УДК 519.217:519.718:519.837

А.В. НИКИТИН, И.В. ЮРЧЕНКО, В.К. ЯСИНСКИЙ

УСТОЙЧИВОСТЬ САМОНАСТРАИВАЮЩИХСЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ. I. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ В СРЕДНЕМ КВАДРАТИЧНОМ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ключевые слова: *стохастические самонастраивающиеся системы, автоматическое регулирование, последействие, устойчивость.*

В технической кибернетике большой объем исследований связан с проблемой построения систем автоматического регулирования (САР) для объектов с запаздыванием. САР для объектов с запаздыванием разделяют на одноконтурные и двухконтурные. Динамика замкнутой САР для объектов с запаздыванием описывается как уравнениями запаздывающего, так и нейтрального типа. Зная передаточную функцию и используя обратное преобразование Лапласа, можно построить точные аналитические выражения для процессов в замкнутых САР. Вопросу устойчивости САР объектов с запаздыванием посвящена обширная литература (см. [1] и библиографию к ней — 603 наименования). Изучение областей устойчивости систем автоматического регулирования позволяет решить проблему выбора типа регулятора, исходя из требований к замкнутой САР. Лучших результатов при построении САР можно добиться, используя двухконтурные системы [2, 3].

Исследователи столкнулись с проблемой больших разбросов параметров объекта построения удовлетворительных САР. Оказывается, что при значительных колебаниях параметров объекта построение «хороших» САР возможно при использовании самонастраивающихся систем (СНС) [2, 4, 5], структурная схема которой приведена на рис. 1.

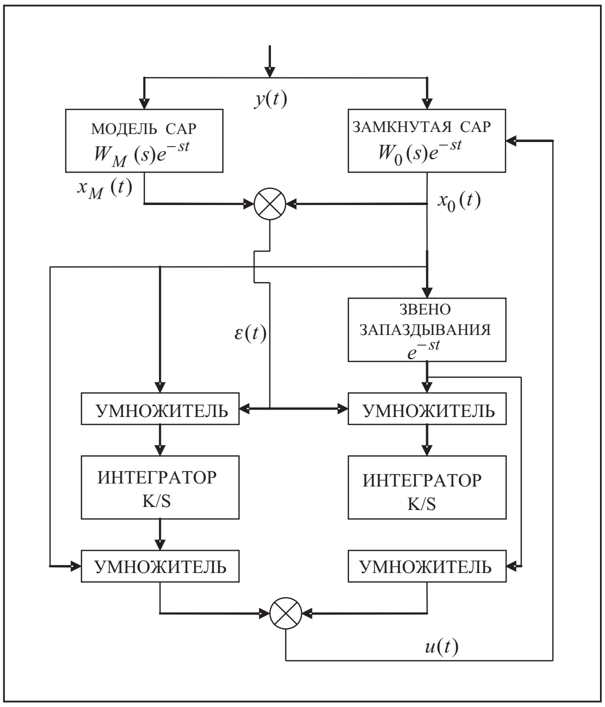

Рис. 1. Схема самонастраивающейся системы для объектов с запаздыванием

Из схемы видно, что СНС для объектов с запаздыванием нелинейна и нестационарна. Поэтому удовлетворительно провести ее анализ в рамках теории линейных стационарных систем невозможно. В [1, § 6.3] проведен анализ СНС на основе второго метода Ляпунова.

Развитие теории стохастических дифференциальных, дифференциально-разностных, функционально-дифференциальных уравнений [6–14] позволяет рассматривать стохастические СНС (ССНС) — более точные математическе модели известных детерминированных СНС.

УСТОЙЧИВОСТЬ В СРЕДНЕМ КВАДРАТИЧНОМ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В СКАЛЯРНОМ СЛУЧАЕ

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, $\mathbb{F} = F_t \subset \mathcal{F}$, $t \geq 0\}$; $\mathbb{R}^1$ — действительное евклидовое пространство [6, 15].

Случай нескольких запаздываний. Случайный процесс $\{x(t) \equiv x(t, \omega)$, $t \geq 0\} \subset \mathbb{R}^1$ определяется как сильное решение стохастического дифференциально-разностного уравнения [6, 16]

$$dx(t) + \sum_{k=0}^{N} a_k x(t - \Delta_k) dt = \sum_{k=0}^{N} b_k x(t - \Delta_k) dw_k(t) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(t - \Delta)|_{t \in [0, \Delta]} = \varphi(t), \tag{2}$$

где $\Delta = \sup_k \Delta_k$, $k = \overline{0, N}$, $\Delta_k \geq 0$, $\Delta_0 = 0$; $\varphi \in C([-\Delta; 0])$; $\{a_k\}, \{b_k\} \subset \mathbb{R}^1\big|_{\pm\infty}$, $w_k(t) \equiv w_k(t, \omega)$ — винеровские случайные процессы с нулевыми сносами и единичными параметрами диффузии $\sigma^2 = 1$, причем они попарно независимы и $\mathcal{F}_t$-измеримы $\forall\, t \geq 0$.

Определение. Под сильным решением (далее просто решением) задачи (1), (2) будем понимать сепарабельный случайный процесс $x(t) \equiv x(t, \omega)$, $t \in [-\Delta, \infty)$, определенный $\forall\, t \in [-\Delta, 0]$ соотношением (2), измеримый относительно σ-алгебры $\mathcal{L}_t \times \mathcal{F}_t$ и такой, что $\forall t \in (0, \infty)$ с вероятностью единица удовлетворяет интегральному уравнению Ито

$$x(t) = \varphi(0) - \sum_{k=0}^{N} a_k \int_0^t x(s - \Delta_k) ds + \sum_{k=0}^{N} b_k \int_0^t x(s - \Delta_k) dw_k(s). \tag{3}$$

Здесь $\mathcal{L}_t$ — σ-алгебра борелевских множеств отрезка $[-\Delta, t]$, $\mathcal{F}_t$ — σ-алгебра, построенная для случайной величины $x(t, \omega)$ при фиксированном $t \in (0, \infty)$.

Пусть $h(t)$ — фундаментальное решение детерминированного уравнения [12]

$$dy(t) + \sum_{k=0}^{N} a_k y(t - \Delta_k) dt = 0 \tag{4}$$

такое, что $h(t) \equiv 0$ $\forall\, t < 0$; $h(0) = 1$ и для $t > 0$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} \upsilon^{-1}(\lambda) d\lambda, \tag{5}$$

где

$$\upsilon(\lambda) \equiv \lambda + \sum_{k=0}^{N} a_k e^{-\Delta k \lambda} \tag{6}$$

— характеристический квазиполином уравнения (4).

Теорема 1. Пусть корни характеристического уравнения $\det V(\lambda) = 0$ лежат в левой полуплоскости. Тогда достаточным условием асимптотической устойчивости в среднем квадратичном тривиального решения $x(t) \equiv 0$ уравнение (1), (2) является выполнение неравенства

$$B \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{|V(is)|^2} \cdot \sum_{k=0}^{N} b_k^2 < 1, \tag{7}$$

где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

Если же $B>1$, то в произвольной малой окрестности нуля существует начальная функция $\varphi \in C([-\Delta,0])$ такая, что $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbb{E}\{x^2(t)\}=\infty$.

Доказательство. Используя фундаментальное решение $h(t)$ для уравнения (4), решение (1), (2) можно записать в интегральном виде (аналог формулы Коши для неоднородных детерминированных уравнений) [7]

$$x(t)=y(t)+\sum_{k=0}^{N} b_k \int_0^t h(t-s)x(s-\Delta_k)dw_k(s),$$

и соответствующие с учетом запаздываний Δ_l, $l=\overline{1,N}$,

$$x(t-\Delta_l)=y(t-\Delta_l)+\sum_{k=0}^{N} b_k \int_0^{t-\Delta_k} h(t-s-\Delta_k)x(s-\Delta_k)dw_k(s), \tag{8}$$

где $y(t)$ — произвольное решение (4).

Обозначив $z_k(t)\equiv x(t-\Delta_k)$, $g_k(t)\equiv h(t-\Delta_k)$, перейдем от уравнения (8) к системе интегральных уравнений $(k,l=\overline{1,N})$

$$z_l(t)=y(t-\Delta_l)+\sum_{k=0}^{N} b_k \int_0^t g_k(t-s)z_k(s)dw_k(s). \tag{9}$$

Возведем в квадрат левую и правую части системы (9), применим математическое ожидание к полученным уравнениям и, используя свойства стохастических интегралов Винера–Ито [6, 17], получим $(l,k=\overline{1,N})$

$$\mu_l(t)=y^2(t-\Delta_l)+\sum_{k=0}^{N} b_k^2 \int_0^t g_k^2(t-s)\mu_k(s)ds, \tag{10}$$

где $\mu_l(t)=\mathbb{E}\{z_l^2(t)\}$, $\mathbb{E}\{\cdot\}$ — операция математического ожидания.

Применив преобразование Лапласа $\mathcal{L}\{\cdot\}$ [13] к обеим частям (10), получим

$$M_l(\lambda)=y^2(t-\Delta_l)+\sum_{k=0}^{N} b_k^2 G_k(\lambda)M_k(\lambda), \tag{11}$$

где $G_k(\lambda)=\mathcal{L}\{g_k(t)\}$, $M_l(\lambda)=\mathcal{L}\{\mu_l(t)\}$; $k,l=\overline{0,N}$.

Поскольку корни характеристического квазиполинома $V(\lambda)$ (5) уравнения (4) лежат в полуплоскости $\lambda<0$ по условию теоремы 1, то произвольное решение (4) стремится к нулю при $t\to+\infty$ не медленнее, чем $e^{-\beta t}$, $\beta>0$, с отрицательным показателем [13]. Поэтому $\mathcal{L}\{y^2(t-\Delta_l)\}$, $l=\overline{0,N}$, не имеет особенностей в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda<0$, т.е. особые точки вектор-изображения $\{M_l(t)\}$, $l=\overline{0,N}$, совпадают с нулями определителя системы (11), который после преобразования примет вид

$$\sum_{k=0}^{N} G_k(\lambda)b_k^2=1$$

или

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{N} g_k^2(t)b_k^2\right\}=1. \tag{12}$$

Таким образом, вопрос устойчивости решения системы (10) диктуют корни уравнения (12).

Отметим, что при $\operatorname{Re}\lambda\geq 0$

$$\left|\mathcal{L}\sum_{k=0}^{N} g_k^2(t)b_k^2\right|\leq \sum_{k=0}^{N}\int_0^\infty g_k^2(t)b_k^2dt. \tag{13}$$

Это следует из того, что под знаком интеграла по t в (12) стоит неотрицательная функция и поэтому она достигает наибольшего значения по абсолютной величине на действительной оси $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$.

Значит, если правая часть неравенства (13) меньше единицы, то изображение вектор-функции $\{\mu_l(t)\}$, $l=\overline{0,N}$, не имеет полюсов в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$. Тогда $\lim\limits_{t\to+\infty} \mu_k(t)=0$, $l=\overline{0,N}$ [13].

Используя выражение (5) для $h(t)$, легко подсчитать выражение

$$\int_0^\infty g_k^2(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{ds}{|V(is)|^2}, \quad k=\overline{0,N}, \tag{14}$$

что и доказывает первую часть теоремы 1.

Если $B>1$, то с учетом (14) имеем $\sum\limits_{k=0}^N b_k \int\limits_0^\infty g_k(t)dt>1$. Поскольку $f(s)\equiv \sum\limits_{k=0}^N \int\limits_0^\infty e^{-st} g_k^2(t) b_k^2 dt$ для действительных положительных $s>0$ — непрерывная функция и $\lim\limits_{s\to+\infty} f(s)=0$, то существует $s_0>0$ такое, что $f(s_0)=1$. Тогда изображение вектора $\{\mu_l(t)\}$, $l=\overline{0,N}$, имеет полюс в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda = s_0>0$, а оригинал $\lim\limits_{t\to+\infty} \mu_l(t)=\infty$, $l=\overline{0,N}$ [13]. Вторая часть теоремы 1 доказана. ■

Скалярный случай с несколькими возмущениями и запаздываниями. Рассмотрим стохастическое дифференциально-разностное уравнение (СДРУ), которое определяет сильное решение $x(t)\equiv x(t,\omega)\in\mathbb{R}^1$

$$dx(t)+\sum_{k=0}^N a_k x(t-\Delta_k)dt = \sum_{l=0}^L\sum_{k=0}^N b_{kl}x(t-\Delta_k)dw_l(t) \tag{15}$$

с начальными условиями

$$x(t-\Delta)|_{t\in[0,\Delta]}=\varphi(t), \tag{16}$$

где $\Delta\equiv\sup\limits_k \Delta_k$, $k=\overline{0,N}$, $\Delta_0=0$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}^1\big|_{\pm\infty}$, $w_l(t)$ — процессы броуновского движения с $M\{w_l(t)\}\equiv 0$, $D\{w_l(t)\}=\sigma_k$, $l=\overline{0,N}$, причем они попарно независимы.

Аналогично теореме 1 верна следующая теорема.

Теорема 2. Если корни квазиполинома $V(\lambda)$ лежат в левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda<0$, то при выполнении неравенства

$$B\equiv\frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^L \sigma_l \int_0^\infty \left|\sum_{k=0}^N b_{kl}e^{-i\Delta_k s}\right|^2 |V^{-1}(is)|^2\, ds<1 \tag{17}$$

тривиальное решение $x(t)\equiv 0$ задачи (15), (16) асимптотически устойчиво в среднем квадратичном (здесь $i=\sqrt{-1}$ — мнимая единица).

Если $B>1$, то в произвольной малой окрестности нуля найдется такая начальная функция $\varphi(t)$, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbb{E}\{x^2(t)\}=+\infty$.

Алгебраический критерий устойчивости в среднем квадратичном для скалярного уравнения *n*-го порядка. Рассмотрим скалярное СДРУ n-го порядка, которое определяет сильное решение $x(t)\equiv x(t,\omega)\in\mathbb{R}^1$ на вероятностном базисе $(\Omega, F, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ [16]

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n}+\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{n-1}a_{kj}\frac{d^j x(t-\Delta_k)}{dt^j}=\sum_{l=0}^{L}\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{n-1}b_{kjl}\frac{d^j x(t-\Delta_k)}{dt^j}\frac{dw_l(t)}{dt} \tag{18}$$

с начальными условиями

$$\left.\frac{d^j x(t-\Delta)}{dt^j}\right|_{t\in[-\Delta,\,t]}=\varphi^{(j)}(t),\ \ j=\overline{0,n-1}. \tag{19}$$

Теорема 3. Пусть корни характеристического квазиполинома

$$V(\lambda)=\lambda^n+\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{n-1}a_{kj}\lambda^j e^{-\Delta_k\lambda}$$

расположены в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda<0$:

1) если

$$B\equiv\frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{L}\sigma_l\int_0^\infty\left|\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{n-1}b_{kjl}(is)e^{-i\Delta_k s}\right|^2|V^{-1}(is)|^2\,ds<1, \tag{20}$$

решение $x(t)\equiv 0$ уравнения (18), (19) асимптотически устойчиво в l.i.m (в (20) $i=\sqrt{-1}$ — мнимая единица);

2) если $B>1$, то $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbb{E}\{x^2(t)\}=+\infty$.

Доказательство. От уравнения (18) перейдем к системе уравнений [7]

$$x^{(r)}(t)=y^{(r)}(t)+\sum_{l=0}^{L}\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{n-1}b_{kjl}\int_0^t h^{(r)}(t-s)x^{(j)}(s-\Delta_k)dw_l(s), \tag{21}$$

где $r=\overline{0,n-1}$, $x^{(r)}(t)$ $(r=\overline{0,n-1})$ — производная r-го порядка, $h(t)$ — фундаментальное решение детерминированного невозмущенного уравнения

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n}+\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{n-1}a_{kj}\frac{d^j x(t-\Delta_k)}{dt^j}=0 \tag{22}$$

такое, что $h(t)=h'(t)=\ldots=h^{(n-2)}(t)\equiv 0$ для $t<0$; $h^{(n-1)}(0)=1$, а $\forall\ t>0$

$$h(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_G e^{\lambda t}V^{-1}(\lambda)d\lambda,$$

произвольное $y(t)$ — решение уравнения (22).

Введем обозначения

$$x^{(r)}(t-\Delta_k)\equiv z_k^{(r)}(t);\ \ g_k^{(r)}(t)\equiv h^{(r)}(t-\Delta_k).$$

После соответствующих преобразований, перейдем от системы уравнений (21) к системе

$$z_p^{(r)}(t)=y^{(r)}(t-\Delta_k)+\sum_{l=0}^{L}\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{n-1}b_{kjl}\int_0^t g_p^{(r)}(t-s)z_k^{(j)}(s)dw_l(s), \tag{23}$$

где $r=\overline{0,n-1}$, $p=\overline{0,n}$.

Уравнения системы (23) перемножим попарно, учитывая совпадающие индексы, применим операцию математического ожидания $\mathbb{E}\{\cdot\}$ к полученным выражениям и с помощью свойства стохастических интегралов [6, 7] запишем для

$\mu_{prdm}(t) \equiv \mathbb{E}\{z_p^{(r)}(t) z_m^{(d)}(t)\}$ систему интегральных уравнений

$$\mu_{prdm}(t) = y^{(r)}(t-\Delta_p) y^{(d)}(t-\Delta_m) +$$

$$+\sum_{l=0}^{L}\sum_{k=0}^{N}\sum_{\nu=0}^{N}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} b_{kjl} b_{\nu il} \sigma_l \int_0^t g_p^{(r)}(t-s) g_m^{(d)}(t-s)_{k\nu ji}(s) ds.$$

К каждому из интегральных уравнений применим преобразование Лапласа [13], в результате для изображений $M_{k\nu ji}(\lambda) \equiv \mathcal{L}\{\mu_{k\nu ji}(t)\}$; $G_{prdm}(\lambda) \equiv \equiv \mathcal{L}\{g_p^{(r)}(t) g_m^{(d)}(t)\}$ получим интегральные уравнения

$$M_{prdm}(\lambda) = \mathcal{L}\{y^{(r)}(t-\Delta_p) y^{(d)}(t-\Delta_m) +$$

$$+\sum_{l=0}^{L}\sum_{k=0}^{N}\sum_{\nu=0}^{N}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} b_{kjl} b_{\nu ji} \sigma_l G_{prdm}(\lambda) M_{k\nu ji}(\lambda)\}. \tag{24}$$

Из условий теоремы 3 следует, что полюса вектор-изображений $\{M_{k\nu jm}(\lambda)\}$ могут появиться лишь в тех точках λ, в которых определитель системы (24) равен нулю.

Если вычислить этот определитель, то легко записать его в виде

$$\sum_{l=0}^{L}\sum_{k=0}^{N}\sum_{\nu=0}^{N}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} b_{kjl} b_{\nu jl} \sigma_l G_{k\nu ji}(\lambda) = 1$$

или

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{l=0}^{L}\left[\sigma_l \sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{n-1} b_{kjl} g_k^{(j)}(t)\right]^2\right\} = 1,$$

а для $\operatorname{Re}\lambda > 0$ можно записать очевидное неравенство

$$\left|\mathcal{L}\left\{\sum_{l=0}^{L}\left[\sigma_l \sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{n-1} b_{kjl} g_k^{(j)}(t)\right]^2\right\}\right| \le \sum_{l=0}^{L} \sigma_l^2 \int_0^\infty \left(\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{n-1} b_{kjl} g_k^{(j)}(t)\right)^2 = B_1. \tag{25}$$

Значит, если правая часть неравенства (25) меньше 1, то вектор-изображение $\{M_{prdm}(\lambda)\}$ не имеет полюсов в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$ и тогда $\lim\limits_{t\to\infty} \mu_{prdm}(t) = 0$ для $p, m = \overline{0, N}$; $r, d = \overline{0, n-1}$ [13].

Далее, используя выражение для $h(t)$ при $t > 0$, можно убедиться в равенстве $B = B_1$, и утверждение 1 теоремы 3 доказано.

Для доказательства утверждения 2 теоремы 3 установим, что из $B > 1$ следует $B_1 > 1$. Далее замечаем, что функция

$$f(s) \equiv \sum_{l=0}^{L}\left[\sigma_l \int_0^\infty e^{-st}\left[\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{n-1} b_{kjl} g_k^{(j)}(t)\right]^2 dt\right]$$

для действительных положительных $s > 0$ непрерывная и $\lim\limits_{s\to\infty} f(s) = 0$. Тогда существует такое $s_0 > 0$, что $f(s_0) = 1$, т.е. вектор-изображение $\{M_{prdm}(\lambda)\}$ имеет полюс в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Значит, оригинал $\mu_{prdm}(t)$ неограниченно возрастает при $t \to +\infty$ [13], что и доказывает полностью теорему 3. ■

Устойчивость решений в l.i.m. систем стохастических дифференциально-разностных уравнений. Получим интегральный критерий устойчивости в l.i.m. систем СДРУ первого порядка в пространстве Скорохода [6, 14]. Рассмотрим случайный процесс $x(t) \in \mathbb{R}^n$ как сильное решение системы СДРУ первого порядка

$$dx(t)+\sum_{j=0}^{m} A_j x(t-\Delta_j)dt=\sum_{j=0}^{m}[dW_j(t)]x(t-\Delta_j)+$$

$$+\sum_{j=0}^{m}\int_{\mathbb{U}} f_j(u)b_j x(t-\Delta_j)\tilde{\nu}(dt,du) \tag{26}$$

по начальным условиям

$$x(t)|_{t\in[-\Delta,0]}=\varphi(t)\in\mathbb{R}^n, \tag{27}$$

где $\Delta=\sup_j \Delta_j$, $\Delta_0=0$, $\Delta_j>0$, $j=\overline{0,m}$, $W_j(t)\equiv W_j(t,\omega)$ — матрица, состоящая из независимых в совокупности процессов броуновского движения $w_{lk}^{(j)}(t)$ с матрицей параметров диффузии S_j; $A_j\equiv\{a_{lk}^{(j)}\}$, $l,k=\overline{0,n}$; $B_j\equiv\{b_{lk}^{(j)}\}$, $l,k=\overline{0,n}$, — матрицы с действительными элементами; $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1$ — измеримые в совокупности по $u\in\mathbb{R}^m$; $\nu_j(t,A)$ — пуассоновская мера в $\mathbb{R}^m$ [6] такая, что

$$\tilde{\nu}_j(t,A)\equiv\nu_j(t,A)-t\Pi(A), \tag{28}$$

где $A\in[t_0,t]\times\mathbb{R}^m$, при этом $\nu_j(t,A)$ не зависят от элементов матриц $W_j(t)$, $k,j=\overline{0,n}$.

Пусть $h(t)$ — фундаментальная матрица системы детерминированных дифференциально-разностных уравнений

$$dy(t)+\sum_{j=0}^{n} A_j y(t-\Delta_j)dt=0. \tag{29}$$

Тогда от системы СДРУ (26) можно перейти к системе интегральных уравнений, используя фундаментальную матрицу $h(t)$:

$$x(t)=y(t)+\sum_{j=0}^{n}\int_0^t h(t-s)[dw_j(s)]x(s-\Delta_j)+$$

$$+\sum_{j=0}^{n}\int_0^t\int_{\mathbb{U}} f_j(u)h(t-s)B_j x(s-\Delta_j)\tilde{\nu}_j(ds,du), \tag{30}$$

где $y(t)$ — произвольное решение системы (21).

Возведем построчно в квадрат обе части системы уравнений (30), применим операцию математического ожидания $\mathbb{E}\{\cdot\}$ и, используя свойства стохастических интегралов [6, 15–17], получим

$$\mu(t)=y^{②}(t)+\sum_{j=0}^{n}\int_0^t h^{②}(t-s)S_j\mu(s-\Delta_j)ds+$$

$$+\sum_{j=0}^{n}\int_0^t\int_{\mathbb{U}} f_j^{②}(u)h^{②}(t-s)B_j^{②}\mu_j(s-\Delta_j)\frac{du}{u^{m+1}}ds, \tag{31}$$

где $\mu(t)\equiv\mathbb{E}\{x^{②}(t)\}$.

Далее верхний индекс ② вектора или матрицы означает, что элементы вектора или матрицы возведены в квадрат.

Теорема 4. Пусть корни характеристического квазиполинома

$$\det V(\lambda) \equiv \det\left[I \cdot \lambda + \sum_{j=0}^{n} A_j e^{-\Delta_j \lambda} \right]$$

расположены в левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

Тогда верны утверждения:

1) если собственные значения $\lambda(D)$ матрицы

$$D \equiv \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{n} \left\{ [V^{-1}(is)]_+^{②} S_j ds + \int_{\mathbb{U}} f_j^{②}(u) \frac{du}{|u|^{m+1}} \int_0^{\infty} [V^{-1}(is)]_+^{②} ds \right\} \tag{32}$$

удовлетворяют условию $|\lambda(D)| < 1$, то тривиальное решение системы (26), (27) асимптотически устойчиво в l.i.m.;

2) если хотя бы одно собственное значение $\lambda(D)$ матрицы D удовлетворяет условию $|\lambda(D)| > 1$, то в произвольной малой окрестности нуля найдется начальная функция $\varphi(t)$ такая, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \mu(t) = +\infty$.

Здесь и далее нижний индекс + означает, что элементы вектора или матрицы взяты по модулю.

Доказательство. Применив преобразование Лапласа [13] к обеим частям уравнений (31), получим для $M(\lambda) \equiv \mathcal{L}\{\mu(t)\}$; $Y(\lambda) \equiv \mathcal{L}\{y^{②}(t)\}$; $H(\lambda) \equiv \mathcal{L}\{h^{②}(t)\}$ интегральное уравнение для изображения

$$M(\lambda) = Y(\lambda) + \sum_{j=0}^{n} [H(\lambda) s_j e^{-\Delta_j \lambda} + \int_{\mathbb{U}} f_j^{②}(u) \frac{du}{|u|^{m+1}} H(\lambda) B_j^{②} e^{-\Delta_j \lambda}] M(\lambda). \tag{33}$$

По условию теоремы 4 нули $\det V(\lambda)$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$, тогда особенности вектор-изображения $M(\lambda)$ находятся в нулях определителя

$$\Phi(\lambda) \equiv \det[I - N(\lambda)],$$

где

$$N(\lambda) \equiv H(\lambda) \sum_{j=0}^{n} \left[S_j + \int_{\mathbb{U}} f_j^{②}(u) \frac{du}{|u|^{m+1}} \right] e^{-\Delta_j \lambda}.$$

Матрица $N_+(\lambda)$ имеет положительные собственные значения $\gamma(\lambda)$ по модулю не меньше всех других собственных значений, тогда и все собственные значения матрицы $N(\lambda)$ удовлетворяют условию $|\lambda(N)| < \gamma(\lambda)$ [18]. Далее из определения матрицы $N(\lambda)$ следует, что $\max\limits_{\operatorname{Re}\lambda = c} \gamma(\lambda) = \gamma(c)$, где $c \in \mathbb{R}^1$.

Доказательство утверждения 1 проведем от противного. Пусть $\Phi(\lambda_0) = 0$, где $\operatorname{Re}\lambda_0 > 0$, тогда матрица $N(\lambda_0)$ имеет собственное значение, равное 1, и $\gamma(\operatorname{Re}\lambda_0) \ge 1$. Поскольку конструктивно элементы матрицы $N_+(\operatorname{Re}\lambda)$ не возрастают, то $\gamma(\operatorname{Re}\lambda)$ не увеличивается при увеличении $\operatorname{Re}\lambda$ [18]. Таким образом, $\gamma(0) \ge 1$, где $\gamma(0)$ — собственное значение матрицы

$$N(0) = H(0) \sum_{j=0}^{n} \left[S_j + \int_{\mathbb{U}} f_j^{②}(u) \frac{du}{|u|^{m+1}} \right]. \tag{34}$$

Легко видеть, что $N(0) = D$, тогда утверждение, что $\gamma(0) \ge 1$, противоречит утверждению 1.

Докажем утверждение 2 о том, что хотя бы одно собственное значение $\lambda(D)$ матрицы D по модулю больше 1. Значит, $\gamma(0) > 1$ и, учитывая непрерывность $\gamma(s)$ [13], получим, что $\lim\limits_{s\to+\infty} \gamma(s) = 0$. Это дает право утверждать, что существует s_0 такое, что

$\gamma(s_0)=1$, а это означает, что $\Phi(s_0)=0$ для $s_0>0$. Таким образом, $\lim\limits_{t\to+\infty}|\mu(t)|$ увеличивается не медленнее $e^{s_0 t}$ [12]. Это и доказывает утверждение 2 теоремы 4. ■

Замечание 1. Если $B_j\equiv 0$, $j=\overline{0,n}$, то получим известный результат [7] для системы СДРУ с непрерывными винеровскими возмущениями в терминах матриц

$$D\equiv\frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{n}\int_0^\infty [V^{-1}(is)]_+^{②} S_j\, ds.$$

Случай систем СДРУ *N*-го порядка. Рассмотрим случайный процесс $x(t)\equiv x(t,\omega)\in\mathbb{R}^n$ на вероятностном базисе $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{P})$ как сильное решение системы СДРУ с конечным последействием

$$I\frac{d^N x(t)}{dt^N}+\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{m}A_{jk}\frac{d^j x(t-\Delta_k)}{dt^j}=\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{m}\left[\frac{dW_{jk}(t)}{dt}\cdot\frac{d^j x(t-\Delta_k)}{dt^j}\right]+$$

$$+B_{jk}\int_{\mathbb{U}} f_{jk}(u)\frac{d^j x(t-\Delta_k)}{dt^j}\tilde{\nu}_{jk}(dt,du) \tag{35}$$

с начальными условиями

$$\left.\frac{d^j x(t)}{dt^j}\right|_{t\in[-\Delta,0]}=\varphi(t)\in\mathbb{R}^n;\ \ j=\overline{0,N-1};\ \ \Delta=\sup_k\Delta_k, \tag{36}$$

где $\Delta_k\ge 0$; $\Delta_0=0$; I — диагональная единичная матрица; $W_{jk}(t)\equiv\{\xi_{jk}^{(pq)}\}$, $p,q=\overline{1,n}$, — матрицы, построенные из независимых в совокупности процессов броуновского движения с нулевым сносом и матрицами с параметром диффузии S_{jk}; $\tilde{\nu}_{jk}(t,A)\equiv\nu_{jk}(t,A)-\Pi_{jk}(t,A)$ — центрированные пуассоновские меры с параметрами $\Pi_{jk}(t,A)=M\{\nu_{jk}(t,A)\}$, причем они не зависимы от элементов матрицы $W_{jk}(t)$; A_{jk} и B_{jk} — матрицы с действительными элементами.

Заметим, что уравнения (35) следует рассматривать как соответствующую систему из $N\cdot n$ стохастических дифференциально-разностных уравнений и оно имеет единственное с точностью до стохастической эквивалентности сильное решение [15–17].

Пусть $h(t)$ — матричное решение системы детерминированных уравнений

$$\frac{d^N y(t)}{dt^N}+\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{m}A_{jk}\frac{d^j y(t-\Delta_k)}{dt^j}=0 \tag{37}$$

такое, что $h(t)\equiv 0_{n\times n}$ при $t<0$; $h(0)=h'(0)=\ldots=h^{N-2}(0)=0_{n\times n}$; $h^{N-1}(0)=I$, а $\forall\, t>0$

$$h^{(j)}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^j e^{\lambda t}V^{-1}(\lambda)d\lambda, \tag{38}$$

где контур Γ охватывает все нули квазиполинома системы (37)

$$\det V(\lambda)\equiv\det\left[I\lambda^n+\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{m}A_{jk}\lambda^j e^{-\Delta_k\lambda}\right]. \tag{39}$$

Используя формулу из [7] — аналог формулы Коши для неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) — можно перейти от (35) к системе

$$x^{(l)}(t)=y^{(l)}(t)+\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{m}\int_0^t\left[h^{(l)}(t-\tau)dw_{jk}(\tau)x^{(j)}(\tau-\Delta_k)+\right.$$

$$\left.+B_{jk}\int_{\mathbb{U}} f_{jk}(u)\widetilde{\nu}_{jk}(d\tau,du)x^{(j)}(\tau-\Delta_k)\right], \tag{40}$$

$l=\overline{0,N-1}$, где $y(t)$ — любое решение ОДУ (37).

Теорема 5. Пусть корни квазиполинома $\det V(\lambda)$ (39) лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda<0$:

1) если для матрицы

$$B\equiv\frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{m}\int_0^\infty\left\{S_{jk}+\int_{\mathbb{U}} f_{jk}^{②}[B_{jk}]_+^{②}\frac{du}{|u|^{m+1}}\right\}|(is)^j|^2\,[V^{-1}(is)]_+^{②}\,ds \tag{41}$$

спектральный радиус $r(B)<1$, то тривиальное решение $x(t)\equiv 0$ системы СДРУ (35), (36) асимптотически устойчиво в l.i.m;

2) если корень Перрона $\gamma(\lambda)$ матрицы B больше единицы $(\gamma(\lambda)>1)$, то $\lim\limits_{t\to\infty} M\{\|x(t)\|^2\}=+\infty$.

Доказательство. Возведем в квадрат строки обеих частей системы (40), применим к полученным выражениям операции математического ожидания $\mathbb{E}\{\cdot\}$ и, используя свойства стохастических интегралов Ито и Скорохода, получим систему уравнений N n-го порядка для $\mu_l(t)\equiv M\{[x^{(l)}(t)]^{②}\}$, $l=\overline{0,N-1}$:

$$\mu_l(t)=[y^{(l)}(t)]^{②}+$$

$$+\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{m}\int_0^t[h^{(l)}(t-\tau)]^{②}\left\{S_{jk}+B_{jk}\int_{\mathbb{U}} f_{jk}^{②}(u)\frac{du}{|u|^{n+1}}\right\}\mu_j(t-\Delta_k)dt. \tag{42}$$

Далее, применив к обеим частям (42) преобразование Лапласа [13], легко записать соответствующую систему для изображений $M_l(\lambda)\equiv\mathcal{L}\{\mu_l(t)\}$; $Y_l(\lambda)\equiv\mathcal{L}\{[y^{(l)}]^{②}\}$; $H_l(\lambda)\equiv\mathcal{L}\{[h^{(l)}(t)]^{②}\}$:

$$M_l(\lambda)=Y_l(\lambda)+\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{m}H_l(\lambda)\left\{S_{jk}+B_{jk}^{②}\int_{\mathbb{U}} f_{jk}^{②}(u)\frac{du}{|u|^{n+1}}\right\}e^{-\Delta_k\lambda}M_j(\lambda)\times$$

$$\times\mu_j(t-\Delta_k)dt. \tag{43}$$

Если $r(B)<1$, то произвольное решение (37) по модулю стремится к нулю при $t\to+\infty$ не быстрее e^{ct} с отрицательным показателем [12]. Тогда $Y_l(\lambda)$ не имеет особенностей в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda\ge 0$ [13]. Таким образом, особенности вектора $M_l(\lambda)$ совпадают с нулями определителя $F(\lambda)$ системы (43).

Для дальнейшего доказательства теоремы 5 проведем элементарные преобразования: сначала умножим слева первую строку на $-H(\lambda)H_0^{-1}(\lambda)$ и прибавим к r-й строке, затем умножим слева r-ю строку на $H_0(\lambda)\sum\limits_{k=0}^{m}\left\{S_{rk}+B_{rk}\int_{\mathbb{U}} f_{rk}^{②}(u)\frac{du}{|u|^{n+1}}\right\}$ и прибавим к первой строке ($r=2,3,\dots,N-2$). В результате получим определитель

$$F(\lambda)=\det[I-L(\lambda)], \tag{44}$$

где

$$L(\lambda)\equiv H_0(\lambda)\left\{\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{m}\left[S_{jk}+B_{jk}^{②}\int_{\mathbb{U}} f_{jk}^{②}(u)\frac{du}{|u|^{n+1}}\right]H_j(\lambda)e^{-\Delta_k\lambda}H_0^{-1}(\lambda)\right\}.$$

Согласно [18] матрица $L_+(\lambda)$ имеет корень Перрона, как матрица с положительными элементами, по модулю не меньший всех других собственных значений. Обозначим корень Перрона через $\gamma(\lambda)$. Известно [18], что все собственные значения $|\lambda(L_+)|\le\gamma(\lambda)$. Из построения матриц следует, что $\max\limits_{\operatorname{Re}\lambda=c}\gamma(\lambda)=\gamma(c)$, $c>0$.

Доказательство утверждения 1 теоремы 5 проведем от противного. Пусть $F(\lambda_0)=0$, но $\operatorname{Re}\lambda_0>0$. Тогда $L(\lambda)$ имеет собственное значение 1 и $\gamma(\operatorname{Re}\lambda_0)\ge 1$. Но $\gamma(\operatorname{Re}\lambda)$ не возрастает при увеличении $\operatorname{Re}\lambda$, поскольку элементы матрицы $L_t(\operatorname{Re}\lambda)$ не возрастают [18]. Отсюда сразу следует, что $\gamma(0)\ge 1$.

Используя выражение (38) для $h^{(j)}(t)$, получим

$$H_j(0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty |(is)^j|^2\,[V^{-1}(is)]_+^{②}\,ds.$$

Значит, очевидно, что матрица $L(0)$ подобна матрице B (41) из условия (41) теоремы 5. Таким образом, матрица B имеет собственные значения $\gamma(0)\ge 1$, что противоречит условию $r(B)<1$ для утверждения 1.

Докажем утверждение 2 теоремы 5. Пусть корень Перрона $\gamma(s)$ матрицы B больше 1 $(\gamma(s)>1)$. Тогда и $\gamma(0)>1$. Заметим, что при действительных s предел $\lim\limits_{s\to+\infty}\gamma(s)=0$ и $\gamma(s)$ — непрерывная функция действительных s [18].

Итак, существует действительное $s_0>0$ такое, что $\gamma(s_0)=1$. А это означает, что $F(s_0)=0$ при $s_0>0$. Значит, и $F(s_0)=0$ при $s_0>0$. Таким образом, $\mu_l(t)$, $l=\overline{0,N-1}$, увеличивается при $t\to+\infty$ не медленнее, чем e^{st} [13], что и доказывает утверждение 2 теоремы 5. ■

Замечание 2. При $B_{kj}\equiv 0$ получим известный результат [19] для диффузионной линейной стохастической системы в терминах матрицы

$$B\equiv\frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{m}S_{jk}\int\limits_0^\infty |(is)^j|^2\,[V^{-1}(is)]_+^{②}\,ds.$$

Асимптотическая устойчивость в l.i.m. систем СДРУ общего вида. Рассмотрим систему более общего вида:

$$x_i^{(n_i)}(t)+\sum_{k=1}^{Q}\sum_{j=0}^{n_i-1}\sum_{r=0}^{R}a_{kjri}x_k^{(j)}(t-\Delta_k)=\sum_{k=1}^{Q}\sum_{j=0}^{n_i-1}\sum_{r=0}^{R}x_k^{(j)}(t-\Delta_r)\xi_{kjri}(t)+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^1} f_{jr}(u)b_{kjri}x_k^{(j)}(t-\Delta_r)\tilde{\nu}_{jr}(du,dt) \qquad (45)$$

с начальными условиями

$$x_i^{(n_i)}(0)=0;\ x_i^{(n_i-1)}(0)=1;\ i=1,2,\dots,Q, \qquad (46)$$

где $x_i(t)\in\mathbb{R}^1$; $\Delta_2\ge 0$, $r=\overline{1,R}$, $\Delta_0=0$; $\xi_{kjri}(t)$ — независимые в совокупности процессы броуновского движения с $M\{\xi_{kjri}(t)\}=0$ и $D\{\xi_{kjri}(t)\}=\sigma_{kjri}$; $\nu_{kjri}(t,A)$ — случайные пуассоновские меры, независимые в совокупности и попарно независимые с $\xi_{kjri}(t)$. Пусть N — наибольший порядок производных в системе (45), $N\equiv\sup\limits_{0\le i\le Q}n_i$. Тогда (45) можно записать в матричном виде (35):

$$\mathcal{K}\frac{d^N x(t)}{dt^N}+\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{R}A_{jr}\frac{d^j x(t-\Delta_r)}{dt^j}=$$

$$=\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{R}\left[\frac{dw_{jr}(t)}{dt}\frac{d^j x(t-\Delta_r)}{dt^j}+B_{jr}\int_{\mathbb{R}^Q}f_{jr}(u)\frac{d^j x(t-\Delta_r)}{dt^j}\tilde{\nu}_{jr}(dt,du)\right], \qquad (47)$$

где $x(t)\in\mathbb{R}^Q$, а вместо единичной матрицы I при $\dfrac{d^N x(t)}{dt^N}$ стоит некоторая вырожденная матрица

$$\mathcal{K}\cdot A_{jr}\equiv\{a_{kjri}+\alpha_{kjri}\}^T,\ k,i=\overline{1,Q},$$

где $a_{kjri}=0$, если в i-й строке стоит N-я производная; если в i-й строке N-й производной не содержится, то $\alpha_{ln_i\cdot i}=1$; $B_{jr}\equiv\{b_{kjri}\}^T$; $w_{jr}(t)\equiv\{\xi_{kjri}(t)\}^T$, $k,i=\overline{1,Q}$; $\tilde{\nu}_{jr}(t,A)\equiv\{\tilde{\nu}_{kjri}(t,A)\}^T$.

Теорема 6. Пусть корни квазиполинома

$$\det V_0(\lambda)\equiv\det\left[\mathcal{K}\lambda^N+\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{R}A_{jr}\lambda^j e^{-\Delta_r\lambda}\right] \qquad (48)$$

лежат в левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda<0$.

Тогда:

1) если спектральный радиус $r(B_0)<1$ матрицы

$$B_0=\frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{R}\int_0^\infty\left\{S_{jr}^T+\int_{\mathbb{R}^n}f_{jr}^{②}(u)\frac{du}{|u|^{Q+1}}[B_{jr}]_+^{②}\right\}|(is)^j|^2\,[V_0^{-1}(is)]_+^{②}\,ds; \qquad (49)$$

$S_{jr}^T\equiv\{\sigma_{qiri}\}$, $q,i=\overline{1,Q}$, то $x(t)\equiv 0$ системы СДРУ (45), (46) асимптотически устойчиво в l.i.m (здесь $i=\sqrt{-1}$ — мнимая единица);

2) если $r(B_0)>1$, то $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbb{E}\{|x(t)|^2\}=0$.

Доказательство. Пусть $h(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}V_0^{-1}(\lambda)d\lambda$ — фундаментальная матрица соответствующей системы обыкновенных дифференциально-разностных уравнений (45) с квазиполиномом $V_0(\lambda)$.

Тогда от системы (45) перейдем к системе интегральных уравнений

$$x_i^{(k_i)}(t)=y_i^{(k_i)}(t)+\sum_{k=1}^{Q}\sum_{j=0}^{n_i-1}\sum_{r=0}^{R}\int_0^t h_{k_i}^{(k_i)}(t-\tau)\left\{\xi_{kjri}(\tau)+\right.$$

$$\left.+b_{kjri}\int_{\mathbb{R}^1}f_{jr}(u)\tilde{\nu}_{jr}(du,d\tau)\right\}, \qquad (50)$$

где $y_i^{(k_i)}(t)$, $k_i=0,1,\ldots,n_i-1$, — произвольное решение соответствующей системы.

Возведем построчно обе части (50) в квадрат, применим операцию математического ожидания $\mathbb{E}\{\cdot\}$ и с помощью преобразования Лапласа $\mathcal{L}$ получим систему для изображений

$$M_i^{(k_i)}(\lambda)=Y_i^{(k_i)}(\lambda)+\sum_{k=1}^{Q}\sum_{j=0}^{n_i-1}\sum_{r=0}^{R}H_{k_i}^{(k_i)}(\lambda)\times$$

$$\times\left[S_{jr}^{*}+B_{jr}^{②}\int_{\mathbb{R}^Q}f_{jr}^{②}(u)\frac{du}{|u|^{Q+1}}\right\}e^{-\Delta_r\lambda}M_k^{(j)}(\lambda), \tag{51}$$

где $M_i^{(k_i)}(\lambda)=\mathcal{L}\{\mu_i^{(k_i)}(t)\}$; $\mu_i^{(k_i)}(t)\equiv\mathbb{E}\{[x_i^{(k_i)}(t)]^{②}\}$, $Y_i^{(k_i)}(\lambda)\equiv\mathcal{L}\{[y_i^{(k_i)}(t)]^{②}\}$; $H_i^{(k_i)}(\lambda)\equiv\mathcal{L}\{[h_{k_i}^{(k_i)}(t)]^{②}\}$.

Из условий теоремы 6 следует, что особенности вектора $M_i^{(k_i)}(\lambda)$ находятся в нулях определителя системы (51). Обозначим

$$\sup_{1\le i\le Q} u_i = N_{T_s}, \tag{52}$$

где в случае нескольких (одинаковых) экстремумов $s=1,2,\ldots,m$.

Случай 1. Из условия $m=Q$ из (51) следует, что максимальные по порядку производные системы имеют одинаковые порядки: $n_1=n_2=\ldots=n_Q=N_{T_s}$. Тогда, записывая определитель системы (51) в блочном виде (порядки блоков равны Q), видим, что определитель совпадает с определителем системы (43) и далее справедливо доказательство теоремы 5, откуда следует справедливость утверждений теоремы 6.

Случай 2. Если $m<Q$, то расширяем матрицу определителя системы (51) за счет дополнения нулями по строкам и столбцам так, чтобы в блочной форме она имела вид $L(\lambda)\equiv I-L_1(\lambda)$, где I — единичная матрица, а $L_1(\lambda)\equiv\{L_{ki}(\lambda)\}$, $i,k=\overline{1,Q}$, — матрица с элементами-блоками

$$L_{ki}(\lambda)=\sum_{j=0}^{k_i}H_{k_i}^{(k_i)}(\lambda)\sum_{r=0}^{R}e^{-\Delta_r\lambda}\left(S_{jr}^{*}+B_{jr}^{②}\int_{\mathbb{R}^Q}f_{jr}^{②}(u)\frac{du}{|u|^{Q+1}}\right),$$

$k_i=\overline{0,n_i}$. Блочные матрицы

$$S_{jr}^{*}\equiv\{S_{ki}^{jr}\},\ k,i=\overline{1,Q};\ S_{ki}^{jr}=\sum_{k=0}^{R}\sigma_{kjri} \tag{53}$$

имеют такой вид: если $n_i=N_{T_s}$, то все элементы этой матрицы равны параметрам диффузии системы (45), если $n_i<N_{T_s}$, то $S_{ki}^{jr}=0$ для $j=n_i,n_i+1,\ldots,N_{T_s}$.

Блочные матрицы B_{jr} имеют следующий вид: если $n_i\equiv N_{T_s}$, то все элементы этой матрицы определяются как $B_{jr}\equiv\{b_{kjri}\}^T$, $k,i=\overline{1,Q}$; если $u_i<N_{T_s}$, то $B_{jr}=0$ для $j=n_i,n_i+1,\ldots,N_{T_s}$. Из записи матрицы $L(\lambda)$ следует, что ее собственные значения совпадают с собственными значениями матрицы определителя системы (51) для определения $M_i^{(k_i)}(\lambda)$, кроме нулевых собственных значений, которые совпадают до соответствующего порядка.

Далее понятно, что $\det L(\lambda)$ равняется определителю системы (43). Таким образом, преобразования над строками $\det L(\lambda)$ приведут к определителю $F(\lambda)\equiv\det[I-L(\lambda)]$, где $L(\lambda)$ имеет вид (47). Осталось применить теорему 15, что и завершает доказательство теоремы 6. ■

Модельная задача. Рассмотрим задачу автоматической стабилизации курса судна с учетом случайных возмущений (изменчивость морских течений, неравномерная интенсивность воздушных потоков, магнитные бури и т.д.).

Стохастической моделью этой задачи будет система стохастических дифференциально-функциональных уравнений

$$\ddot{\varphi}(t)+\mathcal{H}\dot{\varphi}(t)+\mathcal{K}\psi(t)=\dot{\varphi}(t)\,\dot{w}_1(t,\omega)+\int_{\mathbb{R}^1} f_1(u)\dot{\varphi}(u)\dot{\tilde{\nu}}_1(du,dt)+$$

$$+\psi(t)\,\dot{w}_2(t,\omega)+\int_{\mathbb{R}^1} f_2(u)\psi(u)\dot{\tilde{\nu}}_2(du,dt), \tag{54}$$

$$\dot{\psi}(t)+\frac{1}{T}\psi(t)+\mathcal{B}\varphi(t)+\mathcal{L}\varphi(t-\tau)=\varphi(t)\dot{w}_3(t,u)+\int_{\mathbb{R}^1} f_3(u)\dot{\tilde{\nu}}_3(du,dt)+\varphi(t-\tau)\dot{w}_4(t)+$$

$$+\int_{\mathbb{R}^1} f_4(u)\varphi(t-\tau)\dot{\tilde{\nu}}_4(du,dt), \tag{55}$$

где $\varphi(t)$ — угол отклонения судна от курса при угле поворота $\psi(t)$ руля; $\mathcal{H}>0$, $\mathcal{K}>0$, $T>0$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{L}$ — константы, которые характеризуют модель курса судна, $w_i(t,\omega)$, $i=\overline{1,4}$, — винеровские процессы; $\nu_i(t,A)$ — центрированные пуассоновские меры, независимые в совокупности с винеровскими процессами.

Решение. Квазиполином системы (54), (55) имеет вид [20]

$$\det V_0(\lambda)=\det\left[\mathcal{K}\lambda^2+\sum_{j=0}^{1}\sum_{r=0}^{1}A_{jr}\lambda^j e^{-\Delta_r\lambda}\right],$$

где

$$\mathcal{K}\equiv\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix};\; A_{00}=\begin{pmatrix}0&\mathcal{K}\\ \mathcal{B}&T^{-1}\end{pmatrix};\; A_{01}=\begin{pmatrix}0&0\\ \mathcal{L}&0\end{pmatrix};$$

$$A_{11}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix};\; A_0=0_{2\times 2};\; \Delta_l=\tau>0.$$

Тогда

$$\det V_0(\lambda)=\lambda^2\mathcal{K}+\mathcal{H}\lambda(T^{-1}+\lambda)-\mathcal{K}(\mathcal{B}+\mathcal{L}e^{-\tau\lambda}). \tag{56}$$

В пространстве параметров $\mathcal{H},T,\mathcal{K},\mathcal{B},\mathcal{L}$, $\tau>0$ можно построить области D-разбиения и области, где корни квазиполинома (56) имеют отрицательные части $\operatorname{Re}\lambda<0$.

Теперь понятно, что

$$V_0^{-1}(is)=\frac{1}{\det V_0(is)}\begin{pmatrix}-s^2+i\mathcal{K}&\mathcal{B}+\mathcal{L}e^{-is}\\ \mathcal{K}&T^{-1}+is\end{pmatrix},$$

где

$$|\det V(is)|^2=[s^2+(T^{-1}+\mathcal{H})+\mathcal{B}(\mathcal{B}+1\cos s)]^2+$$

$$+(\mathcal{H}T^{-1},\,-\mathcal{B}^2+\mathcal{K}\,\mathcal{L}\sin s)^2;$$

$$[V_0^{-1}(is)]_+^2=\frac{1}{|\det V_0(is)|^2}\begin{pmatrix}s^2(s^2+\mathcal{H})&\mathcal{L}^2+2\mathcal{L}\,\mathcal{B}\cos s+\mathcal{B}^2\\ \mathcal{H}^2&(T^{-1})^2+s^2\end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица B_0 примет вид

$$B_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left\{\sum_{j=0}^{1}\sum_{r=0}^{1}s_{j2}^*+\int_{\mathbb{R}^1} f_{jr}^2(u)\frac{du}{|u|^2}\right\}|(is)^j|^2\,[V_0^{-1}(is)]_+^{②}\,ds,$$

где

$$S_{00}^*=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix};\; S_{01}^*=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix};\; S_{10}^*=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}; \tag{57}$$

$$S_{11}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \ f_{00}(u) = \begin{pmatrix} 0 & f_1(u) \\ f_3(u) & 0 \end{pmatrix}; \ f_{01}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_4(u) & 0 \end{pmatrix};$$

$$f_{10}(u) = \begin{pmatrix} f_2(u) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \ f_{11}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим соответствующие интегралы матрицы B_0 (см. (57)) через $\mathcal{I}_{11}$, $\mathcal{I}_{12}$, $\mathcal{I}_{21}$, $\mathcal{I}_{22}$. Тогда собственные значения матрицы B_0 равны

$$\lambda_1 = (\mathcal{I}_{11} + \mathcal{I}_{22} + \sqrt{D}), \ \lambda_2 = (\mathcal{I}_{11} + \mathcal{I}_{22} - \sqrt{D}),$$

где $D = (\mathcal{I}_{11} + \mathcal{I}_{22})^2 - 4(\mathcal{I}_{11}\mathcal{I}_{12} + \mathcal{I}_{12}\mathcal{I}_{21})$.

Согласно теореме 6 тривиальное решение системы СДРУ (54), (55) асимптотически устойчиво в l.i.m., если $|\lambda(B_0)| < 1$. Используя современные компьютрные технологии, можно построить в пространстве параметров $(\mathcal{H}, \mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{B}, \mathcal{L})$ области D-разбиения, проверяя условие $|\lambda(B_0)| < 1$ [20].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. — М.: Наука, 1981. — 448 с.
2. Луцкив Н.М. Системы с компенсацией влияния запаздывания и разделительным устройством // Изв. вузов. Электромеханика. — 1976. — № 9. — С. 1003–1007.
3. Смит Дж.М. Автоматическое регулирование. — М.: Физматгиз, 1962. — 847 с.
4. А.с. 634235. Самонастраивающаяся система для регулирования объектов с запаздыванием / К.А. Пупков, В.Р. Носов, В.Б. Колмановский. — Опубл. 23.06.77.
5. Пугачев В.С. Стохастические дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1976. — 354 с.
6. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение. — Киев: Наук. думка, 1980. — 612 с.
7. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. — Рига: Ориентир, 1990. — 312 с.
8. Свердан М.Л., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Стійкість у стохастичному моделюванні складних динамічних систем. — Снятин: Над Прутом, 1996. — 448 с.
9. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием. — М.: Наука, 1992. — 336 с.
10. Ясинский В.К., Ясинский Є.В. Задачі стійкості та стабілізації динамічних систем зі скінченною післядією. — Київ: ТВіМС, 2005. — 580 с.
11. Дарийчук И.В., Никитин А.В., Ясинский В.К. Анализ устойчивости стохастических систем с пуассоновскими возмущениями. II. Устойчивость решений в среднем квадратичном систем линейных стохастических дифференциальных уравнений с пуассоновскими возмущениями // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 6. — С. 50–66.
12. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967. — 548 с.
13. Деч Д. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. — М.: Наука, 1971. — 288 с.
14. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. — М.: Наука, 1977. — 352 с.
15. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов: В 2-х т. — М.: Физматгиз, 1994. — **1**. — 544 с.
16. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов: В 2-х т. — М.: Физматгиз, 1994. — **2**. — 497 с.
17. Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, статистика і випадкові процеси: В 3-х т. — Т. 3. Випадкові процеси. Теорія і статистичне комп'ютерне моделювання. — Чернівці: Золоті литаври, 2009. — 782 с.
18. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 575 с.
19. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Об устойчивости тривиального решения линейных стохастических систем // Укр. мат. журн. — 1970. — **22**, № 5. — С. 699–701.
20. Цынгаева А.В., Ясинский В.К. Устойчивость решений линейных разностных уравнений с разрывными траекториями // Там же. — 1989. — **41**, № 5. — С. 666–671.

Поступила 30.04.2009