УДК 519.876.2

И.В. КОЗИН

СТРУКТУРА ГРУППЫ ПАРЕТО В ЗАДАЧЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Ключевые слова: *многокритериальная задача, множество Парето, эффективные правила, группа преобразований*.

ВВЕДЕНИЕ

При моделировании большинства сложных технических, социально-экономических, организационных ситуаций и процессов, как правило, не удается построить единый скалярный критерий качества. Соответствующие модели исследуются в рамках теории многокритериальных задач — активно развивающегося направления теории принятия решений [1, 2]. В условиях многокритериальной оптимизации решение должно приниматься на основе оптимизации векторного критерия $F(x)=(F_1(x), F_2(x),\ldots, F_n(x)): X \to R^n$, где $F_i(x): R^1 \to R^1$, $i=1,2,\ldots,n$, $n \ge 2$. Векторный критерий порождает отношение порядка $\le_F$ на множестве X. А именно: будем полагать, что $x \le_F y$ в том и только в том случае, когда $F_i(x) \le F_i(y)$, $i=1,2,\ldots,n$. Это отношение порядка, вообще говоря, не является линейным при $n \ge 2$. Следовательно, множество оптимальных решений задачи может состоять из несравнимых по векторному критерию элементов. Множество оптимальных решений задачи многокритериальной оптимизации называется множеством Парето. Однако и сам выбор векторного критерия неоднозначен. Известно, что для однокритериальных задач критерий определен с точностью до произвольной монотонной функции. Возникает вопрос: какова свобода выбора критерия для задач векторной оптимизации?

Такая свобода характеризуется определенными преобразованиями критериального пространства R^n, при которых множество Парето рассматриваемой оптимизационной задачи остается неизменным. Эти преобразования образуют группу относительно операции суперпозиции.

Инвариантность относительно действия группы преобразований означает наличие определенных свойств симметрии в критериальном пространстве. Настоящая работа посвящена исследованию этих свойств и механизмов принятия решений, обладающих свойствами симметрии.

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЙ ВЫБОР. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРАВИЛ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим задачу многокритериальной оптимизации [3, 4], причем для простоты будем считать, что множество X, на котором ведется поиск решения, совпадает с критериальным пространством $F(X)$, т.е. $X \subseteq R^n$ и задача состоит в оптимизации каждой из координат на множестве X, $x_i \to \max$, $i=1,2,\ldots,n$. Отношение порядка $\le$ на R^n, порождаемое тождественным отображением, назовем каноническим отношением порядка, или порядком Парето.

Напомним, что точка $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in X$ называется парето-оптимальной (эффективной), если не существует во множестве X точки, превосходящей x^* по всем критериям, т.е. не существует точки $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$ такой, что $x \ne x^*$ и $x_i^* \le x_i$, $i=1,2,\ldots,n$. Множество всех эффективных точек называется множеством Парето рассматриваемой задачи.

Правило принятия решений называется эффективным, если решения, которые принимаются в соответствии с этим правилом на множестве X, являются парето-оптимальными.

МАКСИМАЛЬНАЯ ГРУППА ПОРЯДКА ПАРЕТО

Группой называется [5] множество G, на котором определена бинарная операция «*», обладающая следующими свойствами:

а) $\forall s, t, v \in G \quad (s * t) * v = s * (t * v)$ — ассоциативность;

б) $\exists 1 \in G \;\; \forall s \in G \;\; s * 1 = 1 * s = s$ — наличие нейтрального (единичного) элемента;

в) $\forall s \in G \; \exists s^{-1} \in G \;\; s * s^{-1} = s^{-1} * s = 1$ — наличие обратного элемента.

Все обратимые преобразования $\Im$ пространства R^n образуют группу относительно операции суперпозиции. Нейтральным (единичным) элементом этой группы служит тождественное преобразование $\mathrm{id}(x) = x \;\; \forall x \in R^n$. Подмножество преобразований, замкнутое относительно операции суперпозиции и операции обратного преобразования, является подгруппой группы $\Im$. Такую подгруппу назовем группой преобразований.

Одним из основных требований к правилам принятия решений в критериальном пространстве является их эффективность, или согласованность с каноническим порядком Парето в R^n. Принцип эффективности требует выбора решения из множества Парето. Соответственно в критериальном пространстве должна выбираться точка, принадлежащая образу множества Парето (слово «образ» в дальнейшем опускается, образ множества Парето также будем называть множеством Парето). Структура критериального пространства и множества Парето может быть весьма сложной. Однако если при некоторых преобразованиях пространства множество Парето сохраняется, то при этих преобразованиях выбираемая точка в критериальном пространстве должна оставаться во множестве Парето. Другими словами, выбор должен быть инвариантным относительно преобразований, которые сохраняют множество Парето. Так как речь идет о массовой задаче, то это преобразования, сохраняющие канонический порядок в R^n.

Представляет интерес максимальная по включению группа G преобразований пространства R^n, которая сохраняет каноническое отношение порядка $\leq$. Формально это свойство преобразований описывается следующим соотношением: $\forall g \in G$, $\forall x, y \in R^n \quad x \leq y \Rightarrow g \cdot x \leq g \cdot y$. Здесь и далее $g \cdot x$ будет обозначать значение отображения $g(x)$.

Теорема 1. Для любого преобразования $g \in G$, сохраняющего отношение порядка $\leq$ на R^n, найдутся диагональное отображение $\Phi(x) = (\Phi_1(x_1), \Phi_2(x_2), \ldots, \Phi_n(x_n))$, где $\Phi_i(x_i)$ — возрастающие функции соответствующих координат, и перестановка координат $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\; S(x) = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$ такие, что $\forall x \in R^n \;\; g(x) = \Phi(S(x))$.

Доказательство. Рассмотрим группу гладких преобразований, т.е. таких преобразований, которые описываются непрерывно дифференцируемым отображением с невырожденным якобианом.

Рассмотрим произвольную точку $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ и преобразование $g \in G$. Учитывая свойства сохранения отношения $\leq$, получаем для произвольного вектора $\Delta \in R^n$, такого, что $0 \leq \Delta$, неравенство $g(x) \leq g(x + \Delta)$.

Так как $g = (g_1(x_1, \ldots, x_n), g_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_n))$ — дифференцируемое отображение, последнее неравенство приводит к векторному соотношению

$$0 \leq g'(x)\Delta + o(||\Delta||),$$

где в качестве нормы $||\Delta||$ можно использовать евклидову норму на R^n. Здесь

$g'(x)$ обозначена матрица Якоби преобразования g,

$$g'(x)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial g_n(x)}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} & \dots & \dfrac{\partial g_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Последнее неравенство справедливо для любого вектора Δ с неотрицательными координатами. Учитывая то, что Δ — произвольный вектор с неотрицательными координатами, приходим к выводу, что $0 \le g'(x)$. Поскольку обратное отображение $g^{-1}(x)$ также принадлежит группе, справедливо неравенство $0 \le (g^{-1})'(x)$. Обозначим $a_{ij}=\dfrac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}$ элементы матрицы Якоби отображения g, а A_{ij} — элементы матрицы Якоби обратного преобразования $g^{-1}(x)$. Матрица (A_{ij}) является обратной к матрице (a_{ij}), поэтому справедливо соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}=\delta_{ij}, \text{ где } \delta_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{при } i=j, \\ 0 & \text{при } i \ne j. \end{cases}$$

Так как элементы матриц a_{ij} и A_{ij} неотрицательны, последнее соотношение приводит к системе равенств

$$a_{ik}A_{kj}=0 \ \forall i, j, k=1, 2, \dots, n, \ i \ne j.$$

Предположим, что $A_{kj} \ne 0$ для некоторой пары индексов k, j. Тогда из приведенных выше равенств вытекает, что $a_{ik}=0 \ \ \forall i=1, 2, \dots, n$ и $i \ne j$, т.е. в столбце с номером k матрицы Якоби нет ненулевых элементов кроме элемента a_{jk}. Поскольку матрица (A_{ij}) обратная к матрице Якоби (a_{ij}), то и $A_{ki}=0 \, \forall i=1, 2, \dots, n$, $i \ne j$.

Таким образом, матрица Якоби преобразования g, сохраняющего отношение порядка $\le$ на R^n, имеет вид $\dfrac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}=a_i(x)\delta_{ik_i}$, где $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ — некоторая перестановка элементов $(1, 2, \dots, n)$, причем $a_i(x)>0$. Это означает, что $g_i(x)=\Phi_i(x_{k_i})$, где Φ_i — монотонные функции одной переменной.

Доказательство проведено в предположении гладкости преобразования g. Однако любое непрерывное и обратимое преобразование можно с любой степенью точности аппроксимировать гладким преобразованием. Соотношение $g_i(x)=\Phi_i(x_{k_i})$ сохраняется в предельном переходе, поэтому теорема справедлива для любого непрерывного преобразования.

Из доказанной теоремы как очевидное следствие, вытекает следующая теорема.

Теорема 2 (о структуре максимальной группы преобразований, сохраняющей канонический порядок $\le$ на R^n). Максимальная группа преобразований пространства R^n, сохраняющая каноническое отношение порядка $\le$, изоморфна прямому произведению группы перестановок S_n и группы диагональных преобразований $\{\Phi\}$ вида $\Phi(x)=(\Phi_1(x_1), \Phi_2(x_2), \dots, \Phi_n(x_n))$, где каждая функция $\Phi_i(x_i)$ — возрастающая функция одной переменной x_i, $i=1, 2, \dots, n$.

Максимальную группу преобразований, сохраняющую канонический порядок $\le$ на R^n, в дальнейшем будем называть группой Парето.

Пусть некоторое эффективное правило принятия решений инвариантно относительно группы преобразований G. Тогда можно утверждать, что группа G является подгруппой группы Парето. Соответственно эффективные правила принятия решений в условиях многокритериальной оптимизации можно классифицировать по подгруппам группы Парето, относительно которых правило является инвариантным.

ПОДГРУППЫ ГРУППЫ ПАРЕТО

Рассмотрим наиболее интересные дискретные и непрерывные подгруппы группы Парето.

Среди дискретных групп преобразований, сохраняющих каноническое отношение порядка на R^n, выделяется подгруппа перестановок координат — дискретная подгруппа преобразований вида $\Phi_i(x) = x_{k_i}$, где $(k_1, k_2, \ldots k_n)$ — некоторая перестановка элементов $(1, 2, \ldots, n)$. Инвариантность относительно действия преобразований этой подгруппы иногда называют свойством анонимности. Такая инвариантность означает независимость решения от того, в какой последовательности рассматриваются координаты точек, т.е. независимость от принципов нумерации координат.

Среди параметрических непрерывных подгрупп наибольший интерес представляют группы Ли.

Напомним, что группы Ли — непрерывные дифференцируемые группы преобразований на подмножествах R^n, т.е. такие группы преобразований, которые являются топологическими пространствами. Причем операция суперпозиции преобразований соответствует некоторой непрерывной групповой операции на множестве параметров. Подробно теория групп Ли изложена в [8].

Остановимся на однопараметрических группах Ли. Это множество гладких преобразований вида $F: X \times A \to X$, $A \subseteq R$, причем для каждого действительного числа $\alpha \in A$ отображение $F(x, \alpha)$ — взаимно однозначное отображение множества X и для любых $x \in X$ и $\alpha, \beta \in R$ имеет место тождество $F(F(x, \beta), \alpha) = F(x, \alpha \oplus \beta)$, где $\oplus$ — групповая операция на подмножестве A множества действительных чисел.

Среди однопараметрических подгрупп группы Парето выделяются две.

1. Подгруппа однонаправленных сдвигов — группа всех преобразований вида $\Phi_i(x_i) = x_i + b$, b — параметр. Группа сдвигов изоморфна группе R действительных чисел относительно операции сложения. Инвариантность относительно действия этой группы фактически означает независимость решения относительно выбора общего для всех координат начала отсчета.

2. Подгруппа гомотетий — группа всех преобразований вида $\Phi_i(x_i) = x_i e^a$, a — параметр. Эта подгруппа также изоморфна группе R относительно операции сложения. Инвариантность относительно действия этой группы означает независимость решения от одновременного изменения масштаба для всех координат.

Среди многопараметрических подгрупп группы Парето можно указать две абелевы (коммутативные) группы.

1. Подгруппа сдвигов — группа всех преобразований вида $\Phi_i(x_i) = x_i + b_i$, b_i — параметры. Это n-параметрическая подгруппа. Группа сдвигов изоморфна $\underbrace{R \times R \times \ldots \times R}_{n}$.

2. Подгруппа растяжений — группа всех преобразований вида $\Phi_i(x_i) = x_i e^{a_i}$, a_i — параметры. Это также n-параметрическая подгруппа. Группа изоморфна $\underbrace{R \times R \times \ldots \times R}_{n}$.

Примером неабелевой группы Ли среди групп преобразований, сохраняющих множество Парето, может служить группа линейных преобразований $\Phi_i(x_i) = x_i e^{a_i} + b_i$, где a_i, b_i — параметры, $i = 1, 2, \ldots, n$.

В заключение отметим следующее. Инвариантность множества Парето относительно действия группы преобразований не означает инвариантности подмножеств множества Парето относительно действия преобразований этой группы. Таким образом, любое эффективное решение, выбранное по какому-либо правилу выбора из множества Парето, может оказаться неинвариантным относительно действия той или иной подгруппы преобразований. Поэтому априорное задание подгруппы преобразований, сохраняющих выбираемое решение, накладывает серьезные ограничения на правила выбора эффективных решений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предпринята попытка дать ответ на вопрос, который постоянно возникает в задачах, связанных с многозначным выбором. Основной вывод — алгоритмы отыскания решений задач многозначного выбора должны строиться на основании свойств симметрии, которые являются характеристическими для рассматриваемой задачи. Таким образом, приоритетной для исследований является не проблема сопоставления частных критериев, а проблема поиска группы преобразований, относительно которой принимаемое решение должно быть инвариантным. В работе вычислена полная группа преобразований, которая сохраняет отношение порядка Парето и, следовательно, не изменяет множество Парето оптимальных решений многокритериальной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений. — СПБ: БЧВ-Петербург, 2005. — 416 с.
2. Глухов В.В., Медников М.Д., Коробко С.Б. Математические методы и модели для менеджмента. — СПБ: Лань, 2000. — 256 с.
3. Перепелица В.А. Многокритериальные задачи теории графов. — Киев: УМК, 1989. — 67 с.
4. Дубов Ю.А., Травкин С.И., Якимец В.Н. Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. — М.: Наука, 1986. — 296 с.
5. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. — М.: Наука, 1973. — 400 с.
6. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. — М.: Наука, 1984. — 527 с.
7. Ибрагимов Н.Х. Азбука группового анализа. — М.: Знание, 1989. — 48 с.
8. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983. — 282 с.

Поступила 19.11.2007
После доработки 01.06.2009