^6$
13	—	$1{,}14\cdot10^3$	$7{,}90\cdot10^4$	$3{,}96\cdot10^7$
14	—	$1{,}97\cdot10^3$	$4{,}20\cdot10^5$	$3{,}53\cdot10^8$
15	—	$3{,}38\cdot10^3$	$2{,}39\cdot10^6$	$3{,}37\cdot10^9$
16	—	$5{,}81\cdot10^3$	$1{,}47\cdot10^7$	$3{,}41\cdot10^{10}$
17	—	$9{,}99\cdot10^3$	$9{,}32\cdot10^7$	$3{,}67\cdot10^{11}$
18	—	$1{,}72\cdot10^4$	$6{,}36\cdot10^8$	$4{,}18\cdot10^{12}$
19	—	$2{,}95\cdot10^4$	$4{,}56\cdot10^9$	$5{,}01\cdot10^{13}$
20	—	$5{,}08\cdot10^4$	$3{,}46\cdot10^{10}$	$6{,}31\cdot10^{14}$

Таким образом, предложенный метод ускоренного моделирования является реальным инструментом, позволяющим при относительно небольших затратах времени с высокой точностью оценивать количество латинских прямоугольников при достаточно больших значениях n и m, а также строить нижнюю оценку максимального количества трансверсалей, существенно лучшую по сравнению с известными до сих пор.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. C o l b o u r n C . The complexity of completing partial Latin squares // Discrete Appl. Math. — 1984. — **8.** — P. 25–30.
2. Р ы б н и к о в К . А . Введение в комбинаторный анализ. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. — 308 с.
3. С а ч к о в В . Н . Введение в комбинаторные методы дискретной математики. — М.: Наука, 1982. — 384 с.
4. http://en.wikipedia.org/wiki/Latin_square.
5. M c K a y B . D . , M c L e o d J . C . , W a n l e s s I . M . The number of transversals in a Latin square // Des. Codes Crypt. — 2006. — **40.** — P. 269–284.
6. Е р м а к о в С . М . Метод Монте-Карло и смежные вопросы. — М.: Наука, 1975. — 471 с.
7. Y a m a m o t o K . On the asymptotic number of Latin rectangles // Jap. J. Math. — 1951. — **21.** — P. 113–119.
8. C o o p e r C . , K o v a l e n k o I . N . An upper bound for the number of complete mappings // Теория вероятностей и мат. статистика. — 1995. — **53.** — С. 69–75.
9. K o v a l e n k o I . N . On an upper bound for the number of complete mappings // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 1. — С. 81–85.
10. Л е в и т с к а я А . А . Одна комбинаторная задача в классе перестановок над кольцом Z_n вычетов по нечетному модулю n // Проблемы управления и информатики. — 1996. — № 5. — С. 99–108.
11. C o o p e r C . , G i l c h r i s t R . , K o v a l e n k o I . N . , N o v a k o v i c D . Deriving the number of «good» permutations, with application to cryptography // Кибернетика и системный анализ. — 1999. — № 5. — С. 10–16.
12. К у з н е ц о в Н . Ю . Оценка количества «хороших» перестановок модифицированным методом ускоренного моделирования // Там же. — 2008. — № 4. — С. 101–109.

Поступила 20.03.2008