УДК 519.633.6

В.В. АКИМЕНКО, А.Г. НАКОНЕЧНЫЙ, О.Ю. ТРОФИМЧУК

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ НА ОСНОВЕ МНОГОМЕРНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ПАРАБОЛИЧНОСТЬЮ

Ключевые слова: *многомерное интегро-дифференциальное уравнение, начально-краевая задача, вырожденная параболичность, нелинейная монотонная схема, метод расщепления, принцип максимума.*

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является продолжением [1–8] и посвящена проблеме построения монотонных разностных схем повышенного порядка точности (выше первого) для интегро-дифференциальных уравнений с вырождающейся параболичностью специальными нелинейными разностными методами монотонного сглаживания. Свойству монотонности разностных решений для уравнений параболического типа в настоящее время уделяется большое внимание, что отражено в работах [9–12].

Рассмотрена начально-краевая задача с граничными условиями третьего рода в параллелепипеде для многомерного интегро-дифференциального уравнения параболического типа из [3]. Коэффициент параболичности обращается в ноль в произвольных ограниченных и замкнутых подобластях параллелепипеда. На основе двухциклического метода покомпонентного расщепления [5, 8, 11], методики построения нелинейных сглаживающих операторов для локально-одномерных неявных разностных схем из [5, 8] построена неявная двухслойная нелинейная разностная схема, удовлетворяющая принципу максимума. Особенностью схемы является использование только нелинейных сглаживающих операторов и сохранение повышенного порядка аппроксимации (выше первого) в случае вырождающейся параболичности. В настоящей статье предполагается выполнение условий гладкости для коэффициентов уравнения, начальных и граничных условий рассматриваемой краевой задачи, достаточных для удовлетворения теорем существования и единственности обобщенного решения из [3, 13]. На основе построенных мажорантных оценок для невязки разностного и аналитического решений доказана сходимость разностного решения нелинейной задачи к обобщенному решению исходной начально-краевой задачи.

Для тестирования монотонной разностной схемы проведены численные эксперименты для начально-краевой задачи для двухмерного интегро-дифференциального уравнения на примере распространения параболического импульса со сглаженным фронтом. Рассмотрены случаи вырождающейся параболичности во внутренних подобластях прямоугольника. Для различных значений разностного числа Рейнольдса и различных параметров сгущающейся сетки проведен сравнительный анализ погрешностей разностных решений.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ПАРАБОЛИЧНОСТЬЮ

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение параболического типа в области $Q_T = \Omega \times (0, T)$

$$u_t + L(u) = r(x,t)\int_{\Omega} g(\xi,t)u(\xi,t)d\xi + f(x,t), \tag{1}$$

$$L(u) = -\sum_{\alpha=1}^{p} (k_\alpha(x,t)u_{x_\alpha})_{x_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{p} \upsilon_\alpha(x,t)u_{x_\alpha},$$

где $\Omega=\{x\,\big|\,0\le x_\alpha\le\hat{x}_\alpha,\alpha=\overline{1,n}\}$. Определим подобласть $\hat{\Omega}\subset\Omega$: $\hat{\Omega}=\{x\,|\,\breve{\delta}_\alpha\le x_\alpha\le\le\hat{x}_\alpha-\hat{\delta}_\alpha,\alpha=\overline{1,p}\}$, где $0<\breve{\delta}_\alpha$, $\hat{\delta}_\alpha<0,5\hat{x}_\alpha$. Коэффициенты $k_\alpha(x,t)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$1)\ k_\alpha(x,t)=0,\ x\in\mathring{\Omega}\subset\hat{\Omega},\ t\in(0,T); \tag{2}$$

$$2)\ 0<\nu\le k_\alpha(x,t)\le\mu_0,\ x\in\tilde{\Omega}=\Omega\setminus\mathring{\Omega},\ t\in(0,T). \tag{3}$$

Здесь $\nu,\mu_0>0$ — заданные константы, $\mathring{\Omega}$ — ограниченные замкнутые области. Определим $\mathring{Q}_T=\mathring{\Omega}\times(0,T)$, $\tilde{Q}_T=\tilde{\Omega}\times(0,T)$. По сути, $\mathring{\Omega}$ — области вырождения параболичности, $\Omega\setminus\hat{\Omega}$ — области приграничного «вязкого» слоя, $\tilde{\Omega}$ — область с невырожденной параболичностью, $k_\alpha(x,t)$ — кусочно-постоянная неотрицательная функция. Начальные и граничные условия имеют вид

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ \left.\left(\frac{\partial u}{\partial n}+q(s,t)u\right)\right|_\Gamma=0, \tag{4}$$

где Γ — граница области Ω ($s\in\Gamma$), n — внешняя по отношению к границе Γ нормаль. Коэффициенты уравнения (1) измеримы и удовлетворяют следующим условиям:

$$f\in L_{2,1}(Q_T),\ \varphi\in L_2(\Omega),\ \sum_{\alpha=1}^{p}\upsilon_\alpha^2\le\mu_1,\ \left|\sum_{i=1}^{p}(\upsilon_\alpha)_{x_i}\right|\le\mu_1, \tag{5}$$

$$\left(\max_{0\le t\le T}||r||_{2,\Omega},\ \max_{0\le t\le T}||g||_{2,\Omega}\right)\le\mu_2,\ 0\le q(s,t)\le Q_0. \tag{6}$$

Здесь μ_1, μ_2, $Q_0>0$ — заданные константы, $||\cdot||_{2,\Omega}$ — норма из [13]. Согласно теореме 1 из [3] обобщенное решение задачи (1)–(4) при условиях (5), (6) существует и единственно на классе функций $u(x,t)\in L_2(\mathring{Q}_T)\cup V_2^1(\tilde{Q}_T)$ (L_2, V_2^1 — нормированные пространства [13]).

АППРОКСИМАЦИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Аппроксимируем область $Q_T=\Omega\times(0,T)$ с помощью равномерной сетки $\overline{\omega}_{h_1\ldots h_p\tau}==\{(x_{1i_1},\ldots,x_{pi_p},t_j)\big|\ x_{ki_k}=i_kh_k,\ i_k=\overline{0,N_k},\ k=\overline{1,p},t_j=j\tau,\ j=\overline{0,M}\}$, где шаги сетки удовлетворяют условиям $0<h_k<\breve{\delta}_k$, $0<h_k<\hat{\delta}_k$. Для аппроксимации уравнения (1) с разрывными коэффициентами $k_\alpha(x,t)$ используем интегро-интерполяционный метод из [14]. Обозначим A разностный оператор, аппроксимирующий L из (1). Для аппроксимации интегрального оператора используем формулу трапеций из [15]

$$r(x,t)\int_\Omega g(\xi,t)u(\xi,t)d\xi=r^j_{i_1\ldots i_p}(w,y)+\psi_0, \tag{7}$$

где w — вектор коэффициентов для интегрального оператора и функции $g(x,t)$ в соответствии с численным методом квадратур, $(w,y)=\sum_{i_1\ldots i_p}w_{i_1\ldots i_p}y_{i_1\ldots i_p}$ — скалярное произведение, $\psi_0=O(h_1^2+\ldots+h_p^2)$ — погрешность аппроксимации. Запишем однородную консервативную разностную схему с весами σ $(0\le\sigma\le1)$ для задачи (1)–(4):

$$B\hat{y}=(E+\tau\sigma A)\hat{y}=(E-\tau(1-\sigma)A)y+\tau(\sigma(w,\hat{y})\hat{r}+(1-\sigma)(w,y)r)+\tau(\sigma\hat{F}+(1-\sigma)F), \tag{8}$$

$$F^j_{i_1\ldots i_p}=U[f(x_{i_1},\ldots,x_{i_p},t_j)],\quad y^0_{i_1\ldots i_p}=\Phi(\varphi_{i_1\ldots i_p}). \tag{9}$$

Здесь E — единичный оператор, $A=\sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha$ — суммарный разностный оператор, Φ, U — шаблонные функционалы из [14], обеспечивающие порядок аппроксимации $O(h_1^2+\ldots+h_p^2)$ в случае разрывных коэффициентов уравнения. Если множество $\overset{\circ}{\Omega}=\varnothing$, то для аппроксимации оператора L можно использовать популярную монотонную схему направленных разностей порядка $O(h_1^2+\ldots+h_p^2)$ А.А. Самарского [12, 14] с положительным разностным оператором $A>0$, аппроксимирующим оператор L и граничные условия (4). Тогда из [3] следует, что при $\sigma=1$ (для монотонной схемы порядка аппроксимации $O(\tau+h_1^2+\ldots+h_p^2)$) решение задачи (1)–(5) можно записать в виде

$$\hat{y}=\left(B^{-1}y-\frac{\tau(w,B^{-1}y)}{(1+\tau(w,B^{-1}r))}B^{-1}r\right)+\tau\left(B^{-1}f-\frac{\tau(w,B^{-1}f)}{(1+\tau(w,B^{-1}r))}B^{-1}r\right). \qquad (10)$$

Схема (10) имеет решение при ограничениях на τ

$$|1+\tau(w,(E+\tau A)^{-1}r)|\ge a_1>0, \qquad (11)$$

где $a_1=\text{const}>0$. Схема (10) экономична, поскольку приводит к необходимости вычисления трех выражений с трехдиагональными разностными операторами $(E+\tau A)^{-1}y$, $(E+\tau A)^{-1}r$, $(E+\tau A)^{-1}f$ одним из вариантов метода прогонки [14].

Если множество $\overset{\circ}{\Omega}\ne\varnothing$, то в этой области разностное число Рейнольдса $R\to\infty$ и схему направленных разностей использовать нельзя. Для решения задачи (1)–(5) рассмотрим неявную линейную немонотонную однородную двухслойную схему Кранка–Николсона порядка $O(\tau^2+h_1^2+\ldots+h_p^2)$, аппроксимирующую уравнение (1) на временном интервале $[t_{j-1},t_{j+1}]$ и разностные уравнения для граничных условий порядка $O(h_\alpha)$:

$$B\hat{y}=(E+\tau A)\hat{y}=(E-\tau A)\breve{y}+\tau(w,\hat{y}+\breve{y})r+2\tau F, \qquad (12)$$

$$y^0_{i_1\ldots i_p}=\Phi(\varphi_{i_1\ldots i_p}),\ \ l_{\alpha 1}\hat{y}=0,\ \ l_{\alpha 2}\hat{y}=0. \qquad (13)$$

Здесь $l_{\alpha 1}$, $l_{\alpha 2}$ — граничные операторы, действующие на шаблонах $i_\alpha=0$, $i_\alpha=1$ и $i_\alpha=N_\alpha-1$, $i_\alpha=N_\alpha$ соответственно. Использовать уравнение (1) для повышения порядка аппроксимации граничных условий (4) (как это рекомендовано в [14]) в данном случае весьма затруднительно из-за присутствия интегрального члена в уравнении (1). Параметр j принимает только нечетные значения. Входящие в $A=\sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha$ разностные операторы A_α, граничные условия (4) и сеточные функции — коэффициенты уравнения (12) записываются с помощью индексных обозначений в виде

$$(A_\alpha y)_{i_1\ldots i_p}=z^j_{\alpha i_1\ldots i_p}(y_{i_\alpha+1}-y_{i_\alpha-1})-(G^j_{\alpha i_\alpha+1}(y_{i_\alpha+1}-y_{i_\alpha})-G^j_{\alpha i_\alpha}(y_{i_\alpha}-y_{i_\alpha-1})), \qquad (14)$$

$$(l_{\alpha 1}\hat{y})_{i_\alpha=0}=\hat{y}_1-(1+h_\alpha\hat{q}_0)\hat{y}_0, \qquad (15)$$

$$(l_{\alpha 2}\hat{y})_{i_\alpha=N_\alpha}=(1+h_\alpha\hat{q}_{N_\alpha})\hat{y}_{N_\alpha}-\hat{y}_{N_\alpha-1}, \qquad (16)$$

$$G^j_{\alpha i_\alpha+1}=U[k_\alpha(x_{i_1},\ldots,x_{i_\alpha}+mh_\alpha,\ldots,x_{i_p},t_j)]/h_\alpha^2, \qquad (17)$$

$$z^j_{\alpha i_1\ldots i_p}=Y[v_\alpha(x_{i_1},\ldots,x_{i_p},t_j)]/(2h_\alpha), \qquad (18)$$

где Y — шаблонный функционал из [14], обеспечивающий порядок аппроксимации $O(h_1^2+\ldots+h_p^2)$. Всюду в дальнейшем в разностных выражениях будем опускать индексы, которые не изменяются. Для решения разностной задачи (12), (13) с операторами (7), (14)–(18) можно использовать факторизованные схемы из [14] (в частности, продольно-поперечный метод Писмена–Рэкфорда). Но для факторизованных схем нельзя применить методику нелинейного монотонного сглаживания из [5, 8], поскольку она используется только для локально-одномерных разностных уравнений. Поэтому применим к схеме (12) двухциклический метод покомпонентного расщепления Г.И. Марчука [11] с прямым ($\alpha=1,2,\ldots,p$) и обратным ($\alpha=p,p-1,\ldots,1$) действием локально-одномерных операторов A_α:

$$(E+0,5\tau A_\alpha)y^{(j-1+\alpha/(p+1))}=(E-0,5\tau A_\alpha)y^{(j-1+(\alpha-1)/(p+1))}\quad(\alpha=\overline{1,p}),\quad(19)$$

$$y^{(j+1/(p+1))}=y^{(j-1/(p+1))}+\tau h((w,y^{(j+1/(p+1))}+y^{(j-1/(p+1))})r)+2\tau F,\quad(20)$$

$$(E+0,5\tau A_\alpha)y^{(j+(p-\alpha+2)/(p+1))}=(E-0,5\tau A_\alpha)y^{(j+(p-\alpha+1)/(p+1))}\quad(\alpha=\overline{p,1}).\ (21)$$

Метод расщепления исключает из локально-одномерных разностных уравнений интегральный член и функцию F, что позволяет применять в дальнейшем нелинейное сглаживание (на основе принципа максимума) к локально-одномерным уравнениям расщепленной системы и отдельно решать интегральное уравнение Фредгольма второго рода [14]. Потребуем, чтобы $B_\alpha=E+0,5\tau A_\alpha\geq L_1E$, $L_1=\mathrm{const}>0$. Тогда существует ограниченный обратный оператор $B_\alpha^{-1}:||B_\alpha^{-1}||\leq 1/L_1$. Выразим решение $\hat{y}=y^{(j+1)}$ из системы (19)–(21) и запишем его в виде

$$\hat{y}=\hat{T}\breve{y}+2\tau(w,y)\left(\prod_{\alpha=1}^{p}T_\alpha\right)r+2\tau\left(\prod_{\alpha=p}^{p}T_\alpha\right)F+2\tau\overline{\psi}_1,\quad(22)$$

$$\hat{T}=\left(\prod_{\alpha=1}^{p}T_\alpha\right)\left(\prod_{\alpha=p}^{1}T_\alpha\right),\ T_\alpha=(E+0,5\tau A_\alpha)^{-1}(E-0,5\tau A_\alpha),\quad(23)$$

$$\overline{\psi}_1=0,5((w,y^{(j+1/(p+1))}+y^{(j-1/(p+1))})-(w,y^j))\left(\prod_{\alpha=1}^{p}T_\alpha\right)r=O(\tau^2).$$

Двухциклический метод покомпонентного расщепления не ухудшает порядка аппроксимации схемы (12), так как имеет погрешность $O(\tau^2+h_1^2+\ldots+h_p^2)$ даже в случае некоммутирующих между собой операторов A_α. Однако при доказательстве второго порядка аппроксимации для схемы расщепления типа (19)–(21) в работе [11] устанавливаются достаточно жесткие ограничения на параметр τ

$$0,5\tau||A_\alpha||<1,\quad(24)$$

где $||A||$ — норма разностного оператора из [14]. Из (24) следуют ограничения на коэффициенты уравнения (1)

$$\begin{gathered}0,5\tau(4||U[k_\alpha(x_{i_1},\ldots,x_{i_p},t_j)]||_C/h_\alpha^2+\\+||U[v_\alpha(x_{i_1},\ldots,x_{i_p},t_j)]||_C/h_\alpha)\leq\widetilde{C}_0<1,\end{gathered}\quad(25)$$

где $\widetilde{C}_0=\mathrm{const}>0$ — константа, $||y||_C$ — сеточная норма из [14]. Ограничения (24), (25) встречаются, как правило, в явных разностных схемах и существенно снижают эффективность неявной разностной схемы. Условия (24), (25) можно обойти, если при выводе оценки суммарной аппроксимации схемы (19)–(21) не использовать разложение разностного оператора $B_\alpha^{-1}=(E+0,5\tau A_\alpha)^{-1}$ по малому параметру $\varepsilon=0,5\tau||A_\alpha||$, а воспользоваться тождеством

$$B_\alpha^{-1}=E-0,5\tau A_\alpha+0,25\tau^2A_\alpha^2-0,125\tau^3A_\alpha^3B_\alpha^{-1},\quad(26)$$

в котором использовано свойство коммутативности разностных операторов $B_\alpha A_\alpha = A_\alpha B_\alpha$, $B_\alpha^{-1} A_\alpha = A_\alpha B_\alpha^{-1}$ и равенство $B_\alpha^{-1} = E - 0,5\tau B_\alpha^{-1} A_\alpha$. Подставим (26) в (23) и запишем выражение (22) в виде

$$\hat{y} = (E - 2\tau A + 2\tau^2 A^2)\breve{y} + 2\tau(E - \tau A)F + 2\tau(w, y)(E - \tau A)r + \overline{\psi}_2,$$

где погрешность $\overline{\psi}_2 = O(\tau^3)$. Подставим сюда разностное выражение

$$(E - \tau A)\breve{y} = y - \tau F - \tau(w, y)r + \overline{\psi}_3, \qquad (27)$$

где $\overline{\psi}_3 = O\left(\tau^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2\right)$, и получим уравнение

$$(\hat{y} - \breve{y})/(2\tau) + 0,5A(\hat{y} + \breve{y}) = 0,5(w, \hat{y} + \breve{y})r + F + \overline{\psi}_0, \qquad (28)$$

где $\overline{\psi}_0 = O\left(\tau^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2\right)$. Из (28) следует, что схема (7), (14)–(21) аппроксимирует исходное уравнение (1) с суммарным порядком $O\left(\tau^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2\right)$, совпадающим с порядком аппроксимации нерасщепленной схемы (12), (13).

Для доказательства устойчивости схемы (19)–(21) воспользуемся теорией ρ-устойчивости двухслойных разностных схем для несамосопряженных операторов A_α из [14]. Разложим оператор $A_\alpha = \overline{A}_\alpha + \overline{\overline{A}}_\alpha$ на сумму кососимметрического $\overline{A}_\alpha = 0,5(A_\alpha - A_\alpha^*)$ и самосопряженного $\overline{\overline{A}}_\alpha = 0,5(A_\alpha + A_\alpha^*)$ операторов. Пользуясь (14)–(18), можно записать данные операторы с помощью индексных обозначений в виде

$$(\overline{A}_\alpha y)_{i_1 \ldots i_p} = 0,5((z_{\alpha i_\alpha + 1} + z_{\alpha i_\alpha})y_{i_\alpha + 1} - (z_{\alpha i_\alpha} + z_{\alpha i_\alpha - 1})y_{i_\alpha - 1}),$$

$$(\overline{\overline{A}}_\alpha y)_{i_1 \ldots i_p} = -(G_{\alpha i_\alpha + 1}(y_{i_\alpha + 1} - y_{i_\alpha}) - G_{\alpha i_\alpha}(y_{i_\alpha} - y_{i_\alpha - 1})) -$$

$$- 0,5((z_{\alpha i_\alpha + 1} - z_{\alpha i_\alpha})y_{i_\alpha + 1} + (z_{\alpha i_\alpha} - z_{\alpha i_\alpha - 1})y_{i_\alpha - 1}).$$

Поскольку $B_\alpha \geq L_1 E > 0$, для произвольного уравнения из подсистемы (19) справедливо тождество

$$(y^{(j-1+\alpha/(p+1))}, y^{(j-1+\alpha/(p+1))}) = (y^{(j-1+(\alpha-1)/(p+1))}, y^{(j-1+(\alpha-1)/(p+1))}) -$$

$$-2\tau(\overline{\overline{A}}_\alpha B_\alpha^{-1} y^{j-1}, B_\alpha^{-1} y^{j-1}),$$

где используется равенство $B_\alpha^{-1} = E - 0,5\tau B_\alpha^{-1} A_\alpha$. Так как разностный оператор, аппроксимирующий диффузионный член в уравнении, является неотрицательно-определенным, для доказательства устойчивости разностной схемы достаточно наложить следующие ограничения:

$$0,5\|\overline{A}_\alpha + \overline{A}_\alpha^*\| \leq 0,5\|(Y[v_\alpha(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}, t_j)])_{x_\alpha}\|_C \leq L_0,\ L_0 > 0, \qquad (29)$$

$$(Y[v_\alpha(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}, t_j)])_{x_\alpha} < 0 \quad \forall (x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}) \in \Omega,\ \forall t_j \in [0, T], \qquad (30)$$

или вместо (30):

$$0,5\tau|(\overline{A}_\alpha y, y)| \leq 0,25\tau\|(Y[v_\alpha(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}, t_j)])_{x_\alpha}\|_C \|y\|^2 \leq$$

$$\leq (1 - L_1)\|y\|^2,\ 0 < L_1 < 1, \qquad (31)$$

если $\exists(x_{i_1},\ldots,x_{i_p})\in\Omega$, $t_j\in[0,T]$ такие, что $(Y[v_\alpha(x_{i_1},\ldots,x_{i_p},t_j)])_{x_\alpha}>0$, где L_0, L_1 — константы, не зависящие от $h_1,\ldots,h_p,\tau$, квадрат нормы вектора определяется как $||y||^2=(y,y)=\sum_{i_1\ldots i_p} y^2_{i_1\ldots i_p}$. Условия (30) или (31) (в зависимости от знака разностной производной коэффициентов v_α) являются достаточными для положительной определенности операторов $B_\alpha\ge L_1E>0$, существования обратных операторов $B_\alpha^{-1}: ||B_\alpha^{-1}||\le 1/L_1$. Если выполняется условие (30) или (31), то для решения первого уравнения подсистемы (19) (при $\alpha=1$) справедлива оценка

$$||y^{(j-p/(p+1))}||^2\le(1+2\tau\hat{L})||y^{(j-1)}||^2\le\exp(2\hat{L}\tau)||y^{(j-1)}||^2, \tag{32}$$

$$\hat{L}=\begin{cases}0, & \text{если выполнено (30)},\\ L_0/L_1^2, & \text{если выполнено (31)}.\end{cases}$$

Аналогичные оценки получаем при рассмотрении остальных уравнений подсистемы (19). Выразим скалярное произведение $(w, y^{(j+1/(p+1))})$ из (20) и преобразуем уравнение (20) к виду

$$\begin{aligned} y^{(j+1/(p+1))}&=y^{(j-1/(p+1))}+2\tau r(w,y^{(j-1/(p+1))})/(1-\tau(w,r))+2\tau F+\\ &+2\tau^2 r(w,F)/(1-\tau(w,r)). \end{aligned}\tag{33}$$

Из (33) следует, что решение $y^{(j+1/(p+1))}$ существует и единственно при ограничении

$$|1-\tau(w,r)|\ge L_2>0, \tag{34}$$

где $L_2=\mathrm{const}>0$ — заданная константа. Из (32), (33) получаем оценку

$$||y^{(j+1/(p+1))}||\le\exp(2\widetilde{C}_1\tau)||y^{(j-1/(p+1))}||+2\tau\exp(\widetilde{C}_1\tau)||F||\le \tag{35}$$

$$\le\exp((2\widetilde{C}_1+p\hat{L})\tau)||y^{(j-1)}||+2\tau\exp(\widetilde{C}_1\tau)||F||,$$

$$\widetilde{C}_1=||w||\,||r||/L_2. \tag{36}$$

Рассматривая уравнения (21) последовательно, в обратном порядке по $\alpha=p, p-1,\ldots,1$, и используя неравенства (32)–(36), получаем оценку для y^{j+1}

$$||y^{(j+1)}||\le\exp((2\widetilde{C}_1+2p\hat{L})\tau)||y^{(j-1)}||+2\tau\exp((\widetilde{C}_1+p\hat{L})\tau)||F^{(j)}||. \tag{37}$$

Из (37) получаем окончательную оценку для $y^{(j+1)}$ при нечетном j

$$\begin{aligned} ||y^{(j+1)}||&\le\exp(\tau(j+1)(\widetilde{C}_1+p\hat{L}))||y^{(0)}||+2\tau\sum_{k=1}^{(j+1)/2}||F^{(2k-1)}||\times\\ &\times\exp(\tau(\widetilde{C}_1+p\hat{L})(j+2-2k))\le\rho^{j+1}||y^{(0)}||+\\ &+2\tau\exp(T\widetilde{C}_1)\sum_{k=1}^{(j+1)/2}\rho^{j+2-2k}||F^{(2k+1)}||, \end{aligned}\tag{38}$$

где $\rho=\exp(\tau(\widetilde{C}_1+p\hat{L}))$; верхний индекс без скобок означает возведение в степень. Полученная оценка отражает достаточные условия устойчивости схемы и используется для доказательства сходимости разностного решения. Из оценки (38) следует ограниченность разностного решения на произвольном ограниченном интервале времени. На основе изложенного выше справедлива теорема.

Теорема 1. Разностная схема расщепления (19)–(21) с использованием выражений (7), (9), (14)–(18), (33) аппроксимирует задачу (1), (4) (с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (2), (3), (5), (6)) с порядком $\psi_1 = O(\tau^2 + h_1^2 + \ldots + h_p^2)$ во внутренних точках сетки и порядком $\psi_2 = O(h_1 + \ldots + h_p)$ в граничных точках и является ρ-устойчивой при ограничениях (29)–(31), (34). Для разностного решения задачи справедлива априорная оценка (38).

Условия теоремы 1 достаточны для получения устойчивого немонотонного численного решения задачи (1)–(6) с порядком аппроксимации $\psi_1 = O(\tau^2 + h_1^2 + \ldots + h_p^2)$. Однако для моделирования процессов конвекции–диффузии существенным является «физическое» требование монотонности разностного решения (удовлетворяющего принципу максимума). Далее рассматривается алгоритм построения нелинейной монотонной схемы на основе базовой разностной схемы (19)–(21).

ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ МОНОТОННОГО СГЛАЖИВАНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ СХЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Предполагаем, что вязкий слой (область $\Omega \setminus \hat{\Omega}$) покрыт сеткой с шагом $h_\alpha < \delta_\alpha$. Для построения монотонных сглаживающих операторов воспользуемся методикой из [5, 8]. Рассмотрим произвольное уравнение системы (19) с номером α в развернутом виде. Для сглаживания этого уравнения применим нелинейные разностные операторы, используемые в неявных схемах в [8]. Для удобства обозначим $\hat{y}_{i_\alpha} = y_{i_1 \ldots i_\alpha \ldots i_p}^{(j-1+\alpha/(p+1))}$, $y_{i_\alpha} = y_{i_1 \ldots i_\alpha \ldots i_p}^{(j-1+(\alpha-1)/(p+1))}$ и будем искать решение разностного уравнения в виде

$$\hat{y}_{i_\alpha+1} = a_{i_\alpha} \hat{y}_{i_\alpha} + b_{i_\alpha} + (\Omega_\alpha y)_{i_\alpha}, \quad \hat{y}_0 = b_0 / (1 - a_0 + \hat{q}_0 h_\alpha), \tag{39}$$

$$(\Omega_\alpha y)_{i_\alpha} = (\breve{c}_{i_\alpha} - a_{i_\alpha} \hat{y}_{i_\alpha} - b_{i_\alpha})\chi_1 + (\hat{c}_{i_\alpha} - a_{i_\alpha} \hat{y}_{i_\alpha} - b_{i_\alpha})\chi_2, \tag{40}$$

$$\chi_1 = \chi(\breve{c}_{i_\alpha} - a_{i_\alpha} \hat{y}_{i_\alpha} - b_{i_\alpha}), \quad \chi_2 = \chi(a_{i_\alpha} \hat{y}_{i_\alpha} + b_{i_\alpha} - \hat{c}_{i_\alpha}), \tag{41}$$

$$\hat{c}_{i_\alpha} = \max(\hat{c}_{i_\alpha-1}, y_{i_\alpha+1}), \quad \breve{c}_{i_\alpha} = \min(\breve{c}_{i_\alpha-1}, y_{i_\alpha+1}) \quad (i_\alpha = \overline{1, N_\alpha - 1}), \tag{42}$$

$$\hat{c}_0 = \max(\hat{y}_0, y_0, y_1), \quad \breve{c}_0 = \min(\hat{y}_0, y_0, y_1), \tag{43}$$

$$b_{i_\alpha-1} = [(1 - C_{\alpha_{i_\alpha}} - E_{\alpha_{i_\alpha}}) y_{i_\alpha} + E_{\alpha_{i_\alpha}} y_{i_\alpha+1} + C_{\alpha_{i_\alpha}} y_{i_\alpha-1} + E_{\alpha_{i_\alpha}} b_{i_\alpha}] / \tag{44}$$

$$/(1 + C_{\alpha_{i_\alpha}} + (1 - a_{i_\alpha}) E_{\alpha_{i_\alpha}}),$$

$$a_{i_\alpha-1} = C_{\alpha_{i_\alpha}} / (1 + C_{\alpha_{i_\alpha}} + (1 - a_{i_\alpha}) E_{\alpha_{i_\alpha}}), \ a_{N_\alpha-1} = 1/(1 + h_\alpha \hat{q}_1), \ b_{N_\alpha-1} = 0, \tag{45}$$

$$C_{\alpha i_\alpha} = 0{,}5\tau(z_{\alpha i_\alpha} + G_{\alpha i_\alpha}), \quad E_{\alpha i_\alpha} = 0{,}5\tau(-z_{\alpha i_\alpha} + G_{\alpha i_\alpha+1}), \tag{46}$$

где индекс α — номер пространственной переменной, $\chi(x)$ — функция Хевисайда, a, b — прогоночные коэффициенты, $C_{\alpha i_\alpha}$, $E_{\alpha i_\alpha}$ — вспомогательные коэффициенты. Фиксированные индексы у всех коэффициентов опущены. Для выполнения условия устойчивости метода прогонки достаточно наложить ограничения на параметры схемы

$$\tau \| Y[v_\alpha(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}, t_j)] \|_C / (2h_\alpha) \le \widetilde{C}_0 < 1, \tag{47а}$$

$$C_{\alpha i_\alpha} \ne 0, \ E_{\alpha i_\alpha} \ne 0, \tag{47б}$$

где $\widetilde{C}_0 = \mathrm{const} > 0$. Тогда прогоночные коэффициенты удовлетворяют условию $0 \le a_{i_\alpha} < 1$. Из формул прогонки и свойств операторов $\Omega_\alpha y$ следует, что сеточная функция $\hat{y}$ из (39) на данном временном слое удовлетворяет принципу максимума. Рассмотрим первый интервал $[t_{j-1}, t_{j-p/(p+1)}]$, на котором значения функции с предыдущего временного слоя и в точках $i_1 = 0, N_1$ можно считать граничными. Разностное уравнение является однородным. Тогда оператор $\Omega_\alpha y$ гарантирует, что $\hat{y}$ во внутренних точках текущего временного слоя не примет значения меньше, чем минимальное (больше, чем максимальное) граничное значение функции. При выполнении условий теоремы 1 и условий (47а), (47б) решение задачи (39)–(46) существует, единственно, ограничено.

Аналогичные утверждения справедливы и для остальных уравнений подсистемы (19), а также для уравнений подсистемы (21). Следовательно, с учетом ограничений (47а), (47б) решение системы (19)–(21) на рассматриваемом временном слое $y_{i_1 \ldots i_p}^{j+1}$ существует, единственно и ограничено.

Для доказательства сходимости разностного решения сглаженной схемы (39)–(46) воспользуемся методикой из [5, 8] построения оценки для операторов $\Omega_\alpha y$. Рассмотрим одно уравнение подсистемы (19) или (21) с фиксированным номером α и соответствующее этому номеру выражение (39) в граничной точке $i_\alpha = 0$.

Пусть $(\Omega_\alpha y)_0 \neq 0$. Случай $\hat{y}_1 - \breve{c}_0 = a_0 \hat{y}_0 + b_0 - \breve{c}_0 < 0$, $\breve{c}_0 = \min(\hat{y}_0, y_0, y_1)$ исключен, так как $\hat{y}_1 = (1 + h_\alpha \hat{q}_0)\hat{y}_0 \geq \hat{y}_0$. Рассмотрим случай $\hat{y}_1 - \hat{c}_0 = a_0 \hat{y}_0 + {}$ $+ b_0 - \hat{c}_0 > 0$, $\hat{c}_0 = \max(\hat{y}_0, y_0, y_1)$. Поскольку $\hat{y}_1 = (1 + h_\alpha \hat{q}_0)\hat{y}_0 \geq \hat{y}_0$ и $y_1 = (1 + h_\alpha q_0) y_0 \geq y_0$, единственный возможный вариант в данном случае $\hat{c}_0 = y_1$. Во всех предыдущих узлах сетки (на предыдущих временных слоях) определена сеточная функция $y_{i_1 \ldots i_p}^{j}$ как решение устойчивой разностной задачи (19)–(21). Для этой сеточной функции $y_{i_1 \ldots i_p}^{j}$ на данном множестве точек сетки методом гладкого восполнения можно построить функцию $\tilde{y}(x_1, \ldots, x_p, t, h_1, \ldots, h_p, \tau)$, принадлежащую пространству достаточно гладких функций и сходящуюся в норме данного пространства к $u(x_1, \ldots, x_p, t) \in L_2(\mathring{Q}_T^{(k)}) \cup V_2^1(\tilde{Q}_T^{(k)})$ при $(h_1, \ldots, h_p, \tau \to 0)$. Рассмотрим разностное выражение

$$\hat{c}_0 - y_0 = y_1 - y_0 = h_\alpha \hat{q}_0 (1 + h_\alpha \hat{q}_0)^{-1} y_1 > 0. \tag{48}$$

Отсюда получаем оценку для сглаживающего оператора

$$0 > (\Omega_\alpha y)_0 = \hat{c}_0 - \hat{y}_1 = (\hat{c}_0 - \hat{y}_0) + \hat{c}_0 h_\alpha \hat{q}_0 - h_\alpha \hat{q}_0 (\hat{c}_0 - \hat{y}_0) > \tag{49}$$

$$> - h_\alpha \hat{q}_0 (\hat{c}_0 - \hat{y}_0) = - h_\alpha^2 \hat{q}_0 \tilde{y}_{x_1} + h_\alpha \tau \hat{q}_0 \tilde{y}_t + O(h_\alpha (\tau + h_\alpha)^2) = -\tilde{\psi}_\alpha .$$

Аналогично рассматривается случай $(\Omega_\alpha y)_{N_\alpha} \neq 0$ в другой граничной точке $i_\alpha = N_\alpha$. Окончательно получаем оценку для сглаживающего оператора в граничных узлах сетки

$$|(\Omega_\alpha y)_{i_\alpha = 0, i_\alpha = N_\alpha}| \leq |\tilde{\psi}_\alpha| \leq O(h_\alpha^2 + h_\alpha \tau). \tag{50}$$

Из неравенств (48), (49) следует, что оценка (50) справедлива и в случае однородных граничных условий второго рода (при $q_0 = 0$). Рассмотрим произвольную внутреннюю точку области $i_\alpha = \overline{1, N_\alpha - 1}$. Наложим ограничения на коэффициенты разностных уравнений (19), (21):

$$Y[\upsilon_\alpha (x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}, t_j)] > 0. \tag{51}$$

Поскольку коэффициент параболичности может обращаться в ноль, условие (51) гарантирует выполнение условия (47б). Если коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условию $Y[\upsilon_\alpha (x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}, t_j)] < 0$, то за счет замены переменных в этом уравнении $x'_\alpha = -x_\alpha$ можно добиться выполнения условия (51).

Если параметры (46) рассматриваемого разностного уравнения удовлетворяют условиям $E_{\alpha i_\alpha} > 0, C_{\alpha i_\alpha} > 0$, $(1-E_{\alpha i_\alpha} - C_{\alpha i_\alpha}) > 0$, то схема (39)–(46) удовлетворяет классической теореме принципа максимума [14]. Тогда разностное число Рейнольдса принимает значения меньше единицы:

$$\mathrm{Re} = (0,5 h_\alpha Y[v_\alpha(x_{i_1},\ldots,x_{i_p},t_j)] / U[K_\alpha(x_{i_1},\ldots,x_{i_\alpha}+mh_\alpha,\ldots,x_{i_p},t_j)]) < 1.$$

При параболичности это условие может нарушаться, поэтому рассмотрим случай, когда $\mathrm{Re}>1$ $(U[K_\alpha(x_{i_1},\ldots,x_{i_\alpha}+mh_\alpha,\ldots,x_{i_p},t_j)]>0)$ либо $U[K_\alpha(x_{i_1},\ldots,x_{i_\alpha}+$ $+mh_\alpha,\ldots,x_{i_p},t_j)]=0$. В этом случае для коэффициентов (46) произвольного уравнения подсистемы (19) справедливо $E_{\alpha i_\alpha} < 0, C_{\alpha i_\alpha} > 0$. Тогда свойства разностной схемы (39)–(46) с кусочно-постоянными, вырождающимися коэффициентами параболичности K_α совпадают со свойствами разностной схемы (3) с невырождающимися коэффициентами параболичности из [8]. Пусть $(\Omega_\alpha y)_{i_\alpha} \neq 0$, например

$$\widehat{y}_{i_\alpha+1} - \breve{c}_{i_\alpha} = \alpha_{i_\alpha}\widehat{y}_{i_\alpha} + \beta_{i_\alpha} - \breve{c}_{i_\alpha} < 0. \tag{52}$$

Из формул прогонки для $\widehat{y}_{i_\alpha}$ имеем

$$(1+C_{\alpha i_\alpha}+(1-a_{i_\alpha})E_{\alpha i_\alpha})(\widehat{y}_{i_\alpha}-\breve{c}_{i_\alpha}) = C_{\alpha i_\alpha}(\widehat{y}_{i_\alpha-1}-\breve{c}_{i_\alpha}) - E_{\alpha i_\alpha}(a_{i_\alpha}\breve{c}_{i_\alpha}+b_{i_\alpha}-\breve{c}_{i_\alpha})+$$
$$+(y_{i_\alpha}-\breve{c}_{i_\alpha}) - C_{\alpha i_\alpha}(y_{i_\alpha}-y_{i_\alpha-1})+$$
$$+E_{\alpha i_\alpha}(y_{i_\alpha+1}-y_{i_\alpha}) + (1+C_{\alpha i_\alpha}+(1-a_{i_\alpha})E_{\alpha i_\alpha})(\Omega_\alpha y)_{i_\alpha-1}.$$

Рассматривая все возможные значения $(\Omega_\alpha y)_{i_\alpha-1}=0$, $(\Omega_\alpha y)_{i_\alpha-1}>0$, $(\Omega_\alpha y)_{i_\alpha-1}<0$, как в [8] для сглаживающего оператора в расщепленной схеме для двумерного уравнения параболического типа, получаем оценку

$$0 < (\Omega_\alpha y)_{i_\alpha} < (\widetilde{\psi}_\alpha)_{i_\alpha} \le O((\tau+h_\alpha)^2),$$

где $\widetilde{\psi}_\alpha$ — гладкая функция, имеющая порядок малости $O((\tau+h_1)^2)$. Аналогично рассматривается случай

$$\widehat{y}_{i_\alpha+1} - \widehat{c}_{i_\alpha} = \alpha_{i_\alpha}\widehat{y}_{i_\alpha} + \beta_{i_\alpha} - \widehat{c}_{i_\alpha} > 0.$$

Окончательная оценка для нелинейного сглаживающего оператора $(\Omega_\alpha y)_{i_\alpha}$ имеет вид

$$|(\Omega_\alpha y)_{i_\alpha}| < |(\widetilde{\psi}_\alpha)_{i_\alpha}| \le O((\tau+h_\alpha)^2). \tag{53}$$

Оценки $(\widetilde{\psi}_\alpha)_{i_\alpha}$ для сглаживающих функционалов $(\Omega_\alpha y)_{i_\alpha}$ разностных уравнений подсистем (19), (21) построены с помощью гладкого восполнения $\widetilde{y}(x_1,\ldots,x_p,t,h_1,\ldots,h_p,\tau)$, которое аппроксимирует разностное устойчивое решение $y^{j+1}_{i_1\ldots i_p}$ задачи (39)–(42). Поэтому в мажорантных оценках (50), (53) $(\breve{\psi}_\alpha)_{i_\alpha} \to 0$ при $(h_1,\ldots,h_p,\tau\to 0)$ и соответственно $|(\Omega_\alpha y)_{i_\alpha}| \to 0$. Полученные оценки для нелинейных сглаживающих операторов будут использованы для доказательства сходимости разностного решения общей задачи.

СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНОГО РЕШЕНИЯ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ

Каждое уравнение подсистемы (19) или (21) с номером α представляет собой систему линейных уравнений с трехдиагональной матрицей $B_\alpha = E + 0,5\tau A_\alpha$. Трехдиагональную матрицу B_α можно представить в виде произведения верхней двухдиагональной S_α и нижней двухдиагональной D_α: $B_\alpha = S_\alpha D_\alpha$, где элементы $(s_\alpha)_{ij} \neq 0$ только для $(i_\alpha = j_\alpha;\, i_\alpha, j_\alpha = \overline{0,N_\alpha})$, $(i_\alpha = j_\alpha - 1;\, i_\alpha = \overline{0,N_\alpha-1},\, j_\alpha = \overline{1,N_\alpha})$, элементы

$$(d_\alpha)_{i_\alpha j_\alpha} = \begin{cases} 1, & i_\alpha = j_\alpha,\, (i_\alpha, j_\alpha = \overline{0,N_\alpha}), \\ -a_{i_\alpha}, & i_\alpha = j_\alpha+1,\, (i_\alpha = \overline{1,N_\alpha},\, j_\alpha = \overline{0,N_\alpha-1}), \\ 0 \text{ для остальных } i_\alpha, j_\alpha. \end{cases}$$

где a_{i_α} — соответствующие прогоночные коэффициенты для каждой разностной задачи (поскольку у прогоночных коэффициентов a_{i_α} индексы $i_{\alpha+1}, i_{\alpha-1}, \ldots$ по остальным пространственным переменным фиксированы и выступают как параметры, их здесь не указываем). Из ограничений (23), (47а), (47б) для схемы (39)–(46) следуют неравенства:

$$(D_\alpha y, y) \geq (1 - \max_{i_\alpha}(a_{i_\alpha}))(y, y),$$

$$(D_\alpha y, D_\alpha y) \leq (1 + \max_{i_\alpha}(a_{i_\alpha}))^2 (y, y),$$

$$C_{i_\alpha} \leq \widetilde{C}_0 (1 + C_{i_\alpha} + (1 - \widetilde{C}_0) E_{i_\alpha}).$$

Отсюда получаем оценки

$$\max_{i_\alpha}(a_{i_\alpha}) \leq \widetilde{C}_0, \; D_\alpha \geq (1 - \widetilde{C}_0) E > 0, \; ||D_\alpha|| < (1 + \widetilde{C}_0), \; ||D_\alpha^{-1}|| \leq (1 - \widetilde{C}_0)^{-1} = \widetilde{C}_2,$$

где $\widetilde{C}_0$ — константа из (27а). Тогда процедура сглаживания изменит уравнения подсистем (19) и (21). Если значение сеточной функции — решения задачи на данном шаге алгоритма расщепления обозначить $\hat{y}$, а известное значение данной функции с предыдущего шага — как y, то процедуру сглаживания на каждом шаге алгоритма можно представить в виде

$$B_\alpha \hat{y} = (E - 0,5\tau A_\alpha) y + S_\alpha \Omega_\alpha y. \tag{54}$$

Тогда для погрешности $\delta_{i_1 \ldots i_p} = y_{i_1 \ldots i_p} - u_{i_1 \ldots i_p}$ решения разностной задачи (19)–(21), (39)–(46), (54) (с учетом сглаживающих операторов) получаем уравнение

$$\hat{\delta} = \hat{T}\breve{\delta} + 2\tau(w, \hat{T}_2 \breve{\delta}) \hat{T}_1 r / \widetilde{w} - [\hat{u} - \hat{T}\breve{u} - 2\tau(w, \hat{T}_2 \breve{u}) \hat{T}_1 r / \widetilde{w} - 2\tau \hat{T}_1 F - 2\tau^2 (w, F) \hat{T}_1 r / \widetilde{w}] +$$

$$+ \hat{T}_1 \hat{\Omega} y + 2\tau(w, \hat{\Omega} y) \hat{T}_1 r + D_1^{-1} \Omega_1 y + \sum_{\alpha=2}^{p} \left(\prod_{\beta=p}^{\alpha-1} T_\beta \right) D_\alpha^{-1} \Omega_\alpha y, \tag{55}$$

$$\hat{T}_1 = \left(\prod_{\alpha=1}^{p} T_\alpha \right), \; \hat{T}_2 = \left(\prod_{\alpha=1}^{p} T_{p-\alpha+1} \right), \; \hat{T} = \hat{T}_1 \hat{T}_2,$$

$$\widetilde{w} = 1 - \tau(w, r), \; \hat{\Omega} y = \sum_{\alpha=1}^{p-1} \left(\prod_{\beta=1}^{p-\alpha} T_{p-\beta+1} \right) D_\alpha^{-1} \Omega_\alpha y + D_p^{-1} \Omega_p y.$$

С учетом выражений (22), (23), (26), (27), справедливых для сеточной функции $u_{i_1 \ldots i_p}^j$, а также соотношения $1/\widetilde{w} = 1 + \tau(w, r)/\widetilde{w}$ рассмотрим разностное выражение

$$\hat{u} - \hat{T}\breve{u} - 2\tau(w, \hat{T}_2 \breve{u}) \hat{T}_1 r / \widetilde{w} - 2\tau \hat{T}_1 F - 2\tau^2 (w, F) \hat{T}_1 r / \widetilde{w} = \hat{u} - (E - 2\tau A + 2\tau A^2) \breve{u} -$$

$$-2\tau(E - \tau A) F - 2\tau(w, (E - \tau A)\breve{u})(E - \tau A) r / \widetilde{w} - 2\tau^2 (w, F) r / \widetilde{w} + O(\tau^3) = \tag{56}$$

$$= [\hat{u} - \breve{u} + 2\tau A u - 2\tau F - 2\tau(w, u) r] - 2\tau^2 (w, r)(w, u - \breve{u}) r / \widetilde{w} + O(\tau^3) = 2\tau \overline{\psi},$$

где $\overline{\psi} = O\left(\tau^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2 \right)$ — порядок малости разностного выражения (56). Из этой формулы, с учетом однородных начальных условий, оценок погрешности нелинейных сглаживающих операторов (50), (53), следует априорная оценка для погрешности разностного решения $\delta^{(j+1)}$

$$||\delta^{(j+1)}||\le \exp(2\tau(\widetilde{C}_1+p\hat{L}))||\delta^{(j-1)}||+2\tau||\overline{\psi}^{(j+1)}||+2\widetilde{C}_2\exp(2\tau p\hat{L})\sum_{\alpha=1}^{p}||\widetilde{\psi}_{\alpha}^{(j+1)}||+$$

$$+2\tau L_2\widetilde{C}_1\widetilde{C}_2\exp(2\tau p\hat{L})\sum_{\alpha=1}^{p}||\widetilde{\psi}_{\alpha}^{(j+1)}||\le$$

$$\le \exp(2\tau(\widetilde{C}_1+p\hat{L}))||\delta^{(j-1)}||+2\tau||\overline{\psi}^{(j+1)}||+\overline{C}\sum_{\alpha=1}^{p}||\widetilde{\psi}_{\alpha}^{(j+1)}||,$$

где $\overline{C}=2\widetilde{C}_2\exp(2\tau p\hat{L})(1+\tau L_2\widetilde{C}_1)$. Отсюда получаем окончательную оценку для $\delta^{(j)}$ при произвольном четном значении j:

$$||\delta^{j}||\le 2\tau\sum_{k=1}^{j/2}\exp(2\tau(\widetilde{C}_1+p\hat{L})(j/2-k))||\overline{\psi}^{(2k)}||+\overline{C}\sum_{k=1}^{j/2}\exp(2\tau(\widetilde{C}_1+p\hat{L})(j/2-k))\times$$

$$\times\sum_{\alpha=1}^{p}||\widetilde{\psi}_{\alpha}^{(2k)}||\le \exp(2T(\widetilde{C}_1+p\hat{L}))\left(2\tau\sum_{k=1}^{j/2}||\overline{\psi}^{(2k)}||+\overline{C}\sum_{k=1}^{j/2}\sum_{\alpha=1}^{p}||\widetilde{\psi}_{\alpha}^{(2k)}||\right). \qquad (57)$$

Поскольку оценки (50), (53) имеют порядок $\widetilde{\psi}_{\alpha}=O((\tau+h_{\alpha})^2)$, а $\overline{C}=O(1+\tau)$ в (57), из оценки (57) следует условная сходимость разностного решения: $||\delta^{j}||\to 0$ при $(h_{\alpha}^2/\tau)\to 0$, $(h_1,..,h_p,\tau)\to 0$. Полученные результаты можно объединить в теореме.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Разностная схема двухциклического расщепления (19)–(21) со сглаживающими операторами из (39)–(46) при ограничениях (47а), (47б), (51) является устойчивой, монотонной и условно сходящейся при $(h_{\alpha}^2/\tau)\to 0$ для $(h_1,\dots,h_p,\tau)\to 0$. Скорость сходимости схемы совпадает с порядком аппроксимации исходной схемы (28) и оценками для сглаживающих операторов $\Omega_{\alpha}y$ (50), (53). Для погрешности разностного решения справедлива априорная оценка (57).

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Для проведения численного анализа применимости разработанной разностной схемы к моделированию процессов переноса и диффузии рассмотрена задача для двумерного уравнения турбулентной диффузии из [8], моделирующего поворот и диффузию в двумерной области $x_1\in[-50,300]$, $x_2\in[-300,300]$, вокруг нулевой точки, импульса с гладким фронтом, описываемым эллипсоидальной функцией. Поворот происходит с частотой $\nu=0{,}005$ оборотов в секунду, с коэффициентами скорости $\upsilon_1=-2\pi\nu x_2$, $\upsilon_2=2\pi\nu x_1$. Коэффициенты диффузии:

$$k_1=\exp(-\theta x_1),\quad k_2=\begin{cases}0, & x_1\in[0,200],\ x_2\in[-200,0],\\ 1, & x_1\,\overline{\in}\,[0,200],\ x_2\,\overline{\in}\,[-200,0].\end{cases}$$

Коэффициенты уравнения (1): $r(x,t)=1$, $g(x,t)=1$. В граничных условиях (4) $q(s,t)=0$. За время $T=50$ начальный импульс перемещается по кругу, в IV квадранте, на угол $\pi/2$ (см. рисунки в [8]). Точное решение задачи:

$$u(x_1,x_2,t)=\begin{cases}\psi(x_1,x_2,t), & ((x_1-x_0(t))^2+(x_2-y_0(t))^2)\le(\pi/\lambda),\\ 0, & ((x_1-x_0(t))^2+(x_2-y_0(t))^2)\ge(\pi/\lambda),\end{cases}$$

$$\psi(x_1,x_2,t)=2{,}5(\cos(\lambda((x_1-x_0(t))^2+(x_2-y_0(t))^2))+1),$$

$$x_0(t)=150\sin(0{,}01\pi t),\quad y_0(t)=-150\cos(0{,}01\pi t),\ \lambda=\pi/2500.$$

Начальное значение: $\varphi(x_1, x_2) = u(x_1, x_2, 0)$.

Проведены экспериментальные исследования отклонений численных решений от аналитического: 1) для неявной нелинейной монотонной двухслойной схемы с использованием разностных операторов направленных разностей из [1, 6] (схема I); 2) для неявной нелинейной монотонной схемы (19)–(21) со сглаживающими операторами (39)–(46) (схема II). Обе схемы приблизительно эквивалентны с точки зрения числа затрачиваемых операций, поскольку принадлежат одному семейству разностных схем. Результаты расчетов приведены в табл. 1. Для анализа отклонений использовались оценки:

$$\Delta_1 = \left(\sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{k=1}^{N_2-1} | y_{ik}^M - u(x_{1i}, x_{2k}, T)| \right) / (N^* |u(x_{1i^*}, x_{2k^*}, T)|),$$

$$\Delta_2 = \left| u(x_{1i^*}, x_{2k^*}, T) - y_{i^*, k^*}^M \right| / \left| u(x_{1i^*}, x_{2k^*}, T) \right|,$$

$$\Delta_3 = \max_{i,k} |u(x_{1i}, x_{2k}, T) - y_{ik}^M| / |u(x_{1i^*}, x_{2k^*}, T)|,$$

$$(x_{1i^*}, x_{2k^*}) = \arg \max_{i,k} |u(x_{1i}, x_{2k}, T)|.$$

Здесь N^* — количество узлов пространственной сетки, покрывающих носитель импульсной разностной функции y_{ik}^M, в которых $y_{ik}^M > 0$ (для рассматриваемого примера). Оценка Δ_1 характеризует среднее относительное отклонение решения разностной задачи от точного решения. Оценка Δ_2 характеризует относительное отклонение решения разностной задачи от точного решения в точке максимума и позволяет сделать вывод о погрешности амплитуды разностного решения. Оценка Δ_3 характеризует максимальное относительное отклонение решения разностной задачи от точного решения на множестве узлов пространственной сетки.

Таблица 1. Значения оценок погрешности разностных решений

θ	**Номер схемы**	$h^* = 0{,}05$, $\tau^* = 0{,}04$	$h^* = 0{,}03$, $\tau^* = 0{,}02$	$h^* = 0{,}015$, $\tau^* = 0{,}01$
		Оценка Δ_1		
0,1	I	0,0401	0,0375	0,0336
	II	0,0339	0,0216	0,0124
0,01	I	0,0400	0,0375	0,0335
	II	0,0333	0,0211	0,0121
0,001	I	0,0390	0,0374	0,0334
	II	0,0330	0,0209	0,0118
Оценка Δ_2				
0,1	I	0,753	0,634	0,451
	II	0,295	0,024	0,021
0,01	I	0,745	0,624	0,439
	II	0,283	0,020	0,018
0,001	I	0,732	0,609	0,427
	II	0,266	0,016	0,015
Оценка Δ_3				
0,1	I	0,759	0,655	0,513
	II	0,698	0,397	0,242
0,01	I	0,751	0,644	0,500
	II	0,694	0,395	0,233
0,001	I	0,732	0,625	0,476
	II	0,687	0,389	0,220

Расчеты проведены на сгущающихся сетках для различных значений разностных чисел Рейнольдса для второго локально-одномерного уравнения $\mathrm{Re}_1 = (0{,}5 h_1 Y[v_1] / U[k_1]) > 1$. Значения Re_1 изменялись с помощью числового параметра θ (см. табл. 1): $\mathrm{Re}_1 \approx 50 - 80$ (для $\theta = 0{,}001$), $\mathrm{Re}_1 \approx 500 - 800$ (для $\theta = 0{,}01$), $\mathrm{Re}_1 \approx 10^{10}$ (для $\theta = 0{,}1$). В табл. 1 используются безразмерные параметры сетки $h^* = h_1 / \hat{x} = h_2 / \hat{x}$, $\tau^* = \tau / T$, где τ, h_1, h_2 — численные параметры, $\hat{x} = 300$ — характерный размер области на плоскости.

Результаты моделирования процесса конвекции–диффузии с нелокальным (интегральным) источником для импульсной функции в двумерной плоскости, приведенные в табл. 1, свидетельствуют о следующем.

1. Оценка усредненной относительной погрешности численного решения Δ_1 для неявной нелинейной монотонной схемы расщепления (19)–(21), (39)–(46) (схема II) в случае вырождающейся диффузии уменьшается примерно в 2,7 раза при уменьшении шагов разностной сетки в 3,3 раза. Для схемы I уменьшение погрешности происходит примерно в 1,2 раза. По абсолютной величине среднее относительное отклонение разностного решения от точного для схемы I практически не зависит от увеличения Re_1 и составляет приблизительно 3,7% от точного решения. Для схемы II, в случае больших значений Re_1, при безразмерных параметрах $h^* = 0{,}015$, $\tau^* = 0{,}01$ этот показатель составляет 1,2% точного решения.

2. Оценка относительного отклонения максимума импульсной функции численного решения от аналитического Δ_2 для схемы II уменьшается более чем в 10 раз (приблизительно с 30% до 2,5%) при уменьшении параметров сетки уже в два раза. При $h^* = 0{,}015$, $\tau^* = 0{,}01$ отклонение разностного решения составляет 1,5–2% точного решения. Для схемы I данный показатель уменьшается в 1,6 раза при уменьшении параметров сетки в 3,3 раза. Отклонение принимает минимальное значение 40% от точного решения! Данная оценка не зависит существенно от значительного увеличения разностного числа Рейнольдса для обеих схем.

3. Оценка максимального относительного отклонения численного решения от точного Δ_3 для схемы II уменьшается примерно в 2,8 раза при уменьшении шагов разностной сетки в 3,3 раза. Минимальное значение Δ_3 при $h^* = 0{,}015$, $\tau^* = 0{,}01$ составляет 22%. Эта погрешность наблюдается на фронте импульса и связана с большим градиентом начальной функции в точках данной области. Для схемы I оценка Δ_3 уменьшается примерно в 1,7 раза. Минимальное значение отклонения разностного решения — 48% точного решения.

Полученные результаты для схемы II свидетельствуют о высокой скорости сходимости к нулю относительных отклонений ее разностного решения от точного (в два-пять раз быстрее по сравнению со схемой I) и возможностью практического использования схемы для рассмотренного класса задач при значениях параметров сетки $h^* = 0{,}01$, $\tau^* = 0{,}01$ в случае больших значений разностного числа Рейнольдса и при вырождающейся параболичности. При этих значениях сетки разностное решение в точке максимума имеет погрешность примерно 2%. Дальнейшее уменьшение максимального отклонения разностного решения от точного, по-видимому, возможно при более точной аппроксимации фронта импульса за счет использования динамически адаптирующихся (неравномерных) сеток.

Более медленная скорость сходимости погрешности разностного решения для схемы I объясняется тем, что при больших значениях разностного числа Рейнольдса и в случае полного вырождения диффузии разностная схема I, построенная с помощью операторов направленных разностей, имеет первый порядок аппроксимации по пространственным переменным. Для схем первого порядка характерно значительное «размывание» импульсной функции, до 50% ее амплитуды (см. графики в [5, 6, 8]). Повышение точности разностного решения за счет дальнейшего уменьшения параметров разностной сетки приводит к значительному росту объемов вычислений и существенно ограничивает использование данной схемы в практических задачах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные расчеты демонстрируют эффективность применения на практике разработанной нелинейной монотонной разностной схемы с точки зрения точности, скорости сходимости разностного решения на сгущающихся сетках и числа затрачиваемых операций вычислительного алгоритма для численного решения начально-краевых задач для многомерных интегро-дифференциальных уравнений параболического типа в случае вырождающейся параболичности внутри замкнутых ограниченных подобластей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акименко В.В. Принцип максимума и нелинейные монотонные схемы для уравнений параболического типа // Журн. вычисл. математики и мат. физики — 1999. — **39**, № 4. — С. 618–629.
2. Акименко В.В. Нелинейные монотонные схемы повышенного порядка точности для уравнений переноса // Там же. — 1999. — **39**, № 5. — С. 838–849.
3. Акименко В.В., Наконечный А.Г., Трофимчук О.Ю. Модель оптимального управления для системы интегро-дифференциальных уравнений с вырождающейся параболичностью // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 6. — С. 90–102.
4. Акименко В.В., Наконечный А.Г. Модели оптимального управления процессами межрегиональной миграции в условиях рисков // Там же. — 2006. — № 3. — С. 107–122.
5. Акименко В.В. Моделирование двухмерных процессов переноса при помощи нелинейных монотонных схем второго порядка // Там же. — 2003. — № 6. — С. 75–93.
6. Акименко В.В. О применении нелинейных монотонных схем повышенного порядка аппроксимации в модельной задаче распространения атмосферной примеси // Проблемы управления и информатики. — 1999. — № 3. — С. 98–110.
7. Акименко В.В., Ульшин В.А. О построении монотонных разностных схем для уравнений эллиптического и параболического типов методами линейной регуляризации // Мат. моделирование. — 1998. — **10**, № 2. — С. 79–88.
8. Акименко В.В. Нелинейное монотонное сглаживание неявной разностной схемы для уравнения параболического типа // Проблемы управления и информатики. — 2000. — № 3. — С. 98–106.
9. Прусов В.А., Дорошенко А.Е., Черныш Р.И., Гук Л.Н. Эффективная разностная схема численного решения задачи конвективной диффузии // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 3. — С. 64–76.
10. Фердигалов Л.Ю. Численное решение уравнения движения идеальной жидкости, имеющей завихренность, пропорциональную функции тока // Там же. — 2004. — № 4. — С. 176–183.
11. Марчук Г.И. Методы расщепления. — М.: Наука, 1988. — 264 с.
12. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции–диффузии. — М.: УРСС, 2004. — 246 с.
13. Ладыженская О.А., Солонников О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967. — 736 с.
14. Самарский А.А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1989. — 616 с.
15. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. К.: Наук. думка, 1986. — 544 с.

Поступила 19.09.2008