СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

В.М. БУЛАВАЦКИЙ, В.В. СКОПЕЦКИЙ

УДК 517.954:532.546

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ДИФФУЗИИ С РЕЛАКСАЦИЕЙ

Ключевые слова: *математическое моделирование, неклассические модели, сингулярно возмущенные процессы, массоперенос, релаксация, системы дифференциальных уравнений в частных производных, краевые задачи, асимптотические приближения.*

ВВЕДЕНИЕ

Развитию методов математического моделирования нелинейных сингулярно возмущенных процессов фильтрационно-конвективной диффузии посвящено большое число исследований, в частности [1–3]. В настоящее время широкое развитие получила методика решения соответствующих краевых задач фильтрационно-конвективной диффузии в условиях преобладания конвективных составляющих над диффузионными, поставленных в рамках классической диффузионной модели, основанной на законе Фика [4]. Следует отметить, что классическая математическая модель диффузии недостаточно полно описывает процессы массообмена в существенно неравновесных условиях [5, 6]. В частности, поскольку процессы конвективного массообмена в системах, описываемых законом Фика, рассчитываются без учета инерционности процесса, приходим к известному парадоксу бесконечной скорости распространения возмущений [5]. Попытки устранить этот недостаток приводят к необходимости учета инерционных эффектов запаздывания. Заметим, что, например, в концентрированных растворах полимеров релаксационные процессы протекают достаточно медленно. Это же относится и к низкотемпературным жидкостям, жидкостям, помещенным в быстропеременные внешние поля, и т.п. [5]. В математической формулировке законов переноса релаксационные явления преимущественно учитываются на основе следующего [5] обобщения закона Фика:

$$\vec{q}+\tau_1 \frac{\partial \vec{q}}{\partial t}=-D\nabla\left(C+\tau_2 \frac{\partial C}{\partial t}\right). \qquad (1)$$

Здесь $\vec{q}$, C — диффузионный поток и концентрация соответственно, D — коэффициент диффузии, τ_1, τ_2 — параметры релаксации диффузионного потока и градиента концентрации соответственно, ∇ — оператор Гамильтона. Соотношение (1) показывает, что диффузионный поток не возникает мгновенно, а при появлении градиента концентрации запаздывает (вследствие инерционности процесса переноса) на время порядка τ_1. В силу тех же инерционных свойств, присущих всем материальным объектам, имеет место также релаксация градиента концентрации при мгновенном исчезновении диффузионных потоков либо задержка возникновения градиентов концентрации при мгновенном появлении указанных потоков [5].

Соответствующее обобщенному закону Фика (1) дифференциальное уравнение конвективной диффузии [7] является псевдогиперболическим уравнением в частных производных третьего порядка, более адекватно моделирует процессы массообмена в существенно неравновесных условиях и позволяет учитывать конечную скорость распространения возмущений.

В рамках основанной на соотношении (1) математической модели в настоящей работе получены асимптотические приближения решений некоторых сингулярно возмущенных краевых задач конвективной диффузии (с учетом релаксационных эффектов) растворимых веществ при плоской установившейся фильтрации в двухсвязной области.

ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИОННО–КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ С РЕЛАКСАЦИЕЙ В ДВУХСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

Предположим, что имеет место процесс конвективной диффузии с релаксацией растворимых веществ при двумерной установившейся фильтрации по закону Дарси [4] согласно рассмотренной в [2] фильтрационной схеме в двухсвязной криволинейной области G_z в физической плоскости $z = x + iy$, ограниченной двумя гладкими замкнутыми контурами L_* и L^* (внутренний и внешний соответственно). Тогда в рамках основанной на соотношении (1) неклассической математической модели конвективной диффузии [7] динамический процесс описывается в области $G = G_z \times (0, +\infty)$ следующей краевой задачей:

$$\sigma\tau_1 \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial C}{\partial t} = D\Delta\left(C + \tau_2 \frac{\partial C}{\partial t}\right) - \left(\vec{v}\cdot\nabla\left(C + \tau_1 \frac{\partial C}{\partial t}\right)\right), \qquad (2)$$

$$C|_{L_*} = \widetilde{C}_1(M, t), \quad C|_{L^*} = \widetilde{C}_2(M, t), \qquad (3)$$

$$C(M, 0) = \widetilde{C}_0(M), \quad C_t(M, 0) = \widetilde{C}_*(M), \qquad (4)$$

$$\Delta\varphi = 0, \quad \varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*. \qquad (5)$$

Здесь $C(x, y, t)$ — концентрация растворимого вещества в точке (x, y) в момент времени t, $\vec{v} = \nabla\varphi$ — скорость фильтрации, $\varphi(x, y)$ — потенциал скорости фильтрации, σ — пористость, D — коэффициент конвективной диффузии, τ_1, τ_2 — параметры релаксации, φ_*, φ^* — заданные значения потенциала скорости на границе G_z, $\widetilde{C}_0, \widetilde{C}_*, \widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2$ — заданные достаточно гладкие функции, согласованные между собой на ребрах области G, Δ — оператор Лапласа по переменным x, y.

Далее предполагаем, что конвективный механизм массопереноса преобладает над диффузионным, и положим $D = \varepsilon a$, где $a = \mathrm{const} > 0$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Отметим, что в частном случае $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 0$ задача (2)–(5) при малом D сводится к изученной в [2] соответствующей сингулярно возмущенной краевой задаче для классической математической модели фильтрационно-конвективной диффузии растворимых веществ.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИОННО–КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ С РЕЛАКСАЦИЕЙ В УСЛОВИЯХ ПРЕОБЛАДАНИЯ КОНВЕКТИВНОГО МЕХАНИЗМА НАД ДИФФУЗИОННЫМ

Предполагая аналогично [2], что фильтрационная задача (5) путем конформного отображения $G_z \Rightarrow G_\omega$ (G_ω — соответствующая [2] область комплексного потенциала $\omega = \varphi + i\psi$ ($\varphi_* \le \varphi \le \varphi^*$), ψ — функция тока) решена, перейдем в (2)–(4) к переменным (φ, ψ) — точкам области комплексного потенциала G_ω. В новых переменных рассматриваемая периодическая по ψ краевая задача принимает вид

$$\sigma\tau_1 \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial C}{\partial t} = v^2(\varphi, \psi)\left[a\varepsilon\left(1 + \tau_2 \frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta C(\varphi, \psi, t) - \left(1 + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial C}{\partial \varphi}\right], \qquad (6)$$

$$C(\varphi_*, \psi, t) = \widetilde{C}_1(\psi, t), \; C(\varphi^*, \psi, t) = \widetilde{C}_2(\psi, t), \qquad (7)$$

$$C(\varphi, \psi, 0) = \widetilde{C}_0(\varphi, \psi), \; C_t(\varphi, \psi, 0) = \widetilde{C}_*(\varphi, \psi), \qquad (8)$$

где $v^2(\varphi, \psi) = \vec{v}\cdot\bar{\vec{v}} = v_x^2(\varphi, \psi) + v_y^2(\varphi, \psi)$ — известная функция.

В предположениях достаточной гладкости и так называемых сильных [2] условий согласованности начальных и граничных условий решение задачи (6)–(8) будем искать в соответствии с асимптотическим методом Вишика–Люстерника [8, 9] в виде асимптотического ряда

$$
C(\varphi,\psi,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i C_i(\varphi,\psi,t)+
$$
$$
+\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i(\Pi_i(\xi,\psi,t)+L_i(\xi,\psi,\tau))+R_{n+1}(\varphi,\psi,t,\varepsilon), \tag{9}
$$

где $C_i(\varphi,\psi,t)$ $(i=\overline{0,n})$ — члены регулярной части асимптотики, $\Pi_i(\xi,\psi,t)$ $(i=\overline{0,n+1})$ — функции типа погранслоя в окрестности $\varphi=\varphi^*$, $L_i(\xi,\psi,\tau)$ — угловые погранфункции в окрестности $(\varphi^*,\psi,0)$, $\xi=\dfrac{\varphi^*-\varphi}{\varepsilon}$, $\tau=\dfrac{t}{\varepsilon}$ — погранслойные переменные, R_{n+1} — остаточный член.

Уравнения для определения регулярной части асимптотики получаются применением стандартной процедуры метода возмущений и имеют вид

$$
\left(1+\tau_1\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\sigma\frac{\partial C_i}{\partial t}+\upsilon^2(\varphi,\psi)\frac{\partial C_i}{\partial\varphi}\right)=g_i(\varphi,\psi,t)\quad(i=\overline{0,n}), \tag{10}
$$

где функции $g_i(\varphi,\psi,t)$ рекуррентно выражаются через $C_{i-1}(\varphi,\psi,t)$:

$$
g_i(\varphi,\psi,t)=\begin{cases}0 & (i=0),\\ a\upsilon^2(\varphi,\psi)\left(1+\tau_2\dfrac{\partial}{\partial t}\right)\Delta C_{i-1}(\varphi,\psi,t) & (i=\overline{1,n}).\end{cases}
$$

Аналогично получаем уравнения для определения погранслойных функций Π_i $(i=\overline{0,n+1})$. Указанные уравнения имеют вид

$$
a\left(1+\tau_2\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2\Pi_i}{\partial\xi^2}+\left(1+\tau_1\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial\Pi_i}{\partial\xi}=d_i(\xi,\psi,t)\quad(i=\overline{0,n+1}), \tag{11}
$$

где

$$
d_i(\xi,\psi,t)=\begin{cases}0\quad(i=0),\\ \upsilon^{-2}(\varphi^*,\psi)\left\{\sigma\tau_1\dfrac{\partial^2\Pi_{i-1}}{\partial t^2}+\sigma\dfrac{\partial\Pi_{i-1}}{\partial t}-A_{i-1}(\xi,\psi)\left[a\left(1+\tau_2\dfrac{\partial}{\partial t}\right)\dfrac{\partial^2\Pi_{i-1}}{\partial\xi^2}+\right.\right.\\ \left.\left.+\left(1+\tau_1\dfrac{\partial}{\partial t}\right)\dfrac{\partial\Pi_{i-1}}{\partial\xi}\right]\right\}-a\left(1+\tau_2\dfrac{\partial}{\partial t}\right)\dfrac{\partial^2\Pi_{i-2}}{\partial\psi^2}\quad(i=\overline{1,n+1}),\end{cases}
$$

$A_i(\xi,\psi)$ $(i=\overline{1,n+1})$ — коэффициенты при i-х степенях ε разложения функции $\upsilon^2(\varphi^*-\varepsilon\xi,\psi)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\varphi=\varphi^*$, $\Pi_{-1}\equiv 0$. Краевые условия для функций членов регулярной части асимптотики запишем в виде

$$
C_i(\varphi_*,\psi,t)=\widetilde{C}_i(\psi,t),\ C_i(\varphi,\psi,0)=\widetilde{C}_i^{(0)}(\varphi,\psi),\ C_{i_t}(\varphi,\psi,0)=\widetilde{C}_i^*(\varphi,\psi) \tag{12}
$$
$$
(i=\overline{0,n}),
$$

где

$$
\widetilde{C}_i(\psi,t)=\begin{cases}\widetilde{C}_1(\psi,t) & (i=0),\\ 0 & (i=\overline{1,n}),\end{cases}\quad \widetilde{C}_i^0(\varphi,\psi)=\begin{cases}\widetilde{C}_0(\varphi,\psi) & (i=0),\\ 0 & (i=\overline{1,n}),\end{cases}
$$
$$
\widetilde{C}_i^*(\varphi,\psi)=\begin{cases}\widetilde{C}_*(\varphi,\psi) & (i=0),\\ 0 & (i=\overline{1,n}).\end{cases}
$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что решения задач (10), (12) определяются соотношениями

$$
C_i(\varphi,\psi,t)=\widetilde{C}_i^{(0)}(\varphi,\psi)e^{-\frac{t}{\tau_1}}+\frac{1}{\tau_1}\int_0^t U_i(\varphi,\psi,\tau)\,e^{-\frac{t-\tau}{\tau_1}}d\tau\quad(i=\overline{0,n}), \tag{13}
$$

где функции $U_i(\varphi,\psi,t)$ $(i=\overline{0,n})$ (являющиеся решениями соответствующих угловых задач Коши для уравнения конвективного переноса) определены в [2] и имеют вид

$$U_0(\varphi,\psi,t)=\left[\begin{array}{ll} U_*(\psi,t-f(\varphi,\psi)), & t\ge f(\varphi,\psi), \\ U^{(0)}(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t,\psi),\psi), & t<f(\varphi,\psi), \end{array}\right.$$

$$U_i(\varphi,\psi,t)=\left[\begin{array}{ll} \displaystyle\int_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{g_i(s,\psi,t-f(\varphi,\psi)+f(s,\psi))}{v^2(s,\psi)}ds, & t\ge f(\varphi,\psi)\ (i=\overline{1,n}), \\ \displaystyle\sigma^{-1}\int_0^t g_i(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t+\tilde t,\psi),\psi,\tilde t)d\tilde t, & t<f(\varphi,\psi), \end{array}\right.$$

причем

$$U_*(\psi,t)=\tilde C_1(\psi,t)+\tau_1\frac{\partial\tilde C_1(\psi,t)}{\partial t},\quad U^{(0)}(\varphi,\psi)=\tilde C_0(\varphi,\psi)+\tau_1\tilde C_*(\varphi,\psi),$$

$f(\varphi,\psi)=\sigma\displaystyle\int_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{ds}{v^2(s,\psi)}$, f^{-1} — функция, обратная функции f по переменной φ (такая функция существует, поскольку $v^{-2}(s,\psi)$ является непрерывно дифференцируемой, ограниченной и положительно-определенной [2]).

Функции погранслойного типа Π_i $(i=\overline{0,n+1})$ находятся из уравнений (11) с учетом краевых условий

$$\Pi_i(0,\psi,t)=p_i(\psi,t),\ \Pi_i(\xi,\psi,0)=-L_i(\xi,\psi,0),$$
$$\Pi_i\to 0\ (\xi\to\infty)\ (i=\overline{0,n+1}), \tag{14}$$

где

$$p_i(\psi,t)=\left[\begin{array}{ll} \tilde C_2(\psi,t)-C_0(\varphi^*,\psi,t) & (i=0), \\ -C_i(\varphi^*,\psi,t) & (i=\overline{1,n}), \\ 0 & (i=n+1). \end{array}\right.$$

Используя для решения задачи (11), (14) метод Римана [10], после простых, но громоздких преобразований находим функции Π_i в виде

$$\Pi_i(\xi,\psi,t)=e^{-\frac{\tau_1}{a\tau_2}\xi}\left\{\int_0^t J_0(2\omega\sqrt{\xi(t-\eta)})\left[\frac{\partial p_i(\psi,\eta)}{\partial\eta}+\frac{1}{\tau_2}p_i(\psi,\eta)\right]e^{-\frac{t-\eta}{\tau_2}}d\eta+\right.$$
$$+\int_0^t\int_0^\xi\int_0^\zeta J_0(2\omega\sqrt{(\xi-\zeta)(t-\eta)})\left[d_i(\mu,\psi,\eta)+\frac{\partial}{\partial\mu}\left(a\frac{\partial L_i(\mu,\psi,0)}{\partial\mu}+L_i(\mu,\psi,0)\right)\right]\times$$
$$\left.\times\exp\left[\frac{1}{\tau_2}\left(\frac{\tau_1}{a}\zeta+\eta-t\right)\right]d\mu\,d\zeta\,d\eta\right\}-L_i(\xi,\psi,0)\quad(i=\overline{0,n+1}), \tag{15}$$

где $\omega=\sqrt{\dfrac{1}{a\tau_2}(1-\dfrac{\tau_1}{\tau_2})}$, $\tau_2>\tau_1$, $J_0(z)$ — функция Бесселя нулевого порядка [10].

Из явного представления функций Π_i (15) непосредственно следует, что эти функции являются функциями погранслойного типа по переменной ξ, что оправдывает их назначение как поправок на выходе фильтрационного потока из рассматриваемого пласта.

Аналогично изложенному выше для определения угловых погранфункций L_i $(i=\overline{0,n+1})$ получаем последовательность краевых задач

$$\sigma\tau_1\frac{\partial^2 L_i}{\partial\tau^2}=v^2(\varphi^*,\psi)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\tau}\left(a\tau_2\frac{\partial L_i}{\partial\xi}+\tau_1 L_i\right)+f_i(\xi,\psi,\tau)\ (i=\overline{0,n+1}), \tag{16}$$

$$\begin{cases} L_i(0,\psi,\tau)=0,\ L_i(\xi,\psi,\tau)\to 0\ (\xi,\tau\to\infty) & (i=\overline{0,n+1}),\\ \dfrac{\partial L_i}{\partial \tau}(\xi,\psi,0)=\mu_i(\xi,\psi) & (i=\overline{0,n+1}), \end{cases} \tag{17}$$

где
$$\mu_i(\xi,\psi)=\left[\begin{array}{ll} 0 & (i=0),\\ -\dfrac{\partial \Pi_{i-1}(\xi,\psi,0)}{\partial t} & (i=\overline{1,n+1}), \end{array}\right. \qquad f_0(\xi,\psi,\tau)\equiv 0,$$

$$f_i(\xi,\psi,\tau)=\upsilon^2(\varphi^*,\psi)\frac{\partial}{\partial \xi}\left(a\frac{\partial L_{i-1}}{\partial \xi}+L_{i-1}\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{i}A_{i-k+1}(\xi,\psi)\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\tau}\left(a\tau_2\frac{\partial L_{k-1}}{\partial \xi}+\tau_1 L_{k-1}\right)-\sigma\frac{\partial L_{i-1}}{\partial \tau}\quad (i=\overline{1,n+1}).$$

Заменой $\dfrac{\partial L}{\partial \tau}=U(\xi,\psi,\tau)$, где U — новая неизвестная функция, рассматриваемая задача $\forall\ i\in\overline{(0,n+1)}$ сводится к решению первой краевой задачи для уравнения конвективной диффузии (теплопроводности) на полуоси $0<\xi<+\infty$ с однородным граничным условием в точке $\xi=0$ (ψ фигурирует как параметр). Исключая из указанного уравнения конвективную составляющую и используя методику интегральных преобразований с бесконечными пределами [11, 12], получаем решение рассматриваемых задач в виде

$$L_i(\xi,\psi,\tau)=-e^{-\frac{\tau_1}{2a\tau_2}\xi}\int_{\tau}^{+\infty}\left[\Phi_i(\xi,\psi,\nu)+\int_0^{\nu}f_i(\lambda,\psi,\rho)\,G_i(\xi,\psi,\nu-\rho)d\rho\right]d\nu \tag{18}$$

$$(i=\overline{0,n+1}),$$

где
$$\Phi_i(\xi,\psi,\tau)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\mu_i(\lambda,\psi)\exp\left[\frac{\tau_1\lambda}{2a\tau_2}-\alpha(\zeta,\psi)\tau\right]\sin(\lambda\zeta)\sin(\xi\zeta)\,d\lambda\,d\zeta\,,$$

$$G_i(\xi,\psi,\tau-\rho)=\frac{2}{\pi\sigma\tau_1}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_i(\lambda,\psi,\rho)\exp\left[\frac{\tau_1\lambda}{2a\tau_2}-\alpha(\zeta,\psi)(\tau-\rho)\right]\times$$

$$\times\sin(\lambda\zeta)\sin(\xi\zeta)d\lambda\,d\zeta\,,$$

$$\alpha(\zeta,\psi)=\frac{\upsilon^2(\varphi^*,\psi)}{\sigma\tau_1}\left(a\tau_2\zeta^2+\frac{\tau_1^2}{4a\tau_2}\right).$$

Из явного вида функций L_i (18) следует, что они являются функциями погранслойного типа по переменным ξ и τ. Отметим также, что в практических расчетах достаточно найти несколько первых членов асимптотического представления (9).

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ФИЛЬТРАЦИОННО-КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ В СЛУЧАЕ СЛАБО ВЫРАЖЕННОЙ РЕЛАКСАЦИОННОСТИ ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА И ПРЕОБЛАДАНИЯ КОНВЕКТИВНОГО МЕХАНИЗМА МАССОПЕРЕНОСА

В случае слабо выраженных релаксационных свойств диффузионного процесса и преобладания конвективного механизма массопереноса над диффузионным положим $\tau_1=\varepsilon\tau_1'$, $\tau_2=\varepsilon\tau_2'$, $D=\varepsilon a$, где $\varepsilon>0$ — малый параметр. Опуская далее знак «штрих», перепишем уравнение (6) в виде

$$\sigma\tau_1\varepsilon\frac{\partial^2 C}{\partial t^2}+\sigma\frac{\partial C}{\partial t}=\upsilon^2(\varphi,\psi)\left[a\varepsilon\left(1+\tau_2\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta C(\varphi,\psi,t)-\left(1+\tau_1\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial C}{\partial \varphi}\right]. \tag{19}$$

Таким образом, изучение динамики распространения растворителя в фильтрационном поле скоростей в рассматриваемом случае сводится к решению краевой задачи (19), (7), (8).

В рамках отмеченных выше условий гладкости и согласованности [2] решение задачи (19), (7), (8) ищем согласно асимптотическому методу [8, 9] в виде

$$C(\varphi,\psi,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i C_i(\varphi,\psi,t)+$$
$$+\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i(P_i(\varphi,\psi,\tau)+\Pi_i(\xi,\psi,t)+L_i(\xi,\psi,\tau))+\widetilde{R}_{n+1}, \tag{20}$$

где $C_i(\varphi,\psi,t)$ $(i=\overline{0,n})$ — члены регулярной части асимптотики, $\Pi_i(\xi,\psi,t)$, $P_i(\varphi,\psi,\tau)$ $(i=\overline{0,n+1})$ — пограничные функции, используемые для описания погранслоя в окрестностях $\varphi=\varphi^*$ (поправки на выходе фильтрационного течения из рассматриваемой области G_z) и $t=0$ соответственно, $L_i(\xi,\psi,\tau)$ $(i=\overline{0,n+1})$ — угловые погранфункции, ξ,τ — определенные выше погранслойные переменные, $\widetilde{R}_{n+1}$ — остаточный член.

Используя стандартную процедуру метода возмущений [8, 9], для определения регулярной части асимптотики получаем последовательность задач

$$\sigma\frac{\partial C_i}{\partial t}+\upsilon^2(\varphi,\psi)\frac{\partial C_i}{\partial\varphi}=g_i(\varphi,\psi,t)\ (i=\overline{0,n}), \tag{21}$$

$$C_0(\varphi_*,\psi,t)=\widetilde{C}_1(\psi,t),\ C_0(\varphi,\psi,0)=\widetilde{C}_0(\varphi,\psi), \tag{22}$$

$$C_i(\varphi_*,\psi,t)=0,\ C_i(\varphi,\psi,0)=-P_i(\varphi,\psi,0)\ (i=\overline{1,n}), \tag{23}$$

где

$$g_i(\varphi,\psi,t)=\begin{cases} 0 & (i=0),\\ \upsilon^2(\varphi,\psi)\left[a\Delta C_0(\varphi,\psi,t)-\tau_1\dfrac{\partial^2 C_0}{\partial\varphi\,\partial t}\right]-\sigma\tau_1\dfrac{\partial^2 C_0}{\partial t^2} & (i=1),\\ \upsilon^2(\varphi,\psi)\left[a\Delta C_{i-1}(\varphi,\psi,t)-\tau_1\dfrac{\partial^2 C_{i-1}}{\partial\varphi\,\partial t}+a\tau_2\dfrac{\partial}{\partial t}(\Delta C_{i-2})\right]- & \\ \qquad -\sigma\tau_1\dfrac{\partial^2 C_{i-1}}{\partial t^2} & (i=\overline{2,n}).\end{cases}$$

Отсюда, на основе результатов работы [2], получаем соотношения для решения C_0 вырожденной задачи конвективного переноса

$$C_0(\varphi,\psi,t)=\begin{cases}\widetilde{C}_1(\psi,t-f(\varphi,\psi)), & t\ge f(\varphi,\psi),\\ \widetilde{C}_0(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t,\psi),\psi), & t<f(\varphi,\psi),\end{cases} \tag{24}$$

и диффузионных поправок C_i $(i=\overline{1,n})$

$$C_i(\varphi,\psi,t)=\begin{cases}\displaystyle\int_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{g_i(\widetilde{\varphi},\psi,f(\widetilde{\varphi},\psi)+t-f(\varphi,\psi))}{\upsilon^2(\widetilde{\varphi},\psi)}d\widetilde{\varphi}, & t\ge f(\varphi,\psi)\ (i=\overline{1,n}),\\ \displaystyle\sigma^{-1}\int_0^t g_i(f^{-1}(\widetilde{t}+f(\varphi,\psi)-t),\psi,\widetilde{t})d\widetilde{t}- & \\ \qquad -P_i(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t),\psi,0), & t<f(\varphi,\psi),\end{cases} \tag{25}$$

где функция $f(\varphi,\psi)$ определена в предыдущем разделе.

Аналогично получаем рекуррентные последовательности задач для определения функций типа погранслоя P_i, Π_i и L_i $(i=\overline{0,n+1})$:

$$\begin{cases}\tau_1\dfrac{\partial^2 P_i}{\partial\tau^2}+\dfrac{\partial P_i}{\partial\tau}=q_i(\varphi,\psi,\tau) & (i=\overline{0,n+1}),\\ \left.\dfrac{\partial P_i}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=\widetilde{r}_i(\varphi,\psi),\ P_i(\varphi,\psi,\tau)\to 0\ \ (\tau\to\infty)\ (i=\overline{0,n+1}),\end{cases} \tag{26}$$

$$\begin{cases} a\dfrac{\partial^2 \Pi_i}{\partial \xi^2}+\dfrac{\partial \Pi_i}{\partial \xi}=r_i(\xi,\psi,t) & (i=\overline{0,n+1}),\\ \Pi_i(0,\psi,t)=\rho_i(\psi,t),\ \Pi_i(\xi,\psi,t)\to 0\ \ (\xi\to\infty) & (i=\overline{0,n+1}),\end{cases} \tag{27}$$

$$\sigma\tau_1\frac{\partial^2 L_i}{\partial\tau^2}+\sigma\frac{\partial L_i}{\partial\tau}=\upsilon^2(\varphi^*,\psi)\left[a\left(1+\tau_2\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\frac{\partial^2 L_i}{\partial\xi^2}+\left(1+\tau_1\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\frac{\partial L_i}{\partial\xi}\right]+$$

$$+\widetilde{f}_i(\xi,\psi,\tau)\ \ (i=\overline{0,n+1}), \tag{28}$$

$$L_i(0,\psi,\tau)=-P_i(\varphi^*,\psi,\tau),\ L_i\to 0\ \ (\xi,\tau\to\infty)\ \ (i=\overline{0,n+1}), \tag{29}$$

$$L_i(\xi,\psi,0)=-\Pi_i(\xi,\psi,0),\ \frac{\partial L_i(\xi,\psi,0)}{\partial\tau}=-\frac{\partial\Pi_{i-1}(\xi,\psi,0)}{\partial t}\ \ (i=\overline{0,n+1}), \tag{30}$$

где

$$q_i(\varphi,\psi,\tau)=\begin{cases} 0 & (i=0),\\ -\sigma^{-1}\upsilon^2(\varphi,\psi)\left(1+\tau_1\dfrac{\partial}{\partial\tau}\right)\dfrac{\partial P_0}{\partial\varphi} & (i=1),\\ \sigma^{-1}\upsilon^2(\varphi,\psi)\left[a\left(1+\tau_2\dfrac{\partial}{\partial\tau}\right)\Delta P_{i-2}-\left(1+\tau_1\dfrac{\partial}{\partial\tau}\right)\dfrac{\partial P_{i-1}}{\partial\varphi}\right] & (i=\overline{2,n+1}),\end{cases}$$

$$\widetilde{r}_i(\varphi,\psi)=\begin{cases} 0 & (i=0),\\ \widetilde{C}_*(\varphi,\psi)-\dfrac{\partial C_0(\varphi,\psi,0)}{\partial t} & (i=1),\\ -\dfrac{\partial C_{i-1}(\varphi,\psi,0)}{\partial t} & (i=\overline{2,n+1}),\end{cases}$$

$$\rho_i(\psi,t)=\begin{cases} \widetilde{C}_2(\psi,t)-C_0(\varphi^*,\psi,t) & (i=0),\\ -C_i(\varphi^*,\psi,t) & (i=\overline{1,n}),\\ 0 & (i=n+1),\end{cases}$$

$$r_0(\xi,\psi,t)\equiv 0,\quad r_1(\xi,\psi,t)=\sigma\upsilon^{-2}(\varphi^*,\psi)\frac{\partial\Pi_0}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial t}\left(\tau_1\Pi_0+a\tau_2\frac{\partial\Pi_0}{\partial\xi}\right),$$

$$r_2(\xi,\psi,t)=\upsilon^{-2}(\varphi^*,\psi)\left[\sigma\tau_1\frac{\partial^2\Pi_0}{\partial t^2}+\sigma\frac{\partial\Pi_0}{\partial t}-A_1(\xi,\psi)r_1(\xi,\psi,t)-\right.$$

$$\left.-A_1(\xi,\psi)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial t}\left(a\tau_2\frac{\partial\Pi_0}{\partial\xi}+\tau_1\Pi_0\right)\right]-\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial t}\left(a\tau_2\frac{\partial\Pi_1}{\partial\xi}+\tau_1\Pi_1\right)-a\frac{\partial^2\Pi_0}{\partial\psi^2},\ldots$$

$$\ldots, A_1(\xi,\psi)=-2\xi\upsilon(\varphi^*,\psi)\upsilon'_\varphi(\varphi^*,\psi),\qquad \widetilde{f}_0(\xi,\psi,\tau)\equiv 0,$$

$$\widetilde{f}_1(\xi,\psi,\tau)=A_1(\xi,\psi)\left[a\left(1+\tau_2\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\frac{\partial^2 L_0}{\partial\xi^2}+\left(1+\tau_1\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\frac{\partial L_0}{\partial\xi}\right].$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что решение задачи (26) дается следующими соотношениями [13]:

$$P_i(\varphi,\psi,\tau)=-e^{-\tau/\tau_1}\left[\tau_1\widetilde{r}_i(\varphi,\psi)+\int_0^{\tau}q_i(\varphi,\psi,\eta)e^{\eta/\tau_1}d\eta\right]-\int_{\tau}^{+\infty}q_i(\varphi,\psi,\eta)d\eta$$

$$(i=\overline{0,n+1}). \tag{31}$$

Функции Π_i $(i=\overline{0,n+1})$, как решения задач (27), находим в виде

$$\Pi_i(\xi,\psi,t)=\rho_i(\psi,t)e^{-\xi/a}-(1-e^{-\xi/a})\int_0^{+\infty}r_i(\eta,\psi,t)d\eta+\int_0^{\xi}r_i(\eta,\psi,t)\left(1-e^{-\frac{\xi-\eta}{a}}\right)d\eta$$

$$(i=\overline{0,n+1}). \qquad (32)$$

Относительно задач (28)–(30) для определения угловых погранфункций L_i $(i=\overline{0,n+1})$ отметим, что в общем случае решение этих задач можно получить с использованием численных методов [14, 15]. В случае $\tau_1=\tau_2$ удается исключить конвективную составляющую из уравнения (28) и получить аналитическое решение, в частности с помощью метода интегральных преобразований [11, 12]. В качестве примера приведем решение задачи при $i=0$. Имеем

$$L_0(\xi,\psi,\tau)=e^{-\frac{\xi}{2a}}\left[\Phi(\xi,\psi,\tau)-P_0(\varphi^*,\psi,\tau)+\int_0^{\tau}f(\varphi^*,\psi,\nu)G(\xi,\psi,\tau-\nu)d\nu\right], \qquad (33)$$

где

$$\Phi(\xi,\psi,\tau)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left[P_0(\varphi^*,\psi,0)-\Pi_0(\rho,\psi,0)e^{\rho/2a}\right]Q(\psi,\zeta,\tau)\sin(\zeta\rho)\sin(\zeta\xi)d\rho d\zeta,$$

$$Q(\psi,\zeta,\tau)=\left[\frac{1}{\tau_1}+\frac{\upsilon^2(\varphi^*,\psi)}{\sigma}\left(\frac{1}{4a}+a\zeta^2\right)\right]K(\psi,\zeta,\tau)+K_\tau(\psi,\zeta,\tau),$$

$$K(\psi,\zeta,\tau)=\left\{\frac{1}{4}\left[\frac{\upsilon^2(\varphi^*,\psi)}{\sigma}\left(\frac{1}{4a}+a\zeta^2\right)-\frac{1}{\tau_1}\right]\right\}^{-1}\times$$

$$\times\,\mathrm{sh}\left\{\frac{1}{4}\left[\frac{\upsilon^2(\varphi^*,\psi)}{\sigma}\left(\frac{1}{4a}+a\zeta^2\right)-\frac{1}{\tau_1}\right]\tau\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\tau_1}+\frac{\upsilon^2(\varphi^*,\psi)}{\sigma}\left(\frac{1}{4a}+a\zeta^2\right)\right]\tau\right\},$$

$$f(\varphi^*,\psi,\tau)=\frac{\upsilon^2(\varphi^*,\psi)}{4a}P_0(\varphi^*,\psi,\tau)+\left(\sigma+\frac{\tau_1\upsilon^2(\varphi^*,\psi)}{4a}\right)\frac{\partial P_0(\varphi^*,\psi,\tau)}{\partial\tau}+$$

$$+\sigma\tau_1\frac{\partial^2P_0(\varphi^*,\psi,\tau)}{\partial\tau^2},$$

$$G(\xi,\psi,\tau-\nu)=\frac{2}{\pi\sigma\tau_1}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}K(\psi,\zeta,\tau-\nu)\sin(\zeta\rho)\sin(\zeta\xi)d\rho d\zeta.$$

Кратко остановимся на вопросе взаимосвязи рассматриваемой релаксационной модели с классическими моделями. Заметим, что уравнения (21) для определения регулярных членов асимптотики являются классическими уравнениями конвективного массопереноса растворимых веществ в двухмерном фильтрационном потоке. Отсюда заключаем, что неклассическая математическая модель фильтрационно-конвективной диффузии в условиях преобладания конвективного механизма массопереноса в некотором смысле «близка» к классической модели конвективного массопереноса, базирующейся на известном [16] уравнении гиперболического типа. Уточняя сказанное, отметим, что, поскольку функция погранслойного типа $P(\varphi,\psi,\tau)$ «подправляет» решение $C_0(\varphi,\psi,t)$ в момент времени $t\in(0,\varepsilon)$, затухая экспоненциально на больших промежутках времени, решение задачи фильтрационно-конвективной диффузии в рамках рассматриваемой математической модели, учитывающей эффекты памяти, отличается от решения соответствующей задачи в рамках классической математической модели конвективного массопереноса лишь для малых значений времени t.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе развита методика асимптотического приближения решений сингулярно возмущенных краевых задач фильтрационно-конвективной диффузии растворимых веществ в рамках неклассической конвективно-диффузионной модели с релаксацией в случае преобладания конвективных составляющих над диффузионными. Эффективность этой методики обусловлена, прежде всего, возможностью расщепления сложной математической модели исходного процесса на последовательность решений более простых задач. Результаты проведенных исследований свидетельствуют о том, что учет эффектов памяти при моделировании динамики процесса типа «диффузия–конвекция–фильтрация» особенно важен на начальных стадиях протекания указанного процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бомба А.Я., Булавацький В.М., Скопецький В.В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. — Київ: Наук. думка, 2007. — 292 с.
2. Бомба А.Я., Барановський С.В., Присяжнюк І.М. Нелінійні сингулярно збурені задачі типу «конвекція-дифузія». — Рівне: НУВГП, 2008. — 252 с.
3. Лаврик В.И., Бомба А.Я., Власюк А.П. Об асимптотическом приближении решений некоторых задач массопереноса при фильтрации в неоднородной среде. — Киев, 1985. — 16 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 85–72).
4. Ляшко И.И., Демченко Л.И., Мистецкий Г.Е. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. — Киев: Наук. думка, 1991. — 264 с.
5. Лыков А.В., Берковский Б.М. Законы переноса в неньютоновских жидкостях // Тепло- и массообмен в неньютоновских жидкостях. — М.: Энергия, 1968. — С. 5–14.
6. Динариев О.Ю., Николаев О.В. О релаксационных процессах в низкопроницаемых пористых материалах // Инж.-физ. журн. — 1990. — **58**, № 1. — С.78–81.
7. Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопецький В.В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. — Київ: Наук. думка, 2005. — 283 с.
8. Вишик М.И., Люстерник Л.Я. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. — 1957. — **12**, вып. 5. — С. 3–122.
9. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высш. шк., 1990. — 208 с.
10. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972. — 259 с.
11. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. — М.: Наука, 1974. — 544 с.
12. Карташов Э.И. Аналитические методы в теплопроводности твердых тел. — М.: Высш. шк., 1979. — 415 с.
13. Булавацкий В.М., Скопецкий В.В. Обобщенная математическая модель динамики консолидационных процессов с релаксацией // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 5. — С. 25–34.
14. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987. — 600 с.
15. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. — М.: Науч. мир, 2003. — 316 с.
16. Лыков А.В. Тепломассообмен. — М.: Энергия, 1978. — 479 с.

Поступила 29.01.2009