СИСТЕМНЫЙ
АНАЛИЗ

И.В. СЕРГИЕНКО, М.В. МИХАЛЕВИЧ, П.И. СТЕЦЮК, Л.Б. КОШЛАЙ

УДК 338.5

МОДЕЛИ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ДЛЯ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ СТРУКТУРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ[1]

Ключевые слова: *межотраслевой баланс, методы недифференцируемой оптимизации, множители Лагранжа, энергосбережение.*

ВВЕДЕНИЕ

Проведение структурных реформ является одной из основных задач, решаемых в процессе рыночной трансформации экономики. Планирование таких реформ связано с серьезными трудностями, поскольку оно требует учета интересов различных социальных групп и слоев, сформировавшихся в переходной экономике и использующих в своих интересах существующую социально-экономическую структуру, и должно опираться на имеющиеся производительные силы. В отличие от ранних стадий переходной экономики, когда выбор направления реформ для большинства постсоциалистических стран был практически безальтернативным, при проведении структурных преобразований в сложившейся ситуации необходимо сделать выбор из большого числа возможных вариантов дальнейшего развития. Многочисленность таких вариантов, многоаспектность их оценивания, существенное влияние риска и неопределенности на возможность реализации принятого плана реформ обусловливают необходимость применения современных информационных технологий поддержки принятия решений. Разработка математических моделей и алгоритмов проведения расчетов на их основе является неотъемлемой частью развития вышеупомянутых технологий. В настоящей статье рассматриваются такие модели и методы для поддержки принятия решений при планировании одной из важнейших составляющих структурных реформ — структурно-технологических преобразований.

Существующая система производственных технологий складывалась на протяжении длительного времени в условиях централизованной экономики. В то время ее функционирование предполагало наличие регулируемых цен, планово-убыточных производств, убытки которых покрывались из госбюджета, и высокого уровня производственных затрат в отдельных отраслях. Такие предпосылки противоречат основам функционирования рыночной экономики и обусловливают широкое применение «мягких бюджетных ограничений» [1], т.е. практики покрытия части затрат отдельных субъектов экономики за счет финансовых ресурсов

[1]Статья написана частично по результатам исследований, проводимых в рамках программы «Энергосбережение».

всего общества. Данная практика тормозит проведение структурных реформ, она порождает коррупцию и «патерналистские» отношения власти и отдельных субъектов хозяйствования, что объективно препятствует прозрачности процессов принятия решений на общегосударственном уровне и ставит под сомнение необходимость дальнейшей демократизации общества. Таким образом, проведение структурно-технологических преобразований с целью устранения вышеупомянутых диспропорций играет важную роль при социальной стабилизации. Главным направлением этих преобразований должно стать сокращение производственных затрат, создающее предпосылки для роста оплаты труда и доходности производства на безинфляционной основе и снижающее в результате этого мотивацию применения «мягких бюджетных ограничений».

Следует также отметить два важных аспекта, связанных с общим уменьшением производственных затрат. Первый из них — необходимость интенсификации энерго- и ресурсосбережения в условиях быстрого роста цен на ресурсы (особенно энергетические) на мировых рынках. В условиях искусственно заниженных цен на топливо и электроэнергию энергоемкость производства в бывшем СССР в 70 – 80-е годы XX столетия в несколько раз превосходила аналогичный показатель в развитых странах с рыночной экономикой. Только радикальное сокращение энергозатрат может компенсировать последствия стремительного роста цен на углеводородное топливо. Существуют два основных пути энергосбережения: 1) непосредственное энергосбережение, когда вследствие внедрения новых технологий, модернизации имеющегося оборудования, отказа от наиболее энергоемких производств и замены их продукции импортом снижаются удельные производственные затраты энергоресурсов; 2) опосредованное энергосбережение, когда общее потребление энергии уменьшается вследствие замены более энергоемкой продукции производственного назначения менее энергоемкими аналогами и уменьшения потребления некоторых энергоемких видов продукции при сохранении (а возможно, и увеличении) общих объемов производства. Возможности опосредованного энергосбережения, как правило, бóльшие, но многочисленность вариантов его реализации требует применения разнообразных, в том числе количественных, методов экономических исследований (включая экономико-математическое моделирование) для поддержки принятия управленческих решений при выборе данного пути.

Вторым важным аспектом, связанным с сокращением производственных затрат, является изменение структуры расходов государственного бюджета. Отказ от практики «мягких бюджетных ограничений» позволит сконцентрировать финансовые ресурсы на решении актуальных социальных проблем. В то же время проведение структурно-технологических преобразований потребует привлечения значительных бюджетных ресурсов. Оценка эффективности их использования также имеет большое значение.

В последнее десятилетие авторами был разработан ряд моделей, предназначенных для определения структурно-технологических преобразований и призванных решать вышеупомянутые задачи. В частности, для определения основных направлений уменьшения производственных расходов в [2, 3] была предложена оптимизационная межотраслевая модель с переменными коэффициентами прямых затрат. Для поиска изменений в структуре экспорта и импорта, уменьшающих общее энергопотребление, разработана рассмотренная в [3, 4] линейная модель, также использующая уравнения межотраслевого баланса. Влияние факторов риска и неопределенности при решении указанных задач исследовалось в работах [3, 5].

Дальнейшее развитие рассмотренных моделей, прежде всего оптимизационной межотраслевой модели [2, 3], позволило создать на их основе прототипные версии информационных технологий поддержки принятия управленческих решений при проведении структурно-технологических преобразований. В данной статье рассматриваются важнейшие, на наш взгляд, аспекты этих технологий — базовая модель и ее модификации, численные методы расчетов и вопросы их реализации на современных вычислительных комплексах, некоторые аспекты имплементации модельных расчетов.

Работа имеет следующую структуру. В разд. 1 содержится краткий обзор результатов по моделированию структурно-технологических изменений [2, 3], рассмотрены некоторые вопросы проведения модельных расчетов и проанализированы свойства оптимизационной межотраслевой модели, которая может быть при этом использована. Альтернативный по отношению к предложенному в [2, 3] подход к проведению расчетов на этой модели изложен в разд. 2. В разд. 3 дано краткое описание программной системы IOMSTC, составляющей основу информационной технологии поддержки принятия управленческих решений. В разд. 4 рассмотрены модификации оптимизационной межотраслевой модели. В заключении статьи сформулированы выводы и направления дальнейших исследований.

1. ОПТИМИЗАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ПЛАНИРОВАНИЯ СТРУКТУРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Для определения структурно-технологических изменений, которые уменьшали бы производственные затраты и позволяли за счет этого увеличить доходы конечных потребителей и повысить динамичность экономики, в [2, 3] была предложена следующая оптимизационная модель.

Рассмотрим экономику, образованную n чистыми отраслями, каждая из которых производит один и только один вид продукции. Пусть i, j — номера этих отраслей ($i, j = \overline{1, n}$). Обозначим a_{ij} величину прямых производственных затрат продукции отрасли i на изготовление единицы продукции отрасли j. Эта величина может быть выражена как в натуральном, так и в стоимостном измерении в зависимости от доступной информации. Матрица $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = \overline{1, n}$, называется матрицей коэффициентов прямых затрат (матрицей технологических коэффициентов, матрицей Леонтьева) [6].

Предположим, что доходы D конечных потребителей пропорциональны объему производства:

$$D = \sum_{i=1}^{n} q_i x_i = (q, x),$$

здесь q_i — доля конечных доходов (оплаты труда, социальных платежей, прибыли) в цене продукции отрасли i, x_i — валовой продукт этой отрасли, $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. В модели также предполагается, что конечный продукт y_i каждой отрасли пропорционален конечным доходам

$$y_i = \alpha_i D + h_i, \quad i = \overline{1, n},$$

где коэффициенты α_i отражают в основном структуру индивидуального потребления и внутренних инвестиций, а h_i определяется, исходя из экспортно-импортного сальдо отраслей и структуры общественного потребления. Пусть $h = (h_1, \ldots, h_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Еще одним предположением модели является линейная зависимость между долей добавленной стоимости $\tilde{q}_i$ в цене продукции отрасли i и долей конечных доходов в цене этой продукции

$$\tilde{q}_i = l_i q_i + d_i, \quad i = \overline{1, n},$$

где l_i — фискальный мультипликатор конечных доходов [7], а d_i — доля других составляющих добавленной стоимости в цене продукции i-й отрасли.

Задача состоит в определении таких структурно-технологических изменений, которые максимизировали бы либо величину конечных доходов, либо величину мультипликатора «прирост доходов–прирост производства», что обеспечит динамичность экономики.

В модели из работ [2, 3] указанные изменения отражаются в виде изменений Δa_{ij} и Δq_i коэффициентов a_{ij} и q_i, которые могут быть как положительными (увеличение соответствующего коэффициента), так и отрицательными (его уменьшение). При этом уменьшение технологических коэффициентов требует затрат некоторых ограниченных ресурсов (финансовых, материальных, интеллектуальных). В изложенной далее модели предполагается линейная зависимость между уменьшением коэффициентов и затратами ресурсов, но в принципе возможно использование и более сложных зависимостей.

С учетом сделанных предположений получаем следующую оптимизационную модель.

Необходимо определить такие Δa_{ij} и Δq_i $(i, j = \overline{1, n})$, которые удовлетворяли бы:

— ограничениям, исключающим усиление инфляции издержек

$$\sum_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{n} \frac{a_{ij} + \Delta a_{ij}}{1-(a_{jj} + \Delta a_{jj}) - (l_j(q_j + \Delta q_j) + d_j)} \le \beta, \quad j = \overline{1, n}, \tag{1}$$

где $0 < \beta < 1$ — некоторый заранее заданный доверительный параметр;

— соотношениям, следующим из физического смысла коэффициентов Δa_{ij} и Δq_j:

$$0 \le q_j + \Delta q_j \le 1, \quad 0 \le a_{ij} + \Delta a_{ij} \le 1, \quad i, j = \overline{1, n}; \tag{2}$$

— балансу затрат и добавленной стоимости

$$a_{jj} + \Delta a_{jj} + l_j(q_j + \Delta q_j) + d_j \le 1, \quad j = \overline{1, n}; \tag{3}$$

— ограничениям на возможные пределы изменений коэффициентов, обусловленных особенностями существующих технологий

$$\underline{\gamma_{ij}} \le \Delta a_{ij} \le \overline{\gamma_{ij}}, \quad i, j = \overline{1, n};$$

$$\underline{q_i} \le \Delta q_i \le \overline{q_i}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{4}$$

где $\underline{\gamma_{ij}}$, $\overline{\gamma_{ij}}$ — нижний и верхний пределы возможного изменения технологических коэффициентов, $\underline{q_i}$ и $\overline{q_i}$ — нижний и верхний пределы возможного изменения доли конечных доходов;

— ресурсным ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{kij} \max(0, -\Delta a_{ij}) \le B_k, \quad k = \overline{1, K}, \tag{5}$$

где K — количество ресурсов, B_k — объем k-го ресурса, выделяемый на проведение структурно-технологических преобразований, b_{kij} — расход этого ресурса при реализации мероприятий, обеспечивающих единичное уменьшение затрат продукции отрасли i на производство единицы продукции отрасли j.

Изменения Δa_{ij} и Δq_i из множества, удовлетворяющего ограничениям (1)–(5), должны выбираться таким образом, чтобы максимизировать конечные доходы потребителей

$$D = f_1(\Delta A, \Delta q) = \frac{(q + \Delta q)^T (E - (A + \Delta A))^{-1} h}{1 - (q + \Delta q)^T (E - (A + \Delta A))^{-1} \alpha} \to \max , \qquad (6)$$

где $\Delta q = (\Delta q_1, \dots, \Delta q_n)$, $\Delta A = \{\Delta a_{ij}\}_{i, j = 1}^{n}$, $h = (h_1, \dots, h_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, E — единичная матрица, T — символ операции транспонирования.

Другой целевой функцией является величина мультипликатора «прирост доходов–прирост производства»

$$f_2(\Delta A, \Delta q) = (q + \Delta q)^T (E - (A + \Delta A))^{-1} \alpha^1 \to \max , \qquad (7)$$

где $\alpha^1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1)$ — вектор структуры конечного внутреннего потребления.

Детальное обоснование ограничений (1)–(5) и целевых функций (6), (7) дано в [2, 3].

Оптимизационная модель может рассматриваться как однокритериальная задача (с одной из функций (6) или (7)) или в многокритериальном варианте (с обеими ранее рассмотренными целевыми функциями). Учитывая важность ограничения потребления отдельных дефицитных импортируемых энергоресурсов (например, природного газа), перечень критериев может быть дополнен величиной их потребления

$$f_3(\Delta A, \Delta q) = g^T (E - (A + \Delta A))^{-1} (\alpha D + h) \to \min, \qquad (8)$$

где $g = (g_1, \dots, g_n)$ — вектор удельных производственных затрат этого ресурса.

Полученная многокритериальная задача может быть решена методом сверток путем максимизации функции

$$F(\Delta A, \Delta q) = \tilde{\beta}_1 f_1(\Delta A, \Delta q) + \tilde{\beta}_2 f_2(\Delta A, \Delta q) - \tilde{\beta}_3 f_3(\Delta A, \Delta q) , \qquad (9)$$

где весовые коэффициенты $\tilde{\beta}_i$, $i = \overline{1, 3}$, могут быть определены методами порядковой регрессии на основе экспертных оценок [3].

Учитывая практически противоположную направленность критериев (6) и (8), целесообразно дополнить ограничения (1)–(5) ограничением на минимальный уровень конечных доходов

$$f_1(\Delta A, \Delta q) \ge \hat{f}_1, \qquad (10)$$

где $\hat{f}_1$ — желательный уровень доходов. Заметим, что задача (1)–(5), (9), (10) не имеет принципиальных отличий от задач (1)–(6) и (1)–(5), (7), поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением двух последних задач.

Решение задач вида (1)–(6) или (1)–(5), (7) связано с рядом трудностей. Во-первых, ввиду невыпуклости функций $f_1(\Delta A, \Delta q)$ и $f_2(\Delta A, \Delta q)$ эти задачи будут многоэкстремальными, несмотря на выпуклость множества решений X, заданного соотношениями (1)–(5). Во-вторых, целевые функции этих задач будут определены не при всех ΔA и Δq. Для того чтобы функция $f_2(\Delta A, \Delta q)$ была определена, матрица $E - (A + \Delta A)$ должна быть неособенной. Для определенности $f_1(\Delta A, \Delta q)$ дополнительно требуется, чтобы выполнялось условие $(q + \Delta q)^T (E - (A + \Delta A))^{-1} \alpha \ne 1$. В-третьих, левые части ограничений (5) будут непрерывными, но не всюду дифференцируемыми выпуклыми функциями, а левые части ограничений (1) будут разрывными. Заметим, что две последние проблемы могут быть решены. Если ограничения (4), (5) не позволяют уменьшить до нуля все $a_{ij} + \Delta a_{ij}$ при некотором j (а такая ситуация является типичной для экономики, поскольку невозможно производить что-либо без материальных затрат), то для всех ΔA и Δq, удовлетворяющих (3), знаменатель левой части (1) будет неотрицательным. Левая часть (1) будет неограниченно возрастать, если этот знаменатель будет близким к нулю; как следствие, данное ограничение не будет выполняться. Таким образом, для допустимых решений и решений из некоторой окрестности X знаменатель левой части (1) будет положительным, и эти ограничения можно переписать в виде

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} (a_{ij} + \Delta a_{ij}) \leq \beta \left(1 - (a_{jj} + \Delta a_{jj}) - (l_j (q_j + \Delta q_j) + d_j)\right), \quad j = \overline{1, n}. \qquad (11)$$

Из (11) следует выполнение для матрицы $(A + \Delta A)$ достаточного условия существования $(E - (A + \Delta A))^{-1}$, известного как условие продуктивности [6]. Аналогично можно показать [2], что для всех решений из X и его некоторой окрестности будет выполняться условие $(q + \Delta q)^T (E - (A + \Delta A))^{-1} \alpha \neq 1$, а функции $f_1(\Delta A, \Delta q)$ и $f_2(\Delta A, \Delta q)$ будут определены для всех допустимых решений задач (1)–(6) и (1)–(5), (7), а также для недопустимых решений, незначительно отличающихся от допустимых. Таким образом, целевые функции указанных задач будут определены и непрерывны на некоторой достаточно малой окрестности X.

Заметим, что ограничение (11), в отличие от (1), будет линейным. Для решения преобразованной таким образом задачи возможно применение известных методов, например метода негладких штрафных функций [8]. При этом задача не будет усложнена ввиду наличия негладких ограничений (5). Поиск экстремума штрафной функции может осуществляться любым из методов недифференцируемой оптимизации; в частности, в [2, 3] для этого использовался r-алгоритм [9]. Выбирая штрафной множитель достаточно большим, можно всегда достичь локализации процесса поиска в достаточно малой окрестности X, где функции $f_1(\Delta A, \Delta q)$ и $f_2(\Delta A, \Delta q)$ непрерывны, а замена ограничения (1) неравенством (11) будет эквивалентной.

При реализации данного подхода возникают проблемы дифференцирования функций $f_1(\Delta A, \Delta q)$ и $f_2(\Delta A, \Delta q)$, использующих операцию обращения матрицы, а также проблема размерности задачи. Общее число переменных равно $n^2 + n$, что является достаточно большим даже при n порядка $20 \Rightarrow .. 40$. Для дифференцирования функций $f_1(\Delta A, \Delta q)$ и $f_2(\Delta A, \Delta q)$ в [2] были предложены формулы, вытекающие из покомпонентного дифференцирования матричной функции $\overline{F}(Y)$, неявно заданной соотношением $\overline{F}(Y)Y = E$, где Y — произвольная матрица размерности $n \times n$.

Размерность решаемой задачи может быть существенно сокращена, если исключить из рассмотрения те позиции (i, j), где $\left|\underline{\gamma_{ij}} - \overline{\gamma_{ij}}\right| < \varepsilon$, ε — достаточно малое число, а также те Δa_{ij} и Δq_i, для которых при любом ΔA, Δq будут выполняться неравенства $\left|\dfrac{\partial f_1(\Delta A, \Delta q)}{\partial \Delta a_{ij}}\right| < \varepsilon$ и $\left|\dfrac{\partial f_1(\Delta A, \Delta q)}{\partial \Delta q_i}\right| < \varepsilon$ для задачи (2)–(6), (11) и неравенства $\left|\dfrac{\partial f_2(\Delta A, \Delta q)}{\partial \Delta a_{ij}}\right| < \varepsilon$ и $\left|\dfrac{\partial f_2(\Delta A, \Delta q)}{\partial \Delta q_i}\right| < \varepsilon$ для задачи (2)–(5), (7), (11). В частности, как показали расчеты, проведенные на основе межотраслевых балансов, составленных в Украине в конце 1990-х — начале 2000-х годов, в случае $n = 18$ можно было ограничиться рассмотрением не более 130 переменных, а для $n = 38$ количество переменных не превышает 250.

Многоэкстремальность решаемой задачи может быть учтена путем проведения независимых расчетов r-алгоритмом из различных начальных точек. В частности, начальные точки могут выбираться путем равномерной разбивки диагонали гиперкуба $\{(\Delta q, \Delta A): \underline{\gamma_{ij}} \le \Delta a_{ij} \le \overline{\gamma_{ij}},\ \underline{q_i} \le \Delta q_i \le \overline{q_i}\}$, соединяющей точки $(\underline{q_1}, \ldots, \underline{q_n}, \underline{\gamma_{11}}, \ldots, \underline{\gamma_{nn}})$ и $(\overline{q_1}, \ldots, \overline{q_n}, \overline{\gamma_{11}}, \ldots, \overline{\gamma_{nn}})$.

Следует отметить, что результаты расчетов, выполненных на основе оптимизационных моделей (1)–(6) и (1)–(5), (7), в условиях переходной экономики не могут иметь директивный характер. С их помощью можно получить желаемую структуру производственных технологий, способствующую интенсификации социально-экономического развития страны, выявить пути преобразования существующей структуры к желаемой, оценить необходимые для этого ресурсы и др. Важную роль играет анализ изменения во времени технологических коэффициентов a_{ij} за ряд последних лет, выявление тенденций приближения (или удаления) реальных значений a_{ij} к желаемым значениям, полученным в результате расчетов по вышеупомянутым моделям. С этой точки зрения получение серии локальных экстремумов функций (6) или (7) со значениями, достаточно близкими к их глобальным максимумам, является более предпочтительным для последующего применения, чем собственно поиск глобального экстремума.

В моделях (1)–(6) и (1)–(5), (7) значения ряда параметров могут определяться неоднозначно. Прежде всего, это параметр β в ограничениях (1), возможные пределы изменения технологических коэффициентов и доли добавленной стоимости в цене продукции в неравенствах (4), отдельные коэффициенты и правые части ресурсных ограничений (5). Поэтому представляет интерес проведение диалоговых расчетов на моделях (1)–(6) и (1)–(5), (7) при различных значениях указанных параметров. При этом целесообразно, чтобы временной интервал между началом и завершением очередной серии расчетов, т.е. между формированием варианта задачи с определенными значениями ее параметров и получением серии ее локально оптимальных решений, не превышал 3–5 минут. Как показали проведенные нами численные эксперименты, время проведения расчетов на компьютере класса Pentium IV по модели (2)–(6), (11) с применением r-алгоритма для одного начального приближения при $n = 38$ колеблется от $0{,}3 - 0{,}4$ минут (при использовании ранее рассмотренных подходов к сокращению размерности задачи) до 1,3–1,5 минут (при проведении расчетов на задаче полной размерности). При выборе 10–15 начальных приближений вышеупомянутые временные ограничения уже могут не выполняться. Выход может быть найден за счет использования современной многопроцессорной техники. Процедура поиска локального экстремума для каждого начального приближения реализуется на отдельном процессоре. Данные о значениях целевой функции в найденных точках передаются на один из процессоров, где отсеиваются решения с недостаточно большими значениями целевых функций, а остальные альтернативы упорядочиваются и подаются лицам, принимающим решение, для дальнейшего анализа. При этом возможно использование и других формальных критериев отсева решений. Количество начальных приближений при достаточно большом числе процессоров может быть увеличено до нескольких десятков или даже сотен, при этом общее время выполнения расчетов практически не будет отличаться от времени поиска одного экстремума на однопроцессорной вычислительной технике, т.е. будет вполне приемлемым для поддержки диалога системы и пользователя. Подходящей вычислительной техникой для выполнения расчетов согласно вышеизложенной схемы являются кластеры СКИТ-2 и СКИТ-3, разработанные в последние годы в Институте кибернетики НАНУ.

При поиске экстремума путем максимизации штрафной функции r-алгоритмом возможно возникновение дополнительных проблем. Как ранее отмечалось, функции $f_1(\Delta A, \Delta q)$ и $f_2(\Delta A, \Delta q)$ определены на множествах допустимых решений задач (1)–(6) и (1)–(5), (7), а также для некоторых окрестностей этих множеств. Тем не менее, при поиске экстремума возможен выход последовательности приближений, построенных с помощью r-алгоритма, за пределы данных окрестностей. В процессе проведенных численных экспериментов это наблюдалось в среднем для 6–7 из 10 начальных приближений. В результате вычислительная процедура обрывается в недопустимой точке, где целевая функция задачи не определена. Чтобы избежать этого, предлагается использовать модификацию r-алгоритма [10], предполагающую вычисление субградиента целевой функции только в допустимых точках, или обобщенный метод центров [11], обладающий теми же свойствами. С этой точки зрения представляет интерес преобразование задач (1)–(6) и (1)–(5), (7) к виду, исключающему использование не всюду определенных функций, что было положено в основу альтернативного подхода к разработке вычислительных алгоритмов, который будет рассмотрен в следующем разделе.

Вышеупомянутые численные эксперименты продемонстрировали еще одну особенность решаемых задач. Из различных начальных приближений была получена серия решений с почти равными значениями целевой функции (отклонения порядка 0,3–1,0% максимального значения в серии), но с существенными различиями нескольких компонент решения. Следующее утверждение в некоторой степени объясняет этот эффект.

Теорема 1. Пусть $(\Delta A^{(1)}, \Delta q^{(1)})$ и $(\Delta A^{(2)}, \Delta q^{(2)})$ — произвольные допустимые решения задачи (1)–(6) или (1)–(5), (7), для которых покомпонентно выполняется равенство

$$(E-(A+\Delta A^{(1)})^T)^{-1}(q+\Delta q^{(1)})=(E-(A+\Delta A^{(2)})^T)^{-1}(q+\Delta q^{(2)}). \qquad (12)$$

Пусть также

$$(\Delta A_\lambda, \Delta q_\lambda)=\lambda(\Delta A^{(1)}, \Delta q^{(1)})+(1-\lambda)(\Delta A^{(2)}, \Delta q^{(2)}),$$

где $0<\lambda<1$ — произвольное число.

Тогда справедливо равенство

$$f_i(\Delta A^{(1)}, \Delta q^{(1)})=f_i(\Delta A_\lambda, \Delta q_\lambda)=f_i(\Delta A^{(2)}, \Delta q^{(2)}), \quad i=\overline{1,2},$$

и $(\Delta A_\lambda, \Delta q_\lambda)$ будет допустимым решением вышеупомянутых задач.

Доказательство данной теоремы основано на справедливости утверждения, которое рассмотрено в следующем разделе и будет приведено после этого утверждения. Остановимся на некоторых выводах из теоремы.

Допустимые точки с одинаковыми значениями целевой функции, принадлежащие множеству, удовлетворяющему (12), образуют структуры, подобные совокупности отрезков прямых. Если крайние точки одного из таких отрезков отличаются лишь несколькими компонентами, то все внутренние точки отрезка также будут различаться между собой только значениями этих компонент. Если речь идет о значениях, близких к глобальному максимуму, результатом работы r-алгоритма для совокупности начальных точек будет одна из таких структур, что и соответствует результатам численных экспериментов.

Отметим, что предложенный подход к решению задач (1)–(6) и (1)–(5), (7) позволяет получить их локальные решения за приемлемое время, однако аналитические возможности при этом будут достаточно ограниченными. Это обусловливает необходимость разработки альтернативного подхода к решению данных задач.

2. АЛЬТЕРНАТИВНЫЙ ПОДХОД К РАЗРАБОТКЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА

Преобразуем задачи (1)–(6) и (1)–(5), (7), введя новые переменные

$$z=(E-(A+\Delta A)^T)^{-1}(q+\Delta q),$$

откуда следует

$$(E-(A+\Delta A)^T)z=q+\Delta q. \qquad (13)$$

Тогда задача максимизации конечных доходов потребителей может быть сформулирована как задача определения таких значений $(\Delta A, \Delta q, z)$, которые максимизировали бы функцию

$$\bar{f}_1(z) = \frac{z^T h}{1 - z^T \alpha} \tag{14}$$

при ограничениях (2)–(5), (11), (13). Задача максимизации мультипликатора «прирост доходов–прирост производства» формулируется как задача максимизации функции

$$\bar{f}_2(z) = z^T \alpha^1 \tag{15}$$

при тех же ограничениях.

Заметим, что целевые функции и ограничения этих задач определены для любых значений $(\Delta A, \Delta q, z)$ (за исключением таких z, что $z^T \alpha = 1$ для задачи с целевой функцией $\bar{f}_1(z)$).

Подобно (2)–(6), (11) и (2)–(5), (7), (11) полученные задачи могут быть решены методом негладких штрафных функций с использованием r-алгоритма. Определенные трудности могут возникнуть в силу наличия ограничений-равенств (13), обусловливающих невыпуклость множества допустимых решений. Поэтому здесь может применяться тот же подход, что и для решения предыдущих задач, — выбор нескольких начальных приближений для r-алгоритма.

Для рассматриваемых задач справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $x^{(1)} = (\Delta A^{(1)}, \Delta q^{(1)}, z^*)$ и $x^{(2)} = (\Delta A^{(2)}, \Delta q^{(2)}, z^*)$ — произвольные допустимые решения задач (2)–(5), (11), (13), (14) и (2)–(5), (11), (13), (15) с одинаковыми значениями переменных $z = z^*$. Пусть также $x(\lambda) = \lambda x^{(1)} + (1-\lambda) x^{(2)}$, где $0 < \lambda < 1$ — произвольное число. Тогда значения функций $\bar{f}_i(z)$, $i = \overline{1, 2}$, будут одинаковыми для решений $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ и $x(\lambda)$, при этом $x(\lambda)$ — допустимое решение при любом $0 < \lambda < 1$.

Доказательство. Покажем, что при любом $0 < \lambda < 1$ точка $x(\lambda)$ будет удовлетворять ограничениям (2)–(5), (11) и (13). Действительно, ограничения (2)–(4), (11) являются линейными неравенствами, а левая часть ограничений (5) будет выпуклой функцией. Поэтому перечисленные ограничения задают выпуклое множество. Если точки $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ принадлежат этому множеству, то и их выпуклая комбинация $x(\lambda)$ также будет принадлежать ему, т.е. она удовлетворяет соотношениям (2)–(5), (11). Далее, в силу допустимости $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ справедливы равенства

$$(E - (A + \Delta A^{(1)})^T) z^* = q + \Delta q^{(1)},$$

$$(E - (A + \Delta A^{(2)})^T) z^* = q + \Delta q^{(2)}.$$

Умножив первое из этих равенств на λ, а второе — на $(1-\lambda)$ и сложив их, получим

$$(E - (A + \lambda \Delta A^{(1)} + (1-\lambda) \Delta A^{(2)})^T) z^* = q + \lambda \Delta q^{(1)} + (1-\lambda) \Delta q^{(2)}. \tag{16}$$

С учетом $z_\lambda = \lambda z^* + (1-\lambda) z^* = z^*$ равенство (16) можно переписать в виде

$$(E - (A + \Delta A_\lambda)^T) z^* = q + \Delta q_\lambda, \tag{17}$$

где $(\Delta A_\lambda, \Delta q_\lambda, z_\lambda)$ — компоненты решения $x(\lambda)$. Согласно (17) точка $x(\lambda)$ удовлетворяет равенствам (13) и является допустимым решением задач (2)–(5), (11), (13), (14) и (2)–(5), (11), (13), (15).

Заметим, что значения переменных z для решения $x(\lambda)$ совпадают со значениями этих переменных для решений $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$. Поскольку целевые функции $\bar{f}_1(z)$ и $\bar{f}_2(z)$ этих задач зависят только от z, их значения в точках $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ и $x(\lambda)$ также совпадут, откуда следует справедливость теоремы.

Доказав теорему 2, вернемся к доказательству теоремы 1.

Заметим, что из допустимости решений $(\Delta A^{(1)}, \Delta q^{(1)})$ и $(\Delta A^{(2)}, \Delta q^{(2)})$ следует существование матриц $(E-(A+\Delta A^{(i)})^T)^{-1}$, $i=\overline{1,2}$. Каждому допустимому решению $(\Delta A^{(i)}, \Delta q^{(i)})$, $i=\overline{1,2}$, задач (1)–(6) или (1)–(5), (7) будет соответствовать единственное допустимое решение $(\Delta A^{(i)}, \Delta q^{(i)}, z^{(i)})$ задач (2)–(5), (11), (13), (14) или (2)–(5), (11), (13), (15), при этом в силу (12) и (13) будет выполняться соотношение $z^{(1)}=z^{(2)}=z^*$.

Матрица $E-(A+\Delta A_\lambda)$ также будет неособенной, и допустимому решению $(\Delta A_\lambda, \Delta q_\lambda)$ задач (1)–(6) или (1)–(5), (7) также соответствует единственное допустимое решение $(\Delta A_\lambda, \Delta q_\lambda, z_\lambda)$ преобразованных задач. Поэтому можно применить теорему 2 для $x^{(1)}=(\Delta A^{(1)}, \Delta q^{(1)}, z^*)$, $x^{(2)}=(\Delta A^{(2)}, \Delta q^{(2)}, z^*)$ и $x(\lambda)=(\Delta A_\lambda, \Delta q_\lambda, z_\lambda)$. Согласно этой теореме $\bar{f}_i(z^*)=\bar{f}_i(z_\lambda)$, $i=\overline{1,2}$. При этом в силу эквивалентности соответствующих задач в их первоначальном и преобразованном виде должно выполняться равенство $f_i(\Delta A^{(i)}, \Delta q^{(i)})=\bar{f}_i(z^*)$, $i=\overline{1,2}$. Отсюда $f_i(\Delta A^{(i)}, \Delta q^{(i)})=f_i(\Delta A_\lambda, \Delta q_\lambda)$, $i=\overline{1,2}$, что доказывает справедливость теоремы.

Согласно теореме 2 множество X_1 значений переменных ΔA и Δq, которые допустимы при заданных значениях z, будет выпуклым. Это упрощает как построение данного множества, так и поиск на нем точек экстремума некоторых дополнительных критериев, например функции $f_3(\Delta A, \Delta q)$, определенной согласно (8).

Реализуя из нескольких начальных точек процедуру субградиентного метода с растяжением пространства, использующего значения целевой функции [8] ($\bar{f}_i(z)$, $i=\overline{1,2}$, известны, если z задано), получим несколько точек вышеупомянутого множества. Их выпуклая линейная комбинация в силу теоремы 2 также будет принадлежать данному множеству. Конструктивные алгоритмы перебора различных точек из X_1 могут быть также построены на основе субградиентных методов, использующих внешнюю аппроксимацию множества экстремумов эллипсоидами, например метода нахождения допустимой точки системы выпуклых неравенств [12], обеспечивающего ускоренную сходимость к граничным точкам множества X_1. При этом аппроксимацию X_1 эллипсоидом, построенную на предыдущем шаге указанного метода, можно использовать для нахождения очередной граничной точки X_1.

Заметим, что компоненты вектора z отражают структуру конечных доходов, получаемых от различных видов экономической деятельности. Такая структура определяет паритет интересов (существующий или желаемый) между различными субъектами хозяйствования. Проведение вариантных расчетов (при различных z) и сравнение полученных значений с решениями задач вида (1)–(6) и (1)–(5), (7) позволит оценить степень влияния частных интересов на эффективность развития экономики и спрогнозировать, будет ли позитивно воспринято субъектами хозяйствования предложенное (глобально оптимальное или близкое к нему) решение или оно встретит сопротивление. Модели (2)–(5), (11), (13), (14) и (2)–(5), (11), (13), (15), рассматриваемые при заданных z, представляют собой модели с фиксированными целями, в которых определены результаты, но требуется построить множество инструментов, т.е. действий, позволяющих достичь этих результатов.

Использование таких моделей играет важную роль как для предварительного анализа ситуации, так и для окончательного отбора ранее полученных решений. С этой точки зрения генерация множества допустимых решений задач (2)–(5), (11), (13), (14) и (2)–(5), (11), (13), (15) со значениями целевых функций, достаточно близкими к глобальному максимуму, и проведение расчетов в диалоговом режиме играет важную роль. При этом могут использоваться многопроцессорная вычислительная техника (кластеры СКИТ-2 и СКИТ-3) и схема распараллеливания вычислений, согласно которой поиск экстремума из каждого начального приближения реализуется на отдельном процессоре.

Преобразовав задачи (2)–(5), (11), (13), (14) и (2)–(5), (11), (13), (15), можно получить достаточно точные оценки значений их целевых функций в точке глобального экстремума. Такая информация является чрезвычайно ценной при отборе полученных решений.

Выполнив замену переменных $\Delta a_{ij} = \Delta a_{ij}^{+} - \Delta a_{ij}^{-}$ и преобразовав целевую функцию (14) в виде $\upsilon(1 - z^T \alpha) = z^T h$, $\bar{f}_1 = \upsilon \to \max$, задачи (2)–(5), (11), (13), (14) и (2)–(5), (11), (13), (15) можно рассматривать как частные случаи задачи поиска максимума линейной функции

$$Q(x) = (c, x) \to \max \tag{18}$$

при квадратичных и линейных ограничениях вида

$$x^T H_1 x + (b_1, x) = q_1, \tag{19}$$

$$x^T H_2 x + (b_2, x) \le q_2, \tag{20}$$

$$x \ge 0, \tag{21}$$

где H_1, H_2 — некоторые квадратные матрицы, b_1, b_2 — векторы, x — вектор переменных.

Для построения верхних оценок максимального значения целевой функции Q^* задачи (18)–(21) можно использовать лагранжевые двойственные оценки ψ^*, нахождение которых сводится к минимизации негладких выпуклых функций, определенных на семействе неположительно определенных симметричных матриц, линейно зависящих от множителей Лагранжа, которые соответствуют ограничениям (19), (20). При этом может возникнуть разрыв двойственности, т.е. величина $\Delta^* = \psi^* - Q^*$ будет положительной и оценка ψ^* — недостаточно точной.

Один из способов уменьшения значения Δ^* связан с введением функционально избыточных ограничений (при этом может увеличиться и количество переменных задачи (18)–(21)). Согласно [13] функционально избыточными являются ограничения, не изменяющие множества допустимых решений задачи (18)–(21). Однако при этом изменяется вид функции Лагранжа, что может уменьшить Δ^*.

Простейшим примером функционально избыточных ограничений служат квадратичные следствия линейных ограничений, например квадратичное ограничение вида $(b_1^T x + c_1)(b_2^T x + c_2) \ge 0$ следует из двух линейных неравенств: $b_1^T x + c_1 \ge 0$ и $b_2^T x + c_2 \ge 0$. Наличие многочисленных линейных ограничений в ранее рассмотренных задачах облегчает применение такого подхода к их решению. Допустимо применение и более сложных функционально избыточных ограничений, рассмотренных в работе [14]. В частности, при наличии двухсторонних ограничений на три переменные задачи, $0 \le x_1 \le 1$, $0 \le x_2 \le 1$, $0 \le x_3 \le 1$, функционально-избыточные ограничения могут быть записаны в виде неравенств

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - x_1 - x_2 - x_3 \geq -1,$$
$$-x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3 + x_1 \geq 0,$$
$$-x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 + x_2 \geq 0,$$
$$x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 + x_3 \geq 0.$$

Данный подход легко обобщается на случай произвольного числа двусторонних ограничений на переменные. Отметим, что такие ограничения типичны для ранее рассмотренных моделей, что позволяет существенно повысить точность лагранжевых оценок ψ^* для максимальных значений их целевых функций. Кроме того, введение новых переменных посредством квадратичных равенств вида $y_{ij} = x_i x_j$ также дает возможность существенно расширить применяемое семейство функционально избыточных ограничений и тем самым повысить точность оценок ψ^*.

Сравнивая между собой подходы к проведению модельных расчетов, изложенные в данном и предыдущем разделах, следует отметить такие их преимущества и недостатки.

Подход, основанный на решении задач (1)–(6) и (1)–(5), (7) без их преобразования, позволяет существенно уменьшить размерность задачи. Поскольку все ограничения имеют форму неравенств, точное решение задачи может быть получено при конечных значениях штрафных коэффициентов, что ограничивает овражность максимизируемой функции. Множество допустимых решений задачи будет выпуклым. В ряде случаев это облегчает нахождение первого допустимого решения. В то же время возможности анализа полученных решений при данном подходе ограничены.

Подход, изложенный в данном разделе, приводит к некоторому увеличению размерности решаемой задачи. Множество допустимых решений задачи становится невыпуклым, а наличие нелинейных (квадратичных) ограничений-равенств требует больших (теоретически — бесконечных) значений соответствующих им штрафных коэффициентов, что увеличивает овражность штрафной функции. В то же время в преобразованной задаче не используются не всюду определенные функции и исключены проблемы, связанные с выходом за область их определения при поиске решения задачи. Предлагаемый подход дает широкие возможности для анализа полученных решений, рассмотрения моделей с фиксированными целями и позволяет оценить значения целевой функции в точке ее глобального максимума.

Таким образом, оба подхода взаимно дополняются. Поэтому целесообразно их одновременное применение при проведении модельных расчетов.

3. ВОПРОСЫ РАЗРАБОТКИ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Программное обеспечение является важной составляющей современных информационных технологий. Основу программного обеспечения для поддержки принятия решений при планировании структурно-технологических изменений составляет программная система IOMSTC (Intersectoral Optimization Modeles of Structural-Technological Changes), созданная в Институте кибернетики НАН Украины[2]. Система реализована в среде DELPHI, что обеспечивает ее гибкость и удобство для пользователя.

IOMSTC состоит из интерфейса пользователя, базы моделей и набора программных модулей, реализующих оптимизационные алгоритмы. Интерфейс по-

[2] В создании системы участвовал также студент А.В. Пилиповский (Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко).

льзователя опирается на развитую систему окон и иерархических меню. Он позволяет считывать исходные данные модели с внешних файлов (включая электронные таблицы Excell и документы Word, выполненные в заранее согласованном формате), формировать входные массивы модели (матрицу A, векторы q, h, α, l, d, коэффициенты и правые части ресурсных ограничений и др.) на основе этих данных, редактировать исходные данные ранее составленных и вновь формируемых задач, выбирать параметры применяемых оптимизационных алгоритмов, визуализировать и анализировать результаты модельных расчетов, в том числе сравнивая их с фактическими с целью верификации модели.

Особенностью интерфейса пользователя является наличие в его составе двух типов окон — для пользователя-экономиста и дли специалиста по методам оптимизации. Окна первого типа позволяют формировать новые модели на основе данных из внешних файлов и (или) существующих моделей, переименовывать существующие модели, редактировать исходные данные (в том числе в ходе проведения диалоговых расчетов, речь о которых шла в предыдущих разделах), просматривать, анализировать и запоминать (в составе задачи либо на внешних файлах) результаты модельных расчетов. Пользователь также может выбирать целевую функцию (цель расчетов). В качестве альтернатив, из которых осуществляется выбор, в первой версии системы рассматриваются: 1) максимизация конечных доходов потребителей (ей соответствует целевая функция $f_1(\Delta A, \Delta q)$); 2) максимизация величины мультипликатора «прирост доходов–прирост производства» (ей соответствует $f_2(\Delta A, \Delta q)$); 3) нахождение произвольной точки множества допустимых решений (произвольного приемлемого решения).

Окна второго типа позволяют просматривать значения параметров оптимизационного алгоритма, назначенные системой по умолчанию, в случае необходимости изменять значения этих параметров, получать информацию о времени решения задачи, о значении целевой функции и невязках ограничений в точке экстремума и сравнивать их с аналогичными показателями для начального приближения. В случае прекращения поиска экстремума до момента достижения приемлемой точности (например, если целевая функция оказалась не определенной для очередного текущего приближения) пользователь может узнать причину таких действий системы. Пользователь (специалист по методам оптимизации) может также изменять количество начальных приближений и правило их выбора (по умолчанию выбор начальных приближений выполняется аналогично описанному в разд. 1). В состав окон второго типа также входит командная строка, в которой задается имя программного модуля, реализующего оптимизационный алгоритм. Это должен быть произвольный загрузочный модуль (с расширением .exe), использующий входные данные из файлов внутреннего (для системы) представления модели.

В качестве указанных модулей в первой версии системы используются программа MULSTR, описанная в [2], и MULSTR1, реализующая подход к проведению модельных расчетов, изложенный в разд. 2. При этом задачи (2)–(5), (11), (13), (14) и (2)–(5), (11), (13), (15) решаются методом штрафных функций с последующим применением r-алгоритма. В программе MULSTR1 предусмотрено использование трех штрафных множителей (коэффициентов) для различных групп ограничений. Первый множитель используется для квадратичных ограничений-равенств (13). Необходимость его отдельного рассмотрения вызвана тем, что, как ранее отмечалось, для получения точного решения задачи значение этого множителя должно быть достаточно большим. Второй множитель используется для ограничений (2), (3) и (11), третий — для негладких ресурсных ограничений (5). Двусторонние ограничения (4), налагаемые на ΔA и Δq, не включаются в штрафную функцию, а учитываются путем «четного» периодического продолжения целевой функции на область недопустимых значений переменных [8]. Данный подход продемонстрировал свою эффективность при поиске экстремума широкого класса негладких функций. В программе MULSTR, предназначенной для поиска экстремума при ограничениях-неравенствах, используются только второй и третий штрафные множители, поэтому в случае задания имени этой программы в командной строке попытки пользователя просмотреть и изменить значение первого множителя блокируются.

Управляемыми параметрами r-алгоритма, которые могут изменяться пользователем, для программ MULSTR и MULSTR1 являются: h_0 — начальное значение шагового множителя, maxitr — максимальное число итераций алгоритма, ε_x — показатель точности, используемый в критерии останова по изменению аргумента, ε_g — показатель точности, используемый в критерии останова по норме субградиента максимизируемой функции, α — коэффициент растяжения пространства, q_1, q_2, n_k — параметры адаптивной регулировки шагового множителя. Все эти параметры могут изменяться пользователем в пределах, соответствующих теоретическим рекомендациям для r-алгоритма.

Особенностью системы IOMSTC является внутренняя база моделей. Каждая модель представляет собой набор файлов стандартной структуры, содержащих информацию об исходных данных, методе, применяемом для расчетов, параметрах расчетного алгоритма, а по завершении расчетов — также об их результатах (последовательности локально-оптимальных решений). Каждая модель имеет индивидуальное имя, задаваемое пользователем. При создании новой модели на базе существующей вся информация, содержащаяся в файлах базовой модели, будет скопирована в файлы новой модели. В случае переименования модели автоматически будут переименованы и все ее файлы.

Дальнейшие направления развития системы IOMSTC: 1) расширение перечня применяемых оптимизационных алгоритмов за счет реализации современных методов, разработанных в Институте кибернетики НАНУ, а также в других отечественных и зарубежных научных центрах; 2) совершенствование сервисных возможностей, включая распознавание рукописной информации, речевой диалог и др. Потенциальными пользователями системы, кроме Национального агентства по вопросам эффективного использования энергетических ресурсов, могут быть подразделения Минэкономики и Минпромполитики Украины, задействованные в подготовке структурных реформ.

С учетом области применения системы большое значение приобретает анализ чувствительности полученных решений к изменению неоднозначно определяемых параметров моделей. С этой целью для семиотраслевой модели были выполнены численные эксперименты, результаты которых представлены в табл. 1.

Таблица 1. Изменение оптимальных значений целевых функций при изменении параметров модели

Параметры модели	Диапазон изменения	Изменение целевых функций модели (% от наибольшего значения)	
		$f_1(\Delta A, \Delta q)$	$f_2(\Delta A, \Delta q)$
$\underline{\gamma}_{ij}, \overline{\gamma}_{ij}$	10–50% первоначальных значений коэффициентов	72.9–100	90.4–100
β	0.9–1.0	77.3–100	91.9–100
B_k	1.0–3.5	80.9–100	92.9–100

Как следует из полученных результатов, решения наиболее чувствительны к изменению параметров $\underline{\gamma}_{ij}, \overline{\gamma}_{ij}$. Модель с критерием $f_1(\Delta A, \Delta q)$ несколько более чувствительна к изменению β, чем к изменению правых частей ресурсных ограничений B_k; для модели с критерием $f_2(\Delta A, \Delta q)$ чувствительность к изменению учитываемых параметров примерно одинакова. В целом влияние изменения параметров модели на оптимальные значения целевых функций относительно мало. При одновременном изменении всех параметров диапазон значений целевых функций составлял 44–100% для $f_1(\Delta A, \Delta q)$ и 73.5–100% для $f_2(\Delta A, \Delta q)$. Аналогичные результаты были получены и для моделей большей размерности.

Совершенствование применяемых моделей также является важным направлением дальнейшего развития IOMSTC. В следующем разделе рассмотрены модели, которые планируется включить в состав усовершенствованной версии системы.

4. МОДИФИЦИРОВАННЫЕ МЕЖОТРАСЛЕВЫЕ МОДЕЛИ СТРУКТУРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ИЗМЕНЕНИЙ

Рассмотрим модели, представляющие собой дальнейшее развитие моделей (1)–(6) и (1)–(5), (7), приведенных в разд. 1. Первая из этих моделей отличается от ранее рассмотренных следующими аспектами.

1. Предусмотрены ограничения по имеющимся топливно-энергетическим ресурсам и учитывается возможность изменения удельных затрат этих ресурсов на производство продукции отраслей.

2. Предусматривается, что структурно-технологические изменения в некоторых отраслях (прежде всего, в электроэнергетике) могут осуществляться двумя путями:

а) изменением интенсивности использования имеющихся технологий изготовления конечной продукции отрасли (например, увеличения удельного веса теплоэнергетики за счет уменьшения удельного веса ядерной энергетики или наоборот);

б) изменением структуры затрат для имеющихся технологий вследствие внедрения технических и технологических инноваций.

Внедрение новых технологий можно рассматривать как частный случай первого из этих путей, учитывая, что интенсивность использования соответствующей технологии к началу ее внедрения была равна нулю, а после внедрения стала положительным числом.

3. В модели учтены экологические ограничения, в том числе и ограничения на выброс парниковых газов.

Модель является статической, однако в дальнейшем возможна разработка ее динамических аналогов.

Рассмотрим основные предположения и введем обозначения модели.

Пусть экономика состоит из n чистых отраслей, в которых возможны структурно-технологические изменения. Для отрасли j_0 (если это электроэнергетика, то по существующей номенклатуре межотраслевого баланса $j_0 = 17$) эти изменения детализируются как изменения интенсивности использования технологий и как изменения структуры затрат видов продукции для технологий. Обозначим K_{j_0} количество технологий, которые используются в отрасли j_0, номера этих технологий обозначим k, $k = \overline{1, K_{j_0}}$. Пусть $W_k^{(j_0)}$ — интенсивность использования технологии k в отрасли j_0. Далее предположим, что

$$\sum_{k=1}^{K_{j_0}} W_k^{(j_0)} = 1 .$$

Обозначим a_{ij} коэффициенты прямых затрат продукции отрасли i на изготовление единицы продукции отрасли j (коэффициенты матрицы Леонтьева), при этом $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$, $j\neq j_0$. Обозначим $\overline{a}_{ij_0}^{\,k}$ удельные затраты продукции отрасли i на изготовление единицы продукции отрасли j_0 по технологии k. Соответствующие элементы столбца j_0 матрицы Леонтьева определяются следующим образом:

$$a_{ij_0}=\sum_{k=1}^{K_{j_0}}\overline{a}_{ij_0}^{\,k}\,W_k^{(j_0)}. \qquad (22)$$

Обозначим q_j долю конечных доходов в цене продукции отрасли j, $j=\overline{1,n}$. Предположим, что доля добавленной стоимости $\overline{q}_j$ в цене продукции отрасли j линейно зависит от q_j:

$$\overline{q}_j=l_jq_j+d_j, \quad j=\overline{1,n}. \qquad (23)$$

Известные коэффициенты l_j и d_j отображают величину фискального мультипликатора конечных доходов и долю других составляющих добавленной стоимости в цене продукции отрасли j. Предположим, что объемы конечного потребления y_i каждой отрасли линейно зависят от дохода конечных потребителей внутри моделируемой системы

$$y_i=\alpha_iD+h_i, \quad i=\overline{1,n}, \qquad (24)$$

где α_i и h_i — некоторые известные коэффициенты.

Целью моделирования, подобно задаче (1)–(6), является определение способов структурно-технологических изменений, повышающих эффективность экономики. С учетом этого модель имеет несколько функций цели, при проведении расчетов речь может идти об однокритериальной оптимизации, когда определяется экстремум одной функции цели, отобранной из числа всех других, или же о многокритериальной задаче, когда учитываются одновременно все функции цели. Для решения такой задачи может использоваться комбинация методов сверток и ограничений, рассмотренная в [3].

Обозначим g_j вектор прямых удельных затрат ограниченных ресурсов в отрасли j, $j=\overline{1,n}$, при этом величина g_{j_0} определяется из удельных затрат ресурсов для отдельных технологий $g_{j_0}^{k}$ и интенсивности использования технологий $W_k^{(j_0)}$ подобно (22):

$$g_{j_0}=\sum_{k=1}^{K_{j_0}}g_{j_0}^{k}\;W_k^{(j_0)}. \qquad (25)$$

Пусть G — вектор имеющихся в наличии ресурсов. Матрицу, состоящую из столбцов g_j, $j=\overline{1,n}$, далее будем обозначать g.

Обозначим $\tilde{g}_j$ вектор удельных выбросов загрязняющих веществ для отрасли j. Вектор $\tilde{g}_{j_0}$ рассчитывается подобно (25) на основе удельных выбросов загрязняющих веществ для отдельных технологий $\hat{g}_{j_0}^{k}$ и интенсивности использования этих технологий $W_k^{(j_0)}$:

$$\tilde{g}_{j_0}=\sum_{k=1}^{K_{j_0}}\hat{g}_{j_0}^{k}\;W_k^{(j_0)}. \qquad (26)$$

Обозначим $\tilde{G}$ вектор предельно допустимых выбросов загрязняющих веществ; матрицу, созданную вектор-столбцами $\tilde{g}_j$, далее обозначим $\tilde{g}$.

Кроме ресурсов, используемых в процессе производства, в модели учитываются ресурсы, которые используются для изменения структуры отраслевых затрат. Допускается, что такие ресурсы расходуются только на уменьшение величины коэффициентов затрат продукции a_{ij}, $\bar{a}^{k}_{ij_0}$ и затрат ресурсов g_j, $\bar{g}^{k}_{j_0}$. При этом зависимость между уменьшением вышеуказанных показателей и затратами ресурсов будет линейной с коэффициентами пропорциональности b_{vij}, $\tilde{b}_{vik}$, $\bar{b}_{vj}$, $\bar{b}_{vk}$, где v — номер ресурса. Обозначим B_v количество ресурса вида v.

Задача состоит в определении изменений коэффициентов прямых затрат Δa_{ij}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$, $j \neq j_0$, величины $\Delta\bar{a}^{k}_{ij_0}$ удельных затрат для отдельных технологий, которые составляют отрасль j_0, интенсивности использования технологий $\Delta W_k^{(j_0)}$, $k=\overline{1,K_{j_0}}$, доли конечных доходов в цене продукции Δq_j и удельных затрат ресурсов Δg_j, $\Delta\bar{g}^{k}_{j_0}$, $j=\overline{1,n}$, $j \neq j_0$, $k=\overline{1,K_{j_0}}$, удовлетворяющих следующим условиям.

1. Равенства, которые определяют величины Δa_{ij_0} и Δg_{j_0} и следуют из (22) и (25):

$$\Delta a_{ij_0} = \sum_{k=1}^{K_{j_0}} \left((\bar{a}^{k}_{ij_0} + \Delta\bar{a}^{k}_{ij_0})(W_k^{(j_0)} + \Delta W_k^{(j_0)}) - \bar{a}^{k}_{ij_0} W_k^{(j_0)} \right),$$

$$\Delta g_{j_0} = \sum_{k=1}^{K_{j_0}} \left((\bar{g}^{k}_{j_0} + \Delta\bar{g}^{k}_{j_0})(W_k^{(j_0)} + \Delta W_k^{(j_0)}) - \bar{g}^{k}_{j_0} W_k^{(j_0)} \right), \tag{27}$$

$$\tilde{g}_{j_0} = \sum_{k=1}^{K_{j_0}} \Delta\hat{g}^{k}_{j_0} (W_k^{(j_0)} + \Delta W_k^{(j_0)}), \quad i=\overline{1,n}.$$

2. Ограничения на диапазон изменения переменных модели, которые определяются из технологических соображений:

$$\begin{gathered}
\underline{\gamma}_{ij} \le \Delta a_{ij} \le \bar{\gamma}_{ij}, \quad \underline{\delta}_j \le \Delta g_j \le \bar{\delta}_j, \quad i,j=\overline{1,n}, \\
\underline{W}_k^{(j_0)} \le \Delta W_k^{(j_0)} \le \overline{W}_k^{(j_0)}, \quad k=\overline{1,K_{j_0}}, \\
\tilde{\gamma}_{ik} \le \Delta\bar{a}^{k}_{ij_0} \le \bar{\bar{\gamma}}_{ik}, \quad i=\overline{1,n}, \quad k=\overline{1,K_{j_0}}, \\
\underset{\sim}{\delta}_k \le \Delta\bar{g}^{k}_{j_0} \le \bar{\bar{\delta}}_k, \quad k=\overline{1,K_{j_0}}, \\
0 \le q_j + \Delta q_j \le 1, \quad j=\overline{1,n}, \\
0 \le a_{ij} + \Delta a_{ij} \le 1, \quad i,j=\overline{1,n},
\end{gathered} \tag{28}$$

где $\underline{\gamma}_{ij}$, $\bar{\gamma}_{ij}$, $\underline{\delta}_j$, $\bar{\delta}_j$, $\underline{W}_k^{(j_0)}$, $\overline{W}_k^{(j_0)}$, $\tilde{\gamma}_{ik}$, $\bar{\bar{\gamma}}_{ik}$, $\underset{\sim}{\delta}_k$, $\bar{\bar{\delta}}_k$ — некоторые наперед заданные величины.

3. Ограничения, вытекающие из определения понятия «доля добавленной стоимости в цене продукции»:

$$0 \le a_{jj} + \Delta a_{jj} + l_j(q_i + \Delta q_j) + d_j \le 1, \quad j=\overline{1,n}. \tag{29}$$

4. Ограничения, которые исключают усиление инфляции издержек и аналогичны рассмотренным в разд. 1:

$$\sum_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{a_{ij} + \Delta a_{ij}}{1-(a_{jj}+\Delta a_{jj})-(l_j(q_j+\Delta q_j)+d_j)} \le \beta, \quad j=\overline{1,n}, \tag{30}$$

здесь $\beta < 1$ — некоторая наперед заданная величина.

5. Ресурсные ограничения для структурно-технологических изменений

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{vij} \max(0, -\Delta a_{ij}) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{K_{j_0}} \tilde{b}_{vik} \max(0, -\Delta \bar{a}_{ij_0}^{k}) +$$

$$+\sum_{j=1, j\neq j_0}^{n} \bar{b}_{vj} \max(0, -\Delta g_j) + \sum_{k=1}^{K_{j_0}} \bar{b}_{vk} \max(0, -\Delta g_{j_0}^{k}) \le B_v . \tag{31}$$

6. Равенство, определяющее прибыль конечных потребителей D после проведения структурно-технологических изменений:

$$D = \frac{(q+\Delta q)^T (E-(A+\Delta A))^{-1} h}{1-(q+\Delta q)^T (E-(A+\Delta A))^{-1} \alpha}, \tag{32}$$

здесь $A=\{a_{ij}\}$ — матрица Леонтьева, $i, j=\overline{1,n}$; $\Delta A = \{\Delta a_{ij}\}$ — матрица изменений к A, $i, j=\overline{1,n}$; E — единичная матрица; $q=(q_1, \ldots, q_n)$; $\Delta q = (\Delta q_1, \ldots, \Delta q_n)$, $h=(h_1, \ldots, h_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; T — операция транспонирования.

7. Ограничения на ресурсы, используемые в процессе производства,

$$(g+\Delta g)^T (E-(A+\Delta A))^{-1} (\alpha D + h) \le G, \tag{33}$$

где Δg — матрица из векторов-столбцов Δg_j, $j=\overline{1,n}$.

8. Ограничения на выбросы загрязняющих веществ

$$\tilde{g}^T (E-(A+\Delta A))^{-1} (\alpha D + h) \le \tilde{G}. \tag{34}$$

9. Сумма новых значений интенсивностей использования технологий должна быть равна единице (совокупные изменения этих интенсивностей равны нулю)

$$\sum_{k=1}^{K_{j_0}} \Delta W_k^{(j_0)} = 0. \tag{35}$$

Среди всех допустимых решений, удовлетворяющих соотношениям (27)–(35), следует выбрать такие, которые:

а) максимизируют конечные доходы потребителей

$$F_1 = D \to \max; \tag{36}$$

б) максимизируют значение мультипликатора «прирост доходов–прирост производства»

$$F_2 = (q+\Delta q)^T (E-(A+\Delta A))^{-1} \alpha^{(1)} \to \max, \tag{37}$$

где $\alpha^{(1)} = (\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_n^{(1)})$ — некоторый заранее определенный числовой вектор;

в) минимизируют затраты особо дефицитного ресурса с производственной целью

$$F_3 = (g^{(1)} + \Delta g^{(1)})^T (E-(A+\Delta A))^{-1} (\alpha D + h) \to \min, \tag{38}$$

где $g^{(1)}$ — строка матрицы g, содержащей коэффициенты удельных затрат этого ресурса, $\Delta g^{(1)}$ — соответствующая строка матрицы Δg.

Отметим, что полученная модель (27)–(38) будет достаточно сложной оптимизационной задачей. Целевые функции F_2 и F_3, а также ограничения (27), (30)–(34) являются нелинейными. Часть из этих ограничений являются равенствами, что приводит к невыпуклости множества допустимых решений и дополнительно усложняет задачу; функции F_2 и F_3 также невыпуклые. Поэтому необходима разработка специализированных алгоритмов для решения такой задачи.

Заметим, что оптимизационная задача (27)–(38) принадлежит тому же классу, что и задачи (1)–(6) и (1)–(5), (7). Поэтому разработка вышеупомянутых алгоритмов может осуществляться на основе подходов, изложенных в предыдущих разделах.

Во второй из рассмотренных моделей в качестве инструмента изменения коэффициентов прямых затрат рассматриваются цены на производимую продукцию.

Несмотря на то, что возможности государства управлять ценами ограничены в условиях переходной (и тем более рыночной) экономики, ценовое регулирование остается действенным инструментом экономической политики. В частности, оно может быть использовано для обеспечения структурно-технологических преобразований, стимулирования энерго- и ресурсосбережений. В связи с этим представляет интерес разработка моделей, подобных (1)–(6) и (1)–(5), (7), в которых управляемыми параметрами, влияющими на коэффициенты прямых затрат, будут цены на продукцию отраслей. Далее рассматривается одна из таких моделей.

Как и в рассмотренных ранее задачах, предположим, что экономику страны образуют n отраслей. Обозначим a_{ij}^0, $i, j = \overline{1, n}$, коэффициенты прямых затрат в стоимостном измерении, рассчитанные для цен, действовавших на момент составления межотраслевого баланса. Необходимо определить целесообразные изменения этих цен, максимизирующие величину конечных доходов потребителей или значение мультипликатора.

Учитывая постановку задачи, обозначим p_i индекс измененной цены на продукцию отрасли i $(i = \overline{1, n})$ по отношению к цене на момент составления баланса, а q_i — часть доходов потребителей в цене продукции отрасли i. Последняя величина выражается в единицах первоначальной цены данной продукции. Подобно предыдущим моделям предположим, что величина $\tilde{q}_i$ добавленной стоимости в стоимости единицы продукции отрасли i линейно зависит от q_i:

$$\tilde{q}_i = l_i q_i + d_i , \quad i = \overline{1, n} .$$

Здесь $l_i > 0$ и $d_i > 0$ — некоторые заданные коэффициенты, смысл которых тот же, что и для предыдущих моделей.

Из уравнений межотраслевого баланса для цен [15]

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^0 p_i + \tilde{q}_j , \quad j = \overline{1, n},$$

следуют соотношения

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^0 p_i + l_j q_j + d_j , \quad j = \overline{1, n}, \tag{39}$$

образующие первую группу ограничений рассматриваемой модели.

Коэффициенты прямых затрат $a_{ij}(p)$ для действующих цен, зависящие от ценовых индексов $p = (p_1, \ldots, p_n)$, определяются из a_{ij}^0 следующим образом:

$$a_{ij}(p) = \frac{a_{ij}^0 p_i}{p_j} , \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{40}$$

Сумма ценовых индексов после изменения цен в силу закона стоимости должна остаться неизменной. Учитывая, что для цен баланса выполнялось равенство $p_i = 1,\ i = \overline{1, n}$, текущие значения p_i должны удовлетворять ограничению

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = n. \qquad (41)$$

Значения переменных модели p_i и q_i должны быть неотрицательными:

$$p_i \ge 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad q_i \ge 0, \quad i = \overline{1, n}. \qquad (42)$$

Среди значений $p = (p_1, \ldots, p_n)$ и $q = (q_1, \ldots, q_n)$, удовлетворяющих условиям (39)–(42), требуется найти такие, которые максимизировали бы величину конечных доходов потребителей

$$\widetilde{f}_1(p, q) = \frac{q^T (E - A(p))^{-1} h}{1 - q^T (E - A(p))^{-1} \alpha} \to \max \qquad (43)$$

или величину мультипликатора «прирост доходов — прирост производства»

$$\widetilde{f}_2(p, q) = q^T (E - A(p))^{-1} \alpha^1 \to \max. \qquad (44)$$

В (43), (44) используются те же обозначения, что и в (6), (7), $A(p) = \{a_{ij}(p)\}$.

Для того чтобы задачи (39)–(43) и (39)–(42), (44) были корректно сформулированы, требуется, чтобы матрица $(E - A(p))^{-1}$ существовала в любой точке множества допустимых решений. Для этого можно воспользоваться необходимым и достаточным условием существования обратной матрицы [15]

$$1 > \lambda(A(p)), \qquad (45)$$

где $\lambda(A(p))$ — число Фробениуса матрицы $A(p)$ (вещественное положительное собственное число этой матрицы, модуль которого максимальный среди всех собственных чисел).

Учитывая неизбежную неточность исходных данных и необходимость создания резервов при принятии управленческих решений, целесообразно вместо (45) в качестве ограничения модели рассматривать условие

$$\lambda(A(p)) \le \beta_1, \qquad (46)$$

где $0 < \beta_1 < 1$ — некоторое заранее заданное число, достаточно близкое к единице.

Кроме условия (46), можно использовать достаточные условия существования матрицы $(E - A(p))^{-1}$, например

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(p) < 1, \quad j = \overline{1, n},$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(p) \le \beta_1 < 1, \quad j = \overline{1, n}. \qquad (47)$$

Условия (47) задают более узкую область решений по сравнению с (46), однако, будучи линейными неравенствами, они упрощают задачу.

В состав модели также могут быть включены двусторонние ограничения на возможные диапазоны изменений p_i и q_i:

$$\underline{p_i} \le p_i \le \overline{p_i}, \quad \underline{q_i} \le q_i \le \overline{q_i}, \quad i = \overline{1, n}. \qquad (48)$$

Полученные при этом оптимизационные задачи имеют невыпуклые целевые функции, а в случае учета условия (46) — также нелинейное ограничение. Для их решения могут применяться подходы, рассмотренные в разд. 1 и 2. В связи с наличием ограничений-равенств представляет интерес вопрос совместности ограничений (39) и (41). В принципе эти ограничения должны выполняться для $p_i = 1$, $i = \overline{1, n}$, и для значений q_i, соответствующих части доходов потребителей в цене продукции отраслей на момент составления баланса. Однако в силу изменения параметров модели, например l_i и d_i, $i = \overline{1, n}$, зависящих от фискальной политики, это выполнение может быть нарушено и возникнет необходимость быстрой проверки совместности указанных ограничений. Это может быть выполнено следующим образом. Из (39) следует, что

$$p = (E - A^T)^{-1} (\langle l, q \rangle + d), \qquad (49)$$

где $A = \{a_{ij}^0\}$, $\langle l, q \rangle$ — покомпонентное произведение векторов $l = (l_1, \ldots, l_n)$ и $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $d = (d_1, \ldots, d_n)$. Согласно (49) зависимость p от q будет непрерывной. Компоненты матрицы $(E - A^T)^{-1}$ (коэффициенты полных затрат), все l_i и d_i будут неотрицательными. Поэтому для существования такого q, при котором индексы $p = (p_1, \ldots, p_n)$, определенные согласно (49), будут удовлетворять (41), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\tilde{e}^T (E - A^T)^{-1} d \le n$$

и существовали такие допустимые значения $q = q^1$, для которых бы выполнялось неравенство

$$\tilde{e}^T (E - A^T)^{-1} (\langle l, q \rangle + d) \ge n.$$

Здесь $\tilde{e}$ — n-мерный вектор, состоящий из единиц.

Модели (27)–(38) и (39)–(44), (46)–(48) также планируется включить в состав дальнейших версий системы IOMSTC, о которой шла речь в разд. 3.

ВЫВОДЫ И НАПРАВЛЕНИЯ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы.

1. Оптимизационные межотраслевые модели с переменными коэффициентами прямых затрат являются действенным средством поддержки принятия решений при планировании структурных реформ. Они позволяют определить основные направления структурно-технологических преобразований, призванных повысить эффективность экономики, уменьшить производственное потребление энергетических ресурсов и увеличить реальные доходы конечных потребителей без существенных инфляционных эффектов.

2. Проведение расчетов по вышеупомянутым моделям приводит к необходимости решения задач поиска условного экстремума невыпуклых функций, определенных с использованием операции обращения матрицы переменных. Предлагаются два подхода к разработке алгоритмов решения таких задач. Первый из них основан на использовании формулы дифференцирования неявно заданных функций, второй — на преобразовании задачи путем введения дополнительных переменных. В обоих случаях задача сводится к максимизации негладкой штрафной функции r-алгоритмом. Учитывая невыпуклость полученных штрафных функций, предлагается осуществлять поиск точек их оптимума из нескольких начальных приближений. Процесс поиска может быть легко распараллелен и реализован на современной многопроцессорной технике, в частности на кластерах СКИТ-2 и СКИТ-3, разработанных в Институте кибернетики НАНУ.

3. Оба подхода к решению оптимизационных задач имеют свои преимущества и недостатки. В частности, в рамках первого подхода можно существенно уменьшить размерность решаемой задачи, исключив из рассмотрения «несущественные» компоненты матрицы коэффициентов прямых затрат, в то же время второй подход приводит к увеличению размерности за счет дополнительных переменных. Однако поскольку эти переменные можно интерпретировать как показатели отраслевой структуры конечных доходов, последний подход дает бóльшие возможности для анализа полученного решения, оценки влияния сложившейся или желаемой структуры доходов (т.е. интересов отдельных субъектов хозяйствования) на выбор направлений структурно-технологических преобразований и выявления противоречий, которые при этом возникают. Для моделей доказано, что при заданной структуре доходов множество допустимых решений будет выпуклым, что упрощает проведение такого анализа.

4. Предложенные модели вместе с необходимым программным и информационным обеспечением, а также с отработанной методикой их применения образуют основу информационных технологий поддержки принятия управленческих решений, реализуемых в среде специализированной системы поддержки принятия решений (СППР). В качестве прототипной версии такой СППР в Институте кибернетики НАНУ была разработана система IOMSTC.

5. В состав усовершенствованной версии системы IOMSTC планируется включить межотраслевые оптимизационные модели с учетом внутриотраслевой технологической структуры и модели влияния ценовых факторов. Это приводит к решению более сложных оптимизационных задач, но для построения алгоритмов расчетов для них могут применяться ранее рассмотренные подходы.

Дальнейшие исследования в данной области, на наш взгляд, будут проводиться по следующим направлениям:

— разработка алгоритмов проведения расчетов на основе усовершенствованных моделей;

— создание компонент программного и информационного обеспечения этих расчетов;

— расширение сервисных возможностей системы IOMSTC и средств ее коммутации с многопроцессорной вычислительной техникой;

— обобщение опыта применения вышеупомянутых моделей для поддержки принятия управленческих решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корнаи Я. Дефицит. — М.: Мир, 1990. — 284 с.
2. Сергиенко И.В., Михалевич М.В., Стецюк П.И., Кошлай Л.Б. Межотраслевая модель планирования структурно-технологических изменений // Кибернетика и системный анализ. — 1998. — № 3. — С. 3–17.
3. Михалевич М.В., Сергиенко И.В. Моделирование переходной экономики. Модели, методы, информационные технологии. — Киев: Наук. думка, 2005. — 672 с.
4. Кошлай Л.Б., Михалевич М.В., Сергиенко И.В. Моделирование внешнеэкономической деятельности в условиях переходной экономики // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 4. — С. 61–84.
5. Михалевич М.В., Сергієнко І.В. Застосування методів стохастичної оптимізації для дослідження трансформаційних процесів в економіці // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2004. — № 4. — С. 7–29.
6. Леонтьев В. Экономические эссе. — М.: Политиздат, 1990. — 417 с.
7. Долан Э.Дж., Линдсей Д.Е. Макроэкономика. — СПб.: Литера плюс, 1994. — 412 с.

8. Ш о р Н . З . Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1979. — 199 с.
9. Ш о р Н . З . , Ж у р б е н к о Н . Г . Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов // Кибернетика. — 1971. — № 3. — С. 51–59.
10. Ш о р Н . З . , С т е ц ю к П . И . Использование модификации *r*-алгоритма для нахождения глобального минимума полиномиальных функций // Кибернетика и системный анализ. — 1997. — № 4. — С. 28–49.
11. М и х а л е в и ч М . В . Обобщенный стохастический метод центров // Кибернетика. — 1980. — № 2. — С. 43–45.
12. Ш о р Н . З . , С т е ц е н к о С . И . Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. — Киев: Наук. думка, 1989. — 208 с.
13. S h o r N . Z . Nondifferentiable optimization and polynomial problems. — Dordrecht : Kluwer, 1998. — 394 p.
14. С т е ц ю к П . И . Новые модели квадратичного типа для задачи о максимальном взвешенном разрезе графа // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 1. — С. 63–75.
15. П о н о м а р е н к о О . І . , П е р е с т ю к М . О . , Б у р и м В . М . Сучасний економічний аналіз. Ч. 2. Макроекономіка. — КиВв: Вища школа, 2004. — 208 с.

Поступила 29.10.2008