УДК 532.546:539.3

В.В. СКОПЕЦКИЙ, О.А. МАРЧЕНКО, Т.А. САМОЙЛЕНКО

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ДВУХФАЗНЫХ СРЕД

Ключевые слова: *нелинейная система, обобщенное решение, метод конечных элементов, оценка приближенного обобщенного решения, оценка дискретного по времени приближенного обобщенного решения.*

В настоящей работе сформулирована нелинейная дифференциальная модель грунтового фильтрующего сооружения и предложен новый подход, при котором рассмотрение взаимосвязанных процессов влагопереноса–фильтрации и упругой деформации сводится к исследованию задачи для общего операторного уравнения, что позволило получить оценки скорости сходимости для соответствующего приближенного обобщенного решения [1, 2].

Пусть в плоской постановке процесс описывается начально-краевой задачей для нелинейной системы одного параболического уравнения влагопереноса–фильтрации и двух гиперболических уравнений теории упругости

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} - \nabla\cdot(K_{\text{ф}}(h,u)\cdot\nabla\, h) = f(x,t), \\ \tilde{\rho}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (Au)(h,u) + \nabla\, h = F(x,t),\ (x,t)\in\Omega_T\,, \Omega_T = \Omega\times(0,T]\,, \end{cases} \tag{1}$$

где $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))^{\mathrm{T}}$, $h(x,t), u_i(x,t),\ i=1,2,$ — скалярные функции $x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$, $K_{\text{ф}}(h,u)$ — матрица вида

$$K_{\text{ф}}(h,u) = \begin{pmatrix} k_1(h,u) & 0 \\ 0 & k_2(h,u) \end{pmatrix};$$

A — оператор теории упругости,

$$(Au)(h,u) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{x_1} + \dfrac{\partial}{\partial x_2}\tau_{x_1x_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}\tau_{x_1x_2} + \dfrac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{x_2} \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{x_1} = \lambda(h,u)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + 2\mu(h,u)\frac{\partial u_1}{\partial x_1},$$

$$\sigma_{x_2} = \lambda(h,u)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + 2\mu(h,u)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \tau_{x_1x_2} = \mu(h,u)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right);$$

компоненты матрицы $K_{\text{ф}}(h,u)$ и коэффициенты $\lambda(h,u)\,,\mu(h,u)$ имеют следующий вид [3]:

$$k_1(h,u) = a_1(x)K(x,h,u)\,,\ k_2(h,u) = a_2(x)K(x,h,u)\,,$$

$$\lambda(h,u) = b_1(x)P\left(x,h,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2}\right),\ \mu(h,u) = b_2(x)P\left(x,h,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2}\right); \tag{2}$$

функции $a_i(x),\ b_i(x), i=1,2,\ K(x,h,u)\,,\ P\left(x,h,\dfrac{\partial u}{\partial x_1},\dfrac{\partial u}{\partial x_2}\right),\ f(x,t)$ и компоненты вектор-функции $F(x,t)=(F_1(x,t),F_2(x,t))^{\mathrm{T}}$ обладают достаточной гладкостью; $\widetilde{\rho}=\mathrm{const}\geq 0$.

Краевые условия зададим следующим образом:

$$h(x,t)=0,\quad (x,t)\in\Gamma_1\times(0,T]; \tag{3}$$

$$k_1\frac{\partial h}{\partial x_1}\cos(n,x_1)+k_2\frac{\partial h}{\partial x_2}\cos(n,x_2)=0,\ (x,t)\in(\Gamma_2\cup\Gamma_3)\times(0,T]; \tag{4}$$

$$k_1\frac{\partial h}{\partial x_1}\cos(n,x_1)+k_2\frac{\partial h}{\partial x_2}\cos(n,x_2)=g(x,t),\ (x,t)\in\Gamma_4\times(0,T]; \tag{5}$$

$$u_1=0,\ u_2=0,\ (x,t)\in\Gamma_2\times(0,T],\ u_1=0,\quad (x,t)\in\Gamma_3\times(0,T]; \tag{6}$$

$$\tau_{x_1x_2}=0,\ (x,t)\in\Gamma_3\times(0,T],\quad \sigma_n=S(x,t),\ \tau_s=T(x,t),\ (x,t)\in(\Gamma_1\cup\Gamma_4)\times(0,T], \tag{7}$$

где σ_n, τ_s — нормальная и касательная составляющие вектора напряжений; $\bigcup_{i=1}^{4}\Gamma_i=\partial\Omega$, Γ_3 — вертикально расположенный участок границы.

Начальные условия:

$$h(x,0)=h_0(x),\ u(x,0)=u_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=q_0(x),\quad x\in\overline{\Omega}. \tag{8}$$

Здесь g, S, T, h_0, u_0, q_0 — заданные функции достаточной гладкости.

Обозначим Z множество вектор-функций $w(x,t)=(h(x,t),u(x,t))^{\mathrm{T}}=$ $=(w_1(x,t),w_2(x,t))^{\mathrm{T}}=(w_1(x,t),w_{21}(x,t),w_{22}(x,t))^{\mathrm{T}}$, удовлетворяющих однородным главным краевым условиям (3), (6), компоненты которых и их производные по времени $\frac{\partial w_1}{\partial t}(x,t),\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}(x,t)\ \forall\, t\in(0,T],\frac{\partial w_2}{\partial t}(x,0)$ вместе с $w_1(x,0)$, $w_2(x,0)$ принадлежат пространству $W_2^1(\Omega)$, смешанные производные $\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_i\partial t}=\frac{\partial^2 w_1}{\partial t\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 w_{2j}}{\partial x_i\partial t}=\frac{\partial^2 w_{2j}}{\partial t\partial x_i}$, $i,j=1,2$, «почти всюду» и принадлежат $L_2(\Omega)$.

Пусть множеству Z_0 принадлежат вектор-функции $z(x)=(z_1(x),z_2(x))^{\mathrm{T}}=$ $=(z_1(x),z_{21}(x),z_{22}(x))^{\mathrm{T}}$, которые по аналогии с $w\in Z$ удовлетворяют однородным главным краевым условиям (3), (6), а их компоненты принадлежат пространству $W_2^1(\Omega)$.

Умножим систему (1) скалярно в пространстве $L_2(\Omega)$ на вектор-функцию $z\in Z_0$ и применим формулу Грина с учетом условий (4), (5), (7). Полученное соотношение запишем в операторном виде

$$\left(M\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},z\right)+\left(\overline{M}\frac{\partial w}{\partial t},\ z\right)+((Lw)(w),\ z)=(\widetilde{F},z)\quad\forall z\in Z_0,\ (x,t)\in\Omega_T, \tag{9}$$

где

$$\left(M\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},z\right)=\widetilde{\rho}\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 w_{21}}{\partial t^2}z_{21}+\frac{\partial^2 w_{22}}{\partial t^2}z_{22}\right)d\Omega,\ \left(\overline{M}\frac{\partial w}{\partial t},z\right)=\iint\limits_{\Omega}\frac{\partial w_1}{\partial t}z_1 d\Omega,$$

$$((Lw)(w),z)=\mathbf{W}(w;w,z)+\mathbf{R}(w_1,z_2),$$

$$\mathbf{W}(w;w,z)=\mathbf{W}_1(w;w_1,z_1)+\mathbf{W}_2(w;w_2,z_2),$$

$$\mathbf{W}_1(w;w_1,z_1)=\iint\limits_{\Omega}\left(k_1(w)\frac{\partial w_1}{\partial x_1}\frac{\partial z_1}{\partial x_1}+k_2(w)\frac{\partial w_1}{\partial x_2}\frac{\partial z_1}{\partial x_2}\right)d\Omega,$$

$$\mathbf{W}_2(w; w_2, z_2) = \iint_{\Omega} \left[\lambda(w) \left(\frac{\partial w_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial w_{22}}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial z_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial z_{22}}{\partial x_2} \right) + \right.$$

$$\left. + 2\mu(w) \left(\frac{\partial w_{21}}{\partial x_1} \frac{\partial z_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial w_{22}}{\partial x_2} \frac{\partial z_{22}}{\partial x_2} \right) + \mu(w) \left(\frac{\partial w_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial w_{22}}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial z_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial z_{22}}{\partial x_1} \right) \right] d\Omega ,$$

$$\mathbf{R}(w_1, z_2) = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} z_{21} + \frac{\partial w_1}{\partial x_2} z_{22} \right) d\Omega ,$$

$$(\widetilde{F}, z) = \iint_{\Omega} (f z_1 + F_1 z_{21} + F_2 z_{22}) \, d\Omega +$$

$$+ \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_4} (S(x,t)\, z_{2,n} + T(x,t)\, z_{2,\mathrm{s}}) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_4} g(x,t)\, z_1 d\Gamma. \qquad (10)$$

Определение. Обобщенным решением задачи (1), (3)–(8) называется вектор-функция $w(x,t) \in Z$, которая для любой вектор-функции $z(x) \in Z_0$ удовлетворяет интегральным соотношениям

$$m\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, z \right) + \overline{m} \left(\frac{\partial w}{\partial t}, z \right) + a(w; w, z) = (\widetilde{F}, z) \quad \forall z \in Z_0 , \ \forall t \in (0,T], \qquad (11)$$

$$(w(x,0), z(x)) = (\widetilde{W}^0(x), z(x)) , \ \left(\frac{\partial w}{\partial t}(x,0), z(x) \right) = (\widetilde{W}^1(x), z(x)) \quad \forall z \in Z_0 , \qquad (12)$$

где

$$m\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, z \right) = \left(M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, z \right); \quad \overline{m} \left(\frac{\partial w}{\partial t}, z \right) = \left(\overline{M} \frac{\partial w}{\partial t}, z \right); \qquad (13)$$

$$a(w; w, z) = ((Lw)(w), z),$$

$$\widetilde{W}^0(x) = (h_0(x), u_0(x))^{\mathrm{T}} , \ \widetilde{W}^1(x) = (0, q_0(x))^{\mathrm{T}} . \qquad (14)$$

Непрерывное по времени приближенное обобщенное решение будем искать методом конечных элементов (МКЭ) в конечно-измеримом подпространстве $Z^N \subset Z$. Для этого разобьем область $\overline{\Omega}$ на треугольные элементы $\overline{e}_i$ ($\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{I} \overline{e}_i$, $e_i \cap e_j = \varnothing, i \neq j, i, j = \overline{1, I}$), которые удовлетворяют признаку «регулярности» [1].

Запишем произвольную функцию $w^N(x,t) \in Z^N$ в виде

$$w^N(x,t) = \sum_{i=1}^{N'} \alpha_i(t)\, \Phi_i(x), \qquad (15)$$

где $N' = 3N_0 + 2N_1 + N_2 + 2N_3$ — количество базисных функций, отвечающих всем $N = N_0 + N_1 + N_2 + N_3$ узловым точкам в разбиении области $\overline{\Omega}$; N_0 — количество узловых точек, не принадлежащих $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, N_i — количество узловых точек, принадлежащих Γ_i, $i = \overline{1,3}$; $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1, N'}$, — функции, интегрируемые вместе со второй производной на $[0,T]$; $\{\Phi_i\}_{i=1}^{N'}$ — базис пространства Z_t^N, которое получается из Z^N фиксированием $\forall t \in [0,T]$. Компоненты этого базиса имеют вид

$$\Phi_{3i-2}=(\varphi_i,0,0)^{\mathrm{T}},\quad \Phi_{3i-1}=(0,\varphi_i,0)^{\mathrm{T}},\ \Phi_{3i}=(0,0,\varphi_i)^{\mathrm{T}},\ i=\overline{1,N_0},$$
$$\Phi_{3N_0+2i-1}=(0,\varphi_{N_0+i},0)^{\mathrm{T}},\ \Phi_{3N_0+2i}=(0,0,\varphi_{N_0+i})^{\mathrm{T}},\ i=\overline{1,N_1},$$
$$\Phi_{3N_0+2N_1+i}=(\varphi_{N_0+N_1+i},0,0)^{\mathrm{T}},\ i=\overline{1,N_2},$$
$$\Phi_{3N_0+2N_1+N_2+2i-1}=(\varphi_{N_0+N_1+N_2+i},0,0)^{\mathrm{T}},$$
$$\Phi_{3N_0+2N_1+N_2+2i}=(0,0,\varphi_{N_0+N_1+N_2+i})^{\mathrm{T}},\ i=\overline{1,N_3},$$
где $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{N}$ — совокупность линейно независимых функций, соответствующих узловым точкам МКЭ, построенных на полных полиномах степени k, $k=1,2,3$, и имеющих в $\overline{\Omega}$ ограниченный носитель.

Базис подпространства $Z_0^N\subset Z_0$ аналогично состоит из N' вектор-функций Φ_i, которые соответствуют функциям $\varphi_i(x), i=\overline{1,N}$, т.е. любая функция $z^N(x)\in Z_0^N$ может быть представлена в виде
$$z^N(x)=\sum_{i=1}^{N'}\beta_i\,\Phi_i(x),\tag{16}$$
где β_i — константы.

Приближенное обобщенное решение $w^N(x,t)\in Z^N$ задачи (11), (12) удовлетворяет интегральным соотношениям:
$$m\left(\frac{\partial^2 w^N}{\partial t^2},z^N\right)+\overline{m}\left(\frac{\partial w^N}{\partial t},z^N\right)+a(w^N;w^N,z^N)=(\widetilde{F},z^N),$$
$$\forall z^N\in Z_0^N,\ \forall t\in(0,T],\tag{17}$$
$$(w^N(x,0),z^N(x))=(\widetilde{W}^0(x),z^N(x)),$$
$$\left(\frac{\partial w^N}{\partial t}(x,0),z^N(x)\right)=(\widetilde{W}^1(x),z^N(x))\quad \forall z^N\in Z_0^N.\tag{18}$$

Для вектор-функции вида $v=(v_1,v_2)^{\mathrm{T}}=(v_1,v_{21},v_{22})^{\mathrm{T}}$ и скалярной функции u определим следующие нормы и полунормы:
$$||v||^2_{L_2(\Omega)}=||v_1||^2_{L_2(\Omega)}+||v_2||^2_{L_2(\Omega)},\ ||v_1||^2_{L_2(\Omega)}=\iint_{\Omega}v_1^2\,d\Omega,$$
$$||v_2||^2_{L_2(\Omega)}=\iint_{\Omega}(v_{21}^2+v_{22}^2)\,d\Omega,$$
$$||v||^2_{H_0^1(\Omega)}=||v_1||^2_{H_0^1(\Omega)}+||v_2||^2_{H_0^1(\Omega)},\ ||v_1||^2_{H_0^1(\Omega)}=\iint_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)^2\right)d\Omega,$$
$$||v_2||^2_{H_0^1(\Omega)}=\iint_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{2}\left(\frac{\partial v_{2i}}{\partial x_j}\right)^2\right)d\Omega,$$
$$||v||^2_{W_2^1(\Omega)}=||v||^2_{L_2(\Omega)}+||v||^2_{H_0^1(\Omega)},\ ||v||^2_{W_2^0(\Omega)}=||v||^2_{L_2(\Omega)},$$
$$||v||^2_{W_2^k(\Omega)}=\sum_{|\alpha|\le|k|}||D^\alpha v||^2_{L_2(\Omega)},\ D^\alpha v=\frac{\partial^{|\alpha|}v}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}},\ |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2,$$
$$||u||_{L_\infty(\Omega_T)}=\sup_{(x,t)\in\Omega_T}|u(x,t)|,\ ||u||_{L_\infty(\Omega)}=\sup_{x\in\Omega}|u(x)|,$$

$$||v||^2_{L_\infty(0,T;X)} = \sup_{t\in(0,T]} ||v||^2_X \, , \; ||v||^2_{L_2(0,T;X)} = \int_0^T ||v||^2_X \, dt,$$

где k, α_1, α_2 — неотрицательные целые числа, пространство X — это $H^1_0(\Omega)$ или $W^k_2(\Omega)$.

Пусть выполняются такие условия:

$$0 < s_0 \le |a_i(x)| \le s_1, \; i=1,2; \; 0 < K_0 \le |K(x,v)| \le K_1,$$

$$0 < p_0 \le |b_i(x)| \le p_1, \; i=1,2; \; 0 < P_0 \le \left| P\left(x, v_1, \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) \right| \le P_1,$$

$$|K(x,v) - K(x,u)| \le K_2 |v-u|,$$

$$\left| P\left(x, v_1, \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) - P\left(x, u_1, \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) \right| \le$$

$$\le P_2 |v_1 - u_1| + P_3 \sum_{i=1}^{2} \left\{ \left| \frac{\partial v_{2i}}{\partial x_1} - \frac{\partial u_{2i}}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial v_{2i}}{\partial x_2} - \frac{\partial u_{2i}}{\partial x_2} \right| \right\},$$

$$|K'_t(x,v)| \le K_3, \; \left| P'_t\left(x, v_1, \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) \right| \le P_4,$$

$$|K''_{tt}(x,v)| \le K_4, \; \left| P''_{tt}\left(x, v_1, \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) \right| \le P_5,$$

$$\forall t \in [0,T] \quad K(x,v), P\left(x, v_1, \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) \in C^1(\Omega),$$

$$K'_{x_i}(x,v), \; P'_{x_i}\left(x, v_1, \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right), \quad K''_{tx_i}(x,v), \; P''_{tx_i}\left(x, v_1, \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right),$$

$$K'''_{ttx_i}(x,v), \; P'''_{ttx_i}\left(x, v_1, \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) \in L_\infty(\Omega_T), \; i=1,2, \; v,u \in Z. \tag{19}$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $w(x,t) \in Z$ — обобщенное решение задачи (11), (12), а $w^N(x,t) \in Z^N$ — приближенное обобщенное решение задачи (17), (18). Предположим, что $\widetilde{W}^0(x), \; \widetilde{W}^1(x) \in W^{k+1}_2(\Omega)$; $w, \; \dfrac{\partial w}{\partial t}, \; \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} \in L_\infty(0,T; W^{k+1}_2(\Omega))$. Тогда существует константа C такая, что выполняется оценка

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t}(w(x,t) - w^N(x,t)) \right\|_{L_\infty(0,T;W^1_2(\Omega))} +$$

$$+ ||w(x,t) - w^N(x,t)||_{L_\infty(0,T;W^1_2(\Omega))} \le C\, \widetilde{h}^k, \tag{20}$$

где C зависит от T, констант $s_l, \; p_l, \; K_i, \; P_j, \; l=0,1, \; i=\overline{0,4}, \; j=\overline{0,5}$, из (19) и норм $||w||_{L_2(0,T;W^{k+1}_2(\Omega))}$, $||w'_t||_{L_2(0,T;W^{k+1}_2(\Omega))}$, $||w''_{tt}||_{L_2(0,T;W^{k+1}_2(\Omega))}$; $\widetilde{h}$ — максимальная длина сторон треугольников, $k=1,2,3$ — степень многочленов метода конечных элементов.

Доказательство. Положим

$$\psi = w^N - \widetilde{w},\ \eta = w - \widetilde{w},\ l = w - w^N, \tag{21}$$

где $\widetilde{w} = \widetilde{w}(x,t) \in Z^N$ и $\forall t \in (0,T]$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{W}_1(w;\ w_1 - \widetilde{w}_1, z_1) + \mathbf{W}_2(w;\ w_2 - \widetilde{w}_2, z_2) +$$
$$+\widetilde{s}_0 \langle K(x,w)(w_1 - \widetilde{w}_1), z_1 \rangle + \widetilde{p}_0 \left\langle P\left(x, w_1, \frac{\partial w_2}{\partial x_1}, \frac{\partial w_2}{\partial x_2}\right)(w_2 - \widetilde{w}_2), z_2 \right\rangle = 0 \ \ \forall z \in Z_0^N, \tag{22}$$

в котором $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$ имеют вид (10), $\widetilde{s}_0 = \min\{s_0, K_0\}$, $\widetilde{p}_0 = \min\{p_0, P_0\}$.

Тогда, используя соотношения (10), (11), (13), (17), (21), (22), получаем

$$m\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, z\right) + \overline{m}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, z\right) + a(w^N; \psi, z) = m\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, z\right) +$$
$$+ \overline{m}\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}, z\right) + \mathbf{W}(w; \widetilde{w}, z) - \mathbf{W}(w^N; \widetilde{w}, z) + \mathbf{R}(\eta_1, z_2) - \widetilde{s}_0 \langle K(x,w)\eta_1, z_1 \rangle -$$
$$- \widetilde{p}_0 \left\langle P\left(x, w_1, \frac{\partial w_2}{\partial x_1}, \frac{\partial w_2}{\partial x_2}\right)\eta_2, z_2 \right\rangle \ \ \forall z \in Z_0^N, \forall t \in (0,T]. \tag{23}$$

Положив в формуле (23) $z := \dfrac{\partial \psi}{\partial t}$, имеем

$$m\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \overline{m}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + a\left(w^N; \psi, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) =$$
$$= m\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \overline{m}\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \mathbf{W}\left(w; \widetilde{w}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) -$$
$$-\mathbf{W}\left(w^N; \widetilde{w}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \mathbf{R}\left(\eta_1, \frac{\partial \psi_2}{\partial t}\right) - \widetilde{s}_0 \left\langle K(x,w)\eta_1, \frac{\partial \psi_1}{\partial t}\right\rangle -$$
$$- \widetilde{p}_0 \left\langle P\left(x, w_1, \frac{\partial w_2}{\partial x_1}, \frac{\partial w_2}{\partial x_2}\right)\eta_2, \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \right\rangle \ \ \forall t \in (0,T]. \tag{24}$$

Исходя из обозначений (13), (10), запишем равенства

$$m\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} m\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right),\ \ \overline{m}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = \left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \right\|^2_{L_2(\Omega)},$$
$$\mathbf{W}\left(w^N; \psi, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathbf{W}(w^N; \psi, \psi) - \frac{1}{2}\widetilde{\mathbf{W}}(w^N; \psi, \psi), \tag{25}$$

где

$$\widetilde{\mathbf{W}}(w^N; \psi, \psi) = \iint_{\Omega} \left((k_1)'_t(w^N)\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}\right)^2 + (k_2)'_t(w^N)\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}\right)^2 + \right.$$
$$+ \lambda'_t(w^N)\left(\frac{\partial \psi_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_{22}}{\partial x_2}\right)^2 + 2\mu'_t(w^N)\left(\left(\frac{\partial \psi_{21}}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_{22}}{\partial x_2}\right)^2\right) +$$
$$\left. + \mu'_t(w^N)\left(\frac{\partial \psi_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_{22}}{\partial x_1}\right)^2 \right) d\Omega \ \ \forall t \in (0,T].$$

Из последнего равенства, соотношений (2) и условий (19) следует

$$\frac{1}{2}\widetilde{\mathbf{W}}(w^N;\psi,\psi)\le c_1\|\psi\|^2_{H_0^1(\Omega)}\quad \forall t\in(0,T], \tag{26}$$

где константа c_1 зависит от s_1, p_1, K_3, P_4.

Подставив в равенство (24) соотношения (25) и оценив его правую часть с учетом (2), (10), (13), (19), (26), можно записать неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[m\left(\frac{\partial\psi}{\partial t},\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)+\mathbf{W}(w^N;\psi,\psi)\right]\le c_1\|\psi\|^2_{H_0^1(\Omega)}+$$

$$+\widetilde{\rho}\left\|\frac{\partial^2\eta_2}{\partial t^2}\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)}+\left\|\frac{\partial\eta_1}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)}+$$

$$+c_2\|l\|_{L_2(\Omega)}\left\|\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right\|_{H_0^1(\Omega)}+c_3\|l\|_{W_2^1(\Omega)}\left\|\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right\|_{H_0^1(\Omega)}+$$

$$+\|l_1\|_{H_0^1(\Omega)}\left\|\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)}+\widetilde{s}_0K_1\|\eta_1\|_{L_2(\Omega)}\left\|\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)}+$$

$$+\widetilde{p}_0P_1\|\eta_2\|_{L_2(\Omega)}\left\|\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)}\quad\forall t\in(0,T], \tag{27}$$

где $c_2=s_1K_2\max\left(\left\|\frac{\partial\widetilde{w}_1}{\partial x_1}\right\|_{L_\infty(\Omega_T)},\left\|\frac{\partial\widetilde{w}_1}{\partial x_2}\right\|_{L_\infty(\Omega_T)}\right)$, константа c_3 зависит от $p_1, P_2, P_3, \left\|\frac{\partial\widetilde{w}_{2i}}{\partial x_j}\right\|_{L_\infty(\Omega_T)}$, $i,j=1,2$.

С использованием неравенства треугольника $\|l\|\le\|\psi\|+\|\eta\|$ и $ab\le\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ (27) легко переписывается в виде

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(\frac{\partial\psi}{\partial t},\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)+\mathbf{W}(w^N;\psi,\psi)\right]\le\bar{c}_1\left(\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|^2_{W_2^1(\Omega)}+\|\psi\|^2_{W_2^1(\Omega)}\right)+$$

$$+\bar{c}_2\left(\left\|\frac{\partial^2\eta_2}{\partial t^2}\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\left\|\frac{\partial\eta_1}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\eta\|^2_{W_2^1(\Omega)}\right)\quad\forall t\in(0,T]. \tag{28}$$

Для положительно-определенных форм справедливы следующие соотношения:

$$m\left(\frac{\partial\psi}{\partial t},\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=\widetilde{\rho}\left\|\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)},\ \ \mathbf{W}(w^N;\psi,\ \psi)\ge\bar{c}_3\|\psi\|^2_{H_0^1(\Omega)}\quad\forall t\in(0,T]. \tag{29}$$

Проинтегрируем соотношение (28) по t от 0 до $s\ \forall\, s\le T$, учтем оценки (29) и тот факт, что $\exists$ const $L_1=L_1(s)>0, L_2=L_2(s)>0$, для которых справедливы неравенства

$$\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}(\cdot,s)\right\|^2_{W_2^1(\Omega)}\le L_1\int_0^s\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|^2_{W_2^1(\Omega)}dt,\ \ \|\psi(\cdot,s)\|^2_{L_2(\Omega)}\le L_2\int_0^s\|\psi\|^2_{L_2(\Omega)}dt.$$

Получим

$$\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}(\cdot\,,s)\right\|^2_{W_2^1(\Omega)}+\widetilde{\rho}\left\|\frac{\partial\psi_2}{\partial t}(\cdot\,,s)\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\bar{c}_3\,||\psi(\cdot\,,s)||^2_{H_0^1(\Omega)}+||\psi(\cdot\,,s)||^2_{L_2(\Omega)}\le$$

$$\le\widetilde{\rho}\left\|\frac{\partial\psi_2}{\partial t}(\cdot\,,0)\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\bar{c}_3\,||\psi(\cdot\,,0)||^2_{H_0^1(\Omega)}+\int\limits_0^s(\bar{c}_1+\bar{c}_4)\left(\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|^2_{W_2^1(\Omega)}+||\psi||^2_{W_2^1(\Omega)}\right)dt+$$

$$+\bar{c}_2\int\limits_0^s\left(\left\|\frac{\partial^2\eta_2}{\partial t^2}\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\left\|\frac{\partial\eta_1}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)}+||\eta||^2_{W_2^1(\Omega)}\right)dt,\qquad(30)$$

где $\bar{c}_4=\max\{L_1,L_2\}$.

Применив лемму Гроноулла–Беллмана к неравенству (30) и взяв в левой части супремум по $0<s\le T$, имеем

$$\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|^2_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))}+\;||\psi||^2_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))}\le\;\bar{c}_5\left[\left\|\frac{\partial\psi_2}{\partial t}(\cdot\,,0)\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\;||\psi(\cdot\,,0)||^2_{H_0^1(\Omega)}+\right.$$

$$\left.+\left\|\frac{\partial^2\eta_2}{\partial t^2}\right\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}+\left\|\frac{\partial\eta_1}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}+\;||\eta||^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}\right].\qquad(31)$$

Учитывая условия (12), (18), (21), неравенство треугольника и тот факт, что

$$||\zeta||_{L_\infty(0,T;\,X)}\le c\left(||\zeta||_{L_2(0,T;\,X)}+\left\|\frac{\partial\zeta}{\partial\,t}\right\|_{L_2(0,T;\,X)}\right),$$

оценку (31) окончательно запишем в виде

$$\left\|\frac{\partial l}{\partial t}\right\|_{L_\infty(0,T;\,W_2^1(\Omega))}+\;||l||_{L_\infty(0,T;\,W_2^1(\Omega))}\le$$

$$\le\bar{c}_6\left(\left\|\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right\|_{L_2(0,T;\,W_2^1(\Omega))}+\left\|\frac{\partial\eta}{\partial t}\right\|_{L_2(0,T;\,W_2^1(\Omega))}+\;||\eta||_{L_2(0,T;\,W_2^1(\Omega))}\right).\qquad(32)$$

Для оценок норм $\eta,\ \dfrac{\partial\eta}{\partial t},\ \dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}$ используем известные результаты.

Пространство Z представимо в виде прямой суммы двух пространств $Z=Z_1\oplus Z_2$. Элементами каждого из Z_i, $i=1,2$, являются соответствующие компоненты $w_i(x,t)$, $i=1,2$, вектор-функции $w(x,t)=(w_1(x,t),w_2(x,t))^{\mathrm{T}}\in Z$. Аналогично запишем: $Z_t=Z_{t,1}\oplus Z_{t,2}$, где Z_t — пространство, получаемое из Z фиксированием $\forall t\in(0,T]$; $Z^N=Z_1^N\oplus Z_2^N$, $Z_0^N=Z_{0,1}^N\oplus Z_{0,2}^N$.

Введем на Z_t билинейную форму

$$a_t(p,q)=a_t^1(p_1,q_1)+a_t^2(p_2,q_2),$$

где

$$a_t^1(p_1,q_1)=\mathbf{W}_1(p;\;p_1,q_1)+\widetilde{s}_0\langle K(x,p)p_1,q_1\rangle,\quad p_1,q_1\in Z_{t,1},$$

$$a_t^2(p_2,q_2)=\mathbf{W}_2(p;\;p_2,q_2)+\widetilde{p}_0\left\langle P\left(x,p_1,\frac{\partial p_2}{\partial x_1},\frac{\partial p_2}{\partial x_2}\right)p_2,q_2\right\rangle,\;\;p_2,q_2\in Z_{t,2}.$$

Из [4] следует, что для таким образом определенной формы $a_t(p,q)$ и при выполнении условия (22) для $p=\eta=w-\widetilde{w}$ справедливы оценки

$$||\eta||_{L_2(\Omega)}(t)\le S_1\widetilde{h}^{k+1}\,||w||_{W_2^{k+1}(\Omega)}(t),\quad ||\eta||_{H_0^1(\Omega)}(t)\le S_2\widetilde{h}^{k}\,||w||_{W_2^{k+1}(\Omega)}(t), \tag{33}$$

где S_1,S_2 — некоторые константы, зависящие от $\bar{c}_3, s_i, p_i, K_i, P_i$, $i=0{,}1$, и не зависящие от w, $\widetilde{h}$.

Оценки норм $\dfrac{\partial\eta}{\partial t}(x,\,\cdot\,)$, $\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}(x,\,\cdot\,)$ в пространствах $L_2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ выводятся аналогично [4].

Таким образом, существует константа $\bar{c}_7$, зависящая от s_l, p_l, K_i, P_j, $l=0{,}1$, $i=\overline{0{,}4}$, $j=\overline{0{,}5}$, из (19) и норм $||w||_{L_2(0,T;\,W_2^{k+1}(\Omega))}$, $||w'_t||_{L_2(0,T;\,W_2^{k+1}(\Omega))}$, $||w''_{tt}||_{L_2(0,T;\,W_2^{k+1}(\Omega))}$, такая, что

$$\left\|\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}+\left\|\frac{\partial\eta}{\partial t}\right\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}+||\eta||_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}\le\bar{c}_7\widetilde{h}^k. \tag{34}$$

Из неравенств (32), (34) следует оценка (20).

Теорема доказана.

Для оценки дискретного по времени приближенного обобщенного решения используем схему Кранка–Николсона [3, 5].

Пусть $T=J\tau$ для некоторого целого $J\ge1$. Будем искать последовательность $\{W^j(x)\}_{j=0}^J\subset Z_t^N$ такую, чтобы W^j аппроксимировало $w^N\in Z^N$ оптимально в $W_2^1(\Omega)$. Определим следующие соотношения:

$$\partial_\tau P^j=\frac{1}{\tau}(P^{j+1}-P^j),\quad P^{j+1/2}=\frac{1}{2}(P^{j+1}+P^j),\ j=\overline{0,J-1}. \tag{35}$$

Схему Кранка–Николсона для задачи Коши (17), (18) можно записать в виде

$$\langle W^0,z^N\rangle=\langle\widetilde{W}^0,z^N\rangle\quad\forall z^N\in Z_0^N, \tag{36}$$

$$\langle\theta^0,\ z^N\rangle=\langle\widetilde{W}^1,z^N\rangle\quad\forall z^N\in Z_0^N, \tag{37}$$

$$m(\partial_\tau\theta^j,\ z^N)+\bar{m}(\theta^{j+1/2},\ z^N)+a(W^{j+1/2};W^{j+1/2},\ z^N)=$$
$$=(\widetilde{F}^{j+1/2},\ z^N)\quad\forall z^N\in Z_0^N, \tag{38}$$

$$W^{j+1}=W^j+\tau\theta^{j+1/2},\ j=\overline{0,J-1}. \tag{39}$$

Здесь
$$W^{j+1}(x)=\sum_{i=1}^{N'}\alpha_i^{j+1}\,\Phi_i(x),\ \theta^{j+1}(x)=\sum_{i=1}^{N'}d_i^{j+1}\Phi_i(x),\ j=\overline{0,J-1}. \tag{40}$$

Теорема 2. Пусть $w(x,t)$ — обобщенное решение задачи (11), (12) и $\{W^j(x)\}_{j=0}^J\subset Z_t^N$ — решение задачи (36)–(39). Предположим, что выполняются условия (19) и $w\in W_2^{k+1}(\Omega)$. Тогда существует константа $C=C(T)>0$, не зависящая от $\widetilde{h}$, τ и такая, что

$$\max_{0\le j\le J}||W^j-w^j||_{W_2^1(\Omega)}\le C(\widetilde{h}^k+\tau^2).$$

Доказательство. Запишем уравнение (11) при $t_{j+1/2}=(j+1/2)\tau$ в виде

$$m\left(\partial_\tau\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^j+\rho^j, z^N\right)+\overline{m}(\partial_\tau w^j+\sigma^j, z^N)+a(w^{j+1/2}+\delta^j; w^{j+1/2}+\delta^j, z^N)=$$

$$=(\widetilde{F}^{j+1/2}+\gamma^j, z^N)\ \ \forall z^N\in Z_0^N,\ j=\overline{0,J-1}, \tag{41}$$

где

$$\rho^j=O(\tau^2),\ \delta^j=O(\tau^2),\ \sigma^j=O(\tau^2),\ \gamma^j=O(\tau^2). \tag{42}$$

Введем обозначения

$$\eta^j=w^j-\widetilde{w}^j,\ \psi^j=W^j-\widetilde{w}^j,\ \xi^j=\theta^j-\left(\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial t}\right)^j, \tag{43}$$

где $\widetilde{w}^j\in Z^N$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{W}(w^{j+1/2}+\delta^j;\ w^{j+1/2}+\delta^j-\widetilde{w}^{j+1/2}-\zeta^j, z^N)+$$

$$+\widetilde{s}_0\langle K(x,w^{j+1/2}+\delta^j)(w_1^{j+1/2}+\delta_1^j-\widetilde{w}_1^{j+1/2}-\zeta_1^j), z_1^N\rangle+$$

$$+\widetilde{p}_0\langle P(x,w_1^{j+1/2}+\delta_1^j,\frac{\partial}{\partial x_1}(w_2^{j+1/2}+\delta_2^j),\frac{\partial}{\partial x_2}(w_2^{j+1/2}+\delta_2^j))\times$$

$$\times(w_2^{j+1/2}+\delta_2^j-\widetilde{w}_2^{j+1/2}-\zeta_2^j), z_2^N\rangle=0\quad\forall q^N\in Z_0^N,\ j=\overline{0,J-1}, \tag{44}$$

в котором $\mathbf{W}$ имеет вид (10), $\widetilde{s}_0=\min\{s_0,K_0\}$, $\widetilde{p}_0=\min\{p_0,P_0\}$,

$$\zeta^j=O(\tau^2). \tag{45}$$

Учитывая обозначения (43) и соотношения (38), (41), (13), (10), (44), можем записать:

$$m(\partial_\tau\xi^j, z^N)+\overline{m}(\partial_\tau\psi^j, z^N)+a(W^{j+1/2};\psi^{j+1/2}, z^N)=m\left(\partial_\tau\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^j, z^N\right)+$$

$$+D(w^j, W^j, \widetilde{w}^j, z^N)\quad\forall z^N\in Z_0^N,\ j=\overline{0,J-1}. \tag{46}$$

Здесь

$$D(w^j, W^j, \widetilde{w}^j, z^N)=m(\rho^j, z^N)+\overline{m}(\partial_\tau\eta^j+\sigma^j, z^N)+$$

$$+\mathbf{W}(w^{j+1/2}+\delta^j;\ \widetilde{w}^{j+1/2}+\zeta^j, z^N)-$$

$$-\mathbf{W}(W^{j+1/2};\ \widetilde{w}^{j+1/2}, z^N)+\mathbf{R}(\eta_1^{j+1/2}+\delta_1^j, z_2^N)-$$

$$-\widetilde{s}_0\langle K(x,w^{j+1/2}+\delta^j)(\eta_1^{j+1/2}+\delta_1^j-\zeta_1^j), z_1^N\rangle-$$

$$-\widetilde{p}_0\langle P(x,w_1^{j+1/2}+\delta_1^j,\frac{\partial}{\partial x_1}(w_2^{j+1/2}+\delta_2^j),\frac{\partial}{\partial x_2}(w_2^{j+1/2}+\delta_2^j))\times$$

$$\times(\eta_2^{j+1/2}+\delta_2^j-\zeta_2^j), z_2^N\rangle-(\gamma^j, z^N)$$

$$\forall z^N\in Z_0^N,\ j=\overline{0,J-1}. \tag{47}$$

Из соотношений (35), (39), (43) следует

$$\partial_\tau\psi^j=\theta^{j+1/2}-\partial_\tau\widetilde{w}^j=\xi^{j+1/2}+\partial_\tau\eta^j-\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^{j+1/2}-\kappa^j,$$

где

$$\kappa^j=\partial_\tau w^j-\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^{j+1/2}=O(\tau^2),\ j=\overline{0,J-1}. \tag{48}$$

Тогда
$$\partial_\tau \psi^0 = \xi^0 + \frac{\tau}{2}\partial_\tau \xi^0 + \partial_\tau \eta^0 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^{1/2} - \kappa^0,$$

$$\partial_\tau \psi^j = \xi^0 + \frac{\tau}{2}\partial_\tau \xi^j + \tau\sum_{k=0}^{j-1}\partial_\tau \xi^k + \partial_\tau \eta^j - \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^{j+1/2} - \kappa^j, \; j = \overline{1, J-1}. \quad (49)$$

Рассмотрим функции $\varphi^i(x)$, $i = \overline{0, J}$, которые определены таким образом:
$$\varphi^0(x) = 0, \; \varphi^j(x) = \tau\sum_{k=0}^{j-1}\psi^{k+1/2}(x), \; j = \overline{1, J}. \quad (50)$$

Тогда
$$\varphi^{1/2} = \frac{\tau}{2}\psi^{1/2}, \; \varphi^{j+1/2} = \frac{\tau}{2}\psi^{j+1/2} + \tau\sum_{k=0}^{j-1}\psi^{k+1/2}, \; j = \overline{1, J-1}. \quad (51)$$

Учитывая соотношения (49), (46), (51), (18), (37), имеем
$$m(\partial_\tau \psi^j, z^N) + \overline{m}(\psi^{j+1/2}, z^N) +$$
$$+ a(W^{j+1/2}; \varphi^{j+1/2}, z^N) = m(\partial_\tau \eta^j - \kappa^j, z^N) + \overline{m}(\psi^0, z^N) +$$
$$+ \frac{\tau}{2}D(w^j, W^j, \widetilde{w}^j, z^N) + \tau\sum_{k=0}^{j-1}[D(w^k, W^k, \widetilde{w}^k, z^N) + a(W^{j+1/2}; \psi^{k+1/2}, z^N) -$$
$$- a(W^{j+1/2}; \psi^{k+1/2}, z^N)] \quad \forall z^N \in Z_0^N, \; j = \overline{0, J-1}. \quad (52)$$

В последнем соотношении и далее предполагается, что слагаемое $\sum_{k=0}^{j-1}[\ldots]$ при $j = 0$ исчезает.

Положим в (52) $z^N = \partial_\tau \varphi^j = \psi^{j+1/2}$, $j = \overline{0, J-1}$. Тогда с учетом (35), (13), (10) и симметричности форм $m(v, v)$, $\mathbf{W}(w; v, v)$ получим
$$\frac{1}{2\tau}[m(\psi^{j+1}, \psi^{j+1}) - m(\psi^j, \psi^j) + \mathbf{W}(W^{j+1/2}; \varphi^{j+1}, \varphi^{j+1}) -$$
$$- \mathbf{W}(W^{j+1/2}; \varphi^j, \varphi^j)] + \overline{m}(\psi^{j+1/2}, \psi^{j+1/2}) =$$
$$= m(\partial_\tau \eta^j - \kappa^j, \psi^{j+1/2}) + \overline{m}(\psi^0, \psi^{j+1/2}) -$$
$$- \mathbf{R}\left(\frac{\tau}{2}\psi_1^{j+1/2} + \tau\sum_{k=0}^{j-1}\psi_1^{k+1/2}, \psi_2^{j+1}\right) + \frac{\tau}{2}D(w^j, W^j, \widetilde{w}^j, \psi^{j+1/2}) +$$
$$+ \tau\sum_{k=0}^{j-1}[D(w^k, W^k, \widetilde{w}^k, \psi^{j+1/2}) + \mathbf{W}(W^{j+1/2}; \psi^{k+1}, \psi^{j+1}) -$$
$$- \mathbf{W}(W^{k+1/2}; \psi^{k+1}, \psi^{j+1})], \; j = \overline{0, J-1}. \quad (53)$$

Оценим правую часть равенства (53). Используя условия (19), имеем
$$|m(\partial_\tau \eta^j - \kappa^j, \psi^{j+1/2})| \le \widetilde{\rho}(\|\partial_\tau \eta^j\|_{L_2(\Omega)} + \|\kappa^j\|_{L_2(\Omega)})\|\psi^{j+1/2}\|_{L_2(\Omega)},$$

$$|\overline{m}(\psi^0, \psi^{j+1/2})| \le \|\psi^0\|_{L_2(\Omega)}\|\psi^{j+1/2}\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\left|\mathbf{R}\left(\frac{\tau}{2}\psi_1^{j+1/2} + \tau\sum_{k=0}^{j-1}\psi_1^{k+1/2}, \psi_2^{j+1}\right)\right| \le$$

$$\le \left(\frac{\tau}{2} ||\psi_1^{j+1/2}||_{H_0^1(\Omega)} + \tau \sum_{k=0}^{j-1} ||\psi_1^{k+1/2}||_{H_0^1(\Omega)} \right) ||\psi_2^{j+1/2}||_{L_2(\Omega)}, \; j=\overline{0,J-1}; \quad (54)$$

$$\left| \sum_{k=0}^{j-1} (\mathbf{W}(W^{j+1/2};\psi^{k+1},\psi^{j+1}) - \mathbf{W}(W^{k+1/2};\psi^{k+1},\psi^{j+1})) \right| \le$$

$$\le 2c\,||\psi^{j+1/2}||_{H_0^1(\Omega)} \sum_{k=0}^{j-1} ||\psi^{k+1/2}||_{H_0^1(\Omega)}, \quad j=\overline{1,J-1}, \quad (55)$$

где c зависит от s_1, p_1, K_1, P_1.

Оценку для D выводим исходя из (47), (13), (10), (19), (43). Получим [3]

$$|D(w^j, W^j, \widetilde{w}^j, \psi^{j+1/2})| \le c_1 ||\psi^{j+1/2}||^2_{W_2^1(\Omega)} +$$

$$+ c_2 ||\partial_\tau \eta^j||^2_{L_2(\Omega)} + c_3 ||\eta^{j+1/2}||^2_{W_2^1(\Omega)} + c_4 ||\delta^j||^2_{W_2^1(\Omega)} +$$

$$+ c_5 ||\zeta^j||^2_{W_2^1(\Omega)} + c_6 ||\gamma^j||^2_{L_2(\Omega)} + c_7 ||\rho^j||^2_{L_2(\Omega)} + c_8 ||\sigma^j||^2_{L_2(\Omega)}, \; j=\overline{0,J-1}, \quad (56)$$

где c_i, $i=\overline{1,8}$, выражаются через $s_1, K_m, p_1, P_l, \widetilde{s}_0, \widetilde{p}_0, \widetilde{\rho}$, $m=1,2$, $l=\overline{1,3}$, $\left\| \frac{\partial \widetilde{w}_1^{j+1/2}}{\partial x_k} \right\|_{L_\infty(\Omega)}$, $\left\| \frac{\partial \widetilde{w}_{2i}^{j+1/2}}{\partial x_k} \right\|_{L_\infty(\Omega)}$, $i,k=1,2$.

Аналогично (56) записывается оценка

$$\left| \sum_{k=0}^{j-1} D(w^k, W^k, \widetilde{w}^k, \psi^{j+1/2}) \right| \le \sum_{k=0}^{j-1} \Big[\hat{c}_1 ||\psi^{j+1/2}||^2_{W_2^1(\Omega)} + \widetilde{c}_1 ||\psi^{k+1/2}||^2_{W_2^1(\Omega)} +$$

$$+ c_2 ||\partial_\tau \eta^k||^2_{L_2(\Omega)} + c_3 ||\eta^{k+1/2}||^2_{W_2^1(\Omega)} + c_4 ||\delta^k||^2_{W_2^1(\Omega)} +$$

$$+ c_5 ||\zeta^k||^2_{W_2^1(\Omega)} + c_6 ||\gamma^k||^2_{L_2(\Omega)} + c_7 ||\rho^k||^2_{L_2(\Omega)} + c_8 ||\sigma^k||^2_{L_2(\Omega)} \Big], \quad j=\overline{1,J-1}. \quad (57)$$

Учитывая в соотношении (53) положительную определенность формы $\mathbf{W}(w; v, v)$, неотрицательную определенность $\overline{m}(v,v)$, а также неравенства (54)–(57), получаем

$$m(\psi^{j+1},\psi^{j+1}) - m(\psi^j,\psi^j) \le 2\tau (C_0 ||\psi^0||^2_{L_2(\Omega)} +$$

$$+ C_1 ||\kappa^j||^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=0}^{j} [C_2 ||\psi^{k+1/2}||^2_{W_2^1(\Omega)} +$$

$$+ C_3 ||\partial_\tau \eta^k||^2_{L_2(\Omega)} + c_3 ||\eta^{k+1/2}||^2_{W_2^1(\Omega)} + c_4 ||\delta^k||^2_{W_2^1(\Omega)} + c_5 ||\zeta^k||^2_{W_2^1(\Omega)} +$$

$$+ c_6 ||\gamma^k||^2_{L_2(\Omega)} + c_7 ||\rho^k||^2_{L_2(\Omega)} + c_8 ||\sigma^k||^2_{L_2(\Omega)}]), \; j=\overline{0,J-1}. \quad (58)$$

Просуммируем обе части неравенства (58) по j от 0 до $l-1$, $1 \le l \le J$, и учтем оценки

$$m(v,v) \ge \widetilde{\rho} ||v_2||^2_{L_2(\Omega)}, \; ||u^{j+1/2}||^2 \le 1/2(||u^j||^2 + ||u^{j+1}||^2),$$

$$||\partial_\tau u^j||^2 \le c(T)(||u^j||^2 + ||u^{j+1}||^2).$$

Имеем

$$||\psi_2^l||^2_{L_2(\Omega)} \le a_0 ||\psi^0||^2_{L_2(\Omega)} + a_1(T)\tau \sum_{j=0}^{l} (||\psi^j||^2_{W_2^1(\Omega)} + ||\eta^j||^2_{W_2^1(\Omega)}) +$$

$$+ a_2 \tau \sum_{j=0}^{l-1} (||\kappa^j||^2_{L_2(\Omega)} + ||\delta^j||^2_{W_2^1(\Omega)} +$$

$$+ ||\zeta^j||^2_{W_2^1(\Omega)} + ||\gamma^j||^2_{L_2(\Omega)} + ||\rho^j||^2_{L_2(\Omega)} + ||\sigma^j||^2_{L_2(\Omega)}), \; 1 \le l \le J. \qquad (59)$$

Очевидно, что $\exists$ const $L_1 = L_1(T) > 0, L_2 = L_2(T) > 0$ такие, что справедливы неравенства $||\psi^l||^2_{H_0^1(\Omega)} \le L_1 \tau \sum_{j=0}^{l} ||\psi^j||^2_{H_0^1(\Omega)}$, $||\psi_1^l||^2_{L_2(\Omega)} \le L_2 \tau \sum_{j=0}^{l} ||\psi_1^j||^2_{L_2(\Omega)}$. Используем этот факт и применим к (59) дискретный аналог леммы Гронуолла–Беллмана. Получим

$$||\psi^l||^2_{W_2^1(\Omega)} \le \bar{c}\, (a_0 ||\psi^0||^2_{L_2(\Omega)} +$$

$$+ a_1(T)\tau \sum_{j=0}^{l} ||\eta^j||^2_{W_2^1(\Omega)} + a_2 \tau \sum_{j=0}^{l-1} (||\kappa^j||^2_{L_2(\Omega)} + ||\delta^j||^2_{W_2^1(\Omega)} +$$

$$+ ||\zeta^j||^2_{W_2^1(\Omega)} + ||\gamma^j||^2_{L_2(\Omega)} + ||\rho^j||^2_{L_2(\Omega)} + ||\sigma^j||^2_{L_2(\Omega)})), \; 1 \le l \le J. \qquad (60)$$

Из неравенства (60) с учетом оценок (48), (42), (33), (43), (12), (36) имеем

$$||\psi^l||^2_{W_2^1(\Omega)} \le \tilde{a}_0 T\, O(\tau^4) + \tilde{a}_1 T \sum_{j=0}^{l} (S_1^2 \tilde{h}^{2(k+1)} + S_2^2 \tilde{h}^{2k}) ||w^j||^2_{W_2^{k+1}(\Omega)}, \; 1 \le l \le J,$$

$$||W^l - w^l||_{W_2^1(\Omega)} \le ||\psi^l||_{W_2^1(\Omega)} + ||\eta^l||_{W_2^1(\Omega)} \le$$

$$\le \bar{a}_0 \sqrt{T}\, O(\tau^2) + (S_1^2 \tilde{h}^{2(k+1)} + S_2^2 \tilde{h}^{2k})^{1/2} ||w^l||_{W_2^{k+1}(\Omega)} +$$

$$+ \bar{a}_1 \sqrt{T} \left(\sum_{j=0}^{l} (S_1^2 \tilde{h}^{2(k+1)} + S_2^2 \tilde{h}^{2k}) ||w^j||^2_{W_2^{k+1}(\Omega)} \right)^{1/2}, \; 1 \le l \le J.$$

Из последней оценки следует справедливость теоремы.

Таким образом, получены оценки скорости сходимости для непрерывного по времени и полностью дискретного приближенных обобщенных решений сформулированной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Д е й н е к а В.С., С е р г и е н к о И.В., С к о п е ц к и й В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. — Киев: Наук. думка, 1998. — 614 с.
2. Д е й н е к а В.С., С е р г и е н к о И.В. Модели и методы решения задач в неоднородных средах. — Киев: Наук. думка, 2001. — 606 с.
3. С к о п е ц к и й В.В., М а р ч е н к о О.А., С а м о й л е н к о Т.А. Построение дискретного приближенного решения нелинейной системы динамики двухфазных сред // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 4. — С. 69–80.
4. W h e e l e r M.F. A priori L_2 error estimates for Galerkin approximations to parabolic partial differential equations // SIAM J. Numer. Anal. — 1973. — **10**, N 4. — P. 723–759.
5. С к о п е ц к и й В.В., М а р ч е н к о О.А., С а м о й л е н к о Т.А. Приближенное решение для нелинейной дифференциальной модели фильтрующих грунтов // Компьютерная математика. — 2009. — № 1. — С. 49–59.

Поступила 16.10.2009