СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

И.В. СЕРГИЕНКО, Е.Ф. ГАЛБА, В.С. ДЕЙНЕКА

УДК 512.61

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ В ТЕОРИИ ВЗВЕШЕННОЙ ПСЕВДОИНВЕРСИИ С ВЫРОЖДЕННЫМИ ВЕСАМИ

Ключевые слова: *взвешенные псевдообратные матрицы с вырожденными весами, взвешенные нормальные псевдорешения с вырожденными весами, разложения взвешенных псевдообратных матриц, итерационные методы*.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ и $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — симметричные положительно-полуопределенные матрицы. Тогда взвешенная псевдообратная матрица для матрицы A в работе [1] определяется как матрица $X = A_{BC}^{+}$, удовлетворяющая четырем условиям:

$$AXA = A,\ XAX = X,\ (BAX)^T = BAX,\ (XAC)^T = XAC. \tag{1}$$

В [1] также определены условия, при которых система матричных уравнений (1) имеет единственное решение. Как следует из (1), матрица AX симметризуема слева симметризатором B, а матрица XA — справа симметризатором C.

В ряде публикаций (например, работы [2, 3] и библиография к ним) рассматриваются взвешенные псевдообратные матрицы с вырожденными весами, определенные системой (1) при выполнении условий существования ее решений. Данные статьи посвящены исследованию свойств таких матриц и взвешенных нормальных псевдорешений, получению и исследованию представлений и разложений матриц, построению итерационных методов и регуляризованных задач для вычисления приближений к взвешенным псевдообратным матрицам и взвешенным нормальным псевдорешениям с вырожденными весами.

В [4] изучалась взвешенная псевдообратная матрица с вырожденными весами, определенная системой матричных уравнений

$$AXA = A,\ XAX = X,\ (BAX)^T = BAX,\ (CXA)^T = CXA, \tag{2}$$

т.е. случай, когда обе матрицы, AX и XA, симметризуемы слева вырожденными симметризаторами B и C. В [4] определены условия, при которых система матричных уравнений (2) имеет единственное решение, и установлена связь взвешенных псевдообратных матриц со взвешенными нормальными псевдорешениями.

В настоящей работе рассматривается взвешенная псевдообратная матрица с вырожденными весами, определенная системой матричных уравнений

$$AXA = A,\ XAX = X,\ (AXB)^T = AXB,\ (XAC)^T = XAC, \tag{3}$$

т.е. случай, когда обе матрицы, AX и XA, симметризуемы справа соответственно симметризаторами B и C. Как и выше, предполагается, что B и C — симметричные положительно-полуопределенные матрицы. Основное внимание уделено исследованию системы (3) для определения необходимых и достаточных условий, при которых существует единственное решение этой системы матричных уравнений, а также рассмотрению вопроса существования единственного взвешенного нормального псевдорешения, определяемого на основе взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами.

При $B = C = E$, где E — единичная матрица, система матричных уравнений (3) будет определять псевдообратную матрицу Мура–Пенроуза [5, 6] к матрице A, которую обозначим A_{EE}^{+}.

Работа состоит из пяти разделов. В разд. 1 введены определения и обозначения, векторные и матричные нормы, вспомогательные утверждения и приведены основные известные результаты о существовании и единственности взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. В разд. 2 установлены условия, при которых система (3) с вырожденными весами B и C имеет единственное решение, даны представления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых и симметричных матриц. В разд. 3 доказано существование единственного взвешенного нормального псевдорешения, определяемого на основе взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами. В разд. 4 получены и исследованы разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения. Разд. 5 посвящен построению и исследованию итерационных процессов для вычисления приближений к взвешенным псевдообратным матрицам и взвешенным нормальным псевдорешениям с вырожденными весами.

Отметим, что в работе везде предполагается вещественность используемых скаляров, векторов, матриц и пространств.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ, ИЗВЕСТНЫЕ ФАКТЫ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Обозначим $\mathbb{R}^n$ n-мерное векторное пространство над полем действительных чисел, где векторы — матрицы размера $n \times 1$. Пусть H — симметричная положительно-определенная или положительно-полуопределенная матрица. Обозначим $\mathbb{R}^n(H)$ евклидово пространство в случае положительно-определенной метрики или псевдоевклидово в случае неотрицательной метрики, введенной скалярным произведением $(u, v)_H = (Hu, v)_E$, где $(u, v)_E = u^T v$. Норму (полунорму) в $\mathbb{R}^n(H)$ введем соотношением $\|u\|_H = (u, u)_H^{1/2}$. В случае положительно-полуопределенной матрицы H обозначим $\overline{\mathbb{R}}^n(H) \subset \mathbb{R}^n(H)$ и $\overline{\mathbb{R}}^n(H_{EE}^{+}) \subset \mathbb{R}^n(H_{EE}^{+})$ подпространство векторов u, удовлетворяющих условию

$$HH_{EE}^{+} u = H^{1/2} H_{EE}^{+1/2} u = u \, , \tag{4}$$

где $H_{EE}^{+1/2} = (H^{1/2})_{EE}^{+}$.

В дальнейшем для положительно-полуопределенных матриц H будем пользоваться обозначением $H_{EE}^{+p} = (H^p)_{EE}^{+}$, где p — целое или дробное число.

Так как нуль-пространства матриц H, H_{EE}^{+}, HH_{EE}^{+} и $H^{1/2} H_{EE}^{+1/2}$ совпадают [7], полунормы $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_{H_{EE}^{+}}$ для векторов в $\mathbb{R}^n(H)$, $\mathbb{R}^n(H_{EE}^{+})$ становятся нормами в $\overline{\mathbb{R}}^n(H)$, $\overline{\mathbb{R}}^n(H_{EE}^{+})$.

Определим норму прямоугольной матрицы [8]. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, а $H \in \mathbb{R}^{m \times m}$ — симметричная положительно-определенная или положительно-полуопределенная матрица, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — симметричная положительно-определенная или положительно-полуопределенная матрица, x — произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$. Предполагаем выполнение условий

$$\mathrm{rk}(HA) = \mathrm{rk}(A), \ \ \mathrm{rk}(AV) = \mathrm{rk}(A), \tag{5}$$

где $\mathrm{rk}(L)$ — ранг матрицы L.

Если H и V — положительно-определенные матрицы, то условия (5) заведомо выполняются.

Для множества матриц A, удовлетворяющих (5), введем норму соотношением

$$\|A\|_{HV} = \sup_{x \neq 0} \frac{\left\|H^{1/2} AVx\right\|_{E_m}}{\|x\|_{E_n}}, \tag{6}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, нижний индекс при единичной матрице означает ее порядок.

При таком определении норма матрицы A равна

$$\|A\|_{HV} = [\lambda_{\max}(VA^T HAV)]^{1/2}, \tag{7}$$

где $\lambda_{\max}(L)$ — максимальное собственное значение матрицы L.

В [8] показано, что функция $\|\cdot\|_{HV}$, определенная формулой (6), при выполнении условий (5) является аддитивной матричной нормой. Если условия (или одно из условий) (5) не выполняются, то формула (6) определяет полунорму матрицы A.

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$, а $H \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M \in \mathbb{R}^{p \times p}$ — симметричные положительно-полуопределенные матрицы, причем удовлетворяется одно из условий

$$AMM_{EE}^{+} = AM_{EE}^{+} M = A, \ \ MM_{EE}^{+} B = M_{EE}^{+} MB = B, \tag{8}$$

тогда [8, 9] из определения нормы матриц соотношением (6) следует

$$\|AB\|_{HV} \le \|A\|_{HM} \|B\|_{M_{EE}^{+2} V}. \tag{9}$$

Определим матричную норму для квадратной матрицы [10]. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — произвольная квадратная матрица, $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — симметричная положительно-полуопределенная матрица, удовлетворяющие условиям

$$\mathrm{rk}(HA) = \mathrm{rk}(AH) = \mathrm{rk}(A). \tag{10}$$

Норму матрицы A определим соотношением

$$\|A\|_H = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_H}{\|x\|_H} = \sup_{x \neq 0} \frac{\left\|H^{1/2} AH_{EE}^{+1/2} H^{1/2} x\right\|_E}{\left\|H^{1/2} x\right\|_E}, \tag{11}$$

где x — произвольный вектор из $\overline{\mathbb{R}}^n(H)$.

При таком определении норма матрицы A равна

$$\|A\|_H = [\lambda_{\max}(H_{EE}^{+1/2} A^T HAH_{EE}^{+1/2})]^{1/2}. \tag{12}$$

Пусть A и B — квадратные матрицы одного порядка, причем выполняется одно из условий

$$AHH_{EE}^{+} = AH_{EE}^{+} H = A, \ \ HH_{EE}^{+} B = H_{EE}^{+} HB = B, \tag{13}$$

где H — симметричная положительно-полуопределенная матрица того же порядка, что и матрицы A и B. Тогда

$$\|AB\|_H \le \|A\|_H \|B\|_H, \tag{14}$$

т.е. функция $\|\cdot\|_H$, определенная формулой (11), при выполнении условий (10) и одного из условий (13) является мультипликативной матричной нормой.

Из (11) следует

$$\|Ax\|_H \le \|A\|_H \|x\|_H, \quad x \in \overline{\mathbb{R}}^n(H),$$

т.е. введенная соотношением (11) матричная норма согласована в $\overline{\mathbb{R}}^n(H)$ с векторной нормой.

Замечание 1. Из (7) и (12) вытекает, что определенная соотношением (11) матричная норма для квадратных матриц, удовлетворяющих условиям (10), является частным случаем матричной нормы, введенной для прямоугольных матриц формулой (6), которая удовлетворяет условиям (5), если в последней положить, что A — квадратная матрица, $V = H_{EE}^{+1/2}$ и $x \in \overline{\mathbb{R}}^n(H)$. Поэтому для нормы $\|A\|_H$, определенной соотношением (11), можно пользоваться обозначением $\|A\|_{HH_{EE}^{+1/2}}$.

Замечание 2. Если в формулах (8), (9) и (13), (14) соответственно матрицы H, V, M и H положительно-определенные, то в этих формулах следует заменить псевдообратные матрицы Мура–Пенроуза обратными матрицами. Тогда условия (8), (13) заведомо выполняются. В определении нормы формулой (11) естественно положить $x \in \mathbb{R}^n(H)$. В этом случае, очевидно, формула (14) имеет место без дополнительных условий.

Приведем известные результаты о существовании и единственности взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. В [1] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Система уравнений (1) имеет единственное решение, если и только если

$$\operatorname{rk}(BA) = \operatorname{rk}(A), \ \ \operatorname{rk}(AC) = \operatorname{rk}(A). \tag{15}$$

В работе [11] получено представление взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (1), (15), в терминах коэффициентов характеристического многочлена симметризуемой матрицы.

Теорема 2. Матрица A_{BC}^{+}, удовлетворяющая условиям (1), (15), представима в виде

$$A_{BC}^{+} = CSA^T B,$$

где $S = f(A^T BAC)$ — многочлен от матрицы $A^T BAC$ вида

$$S = -\alpha_k^{-1}[(A^T BAC)^{k-1} + \alpha_1 (A^T BAC)^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1} E],$$

α_p, $p = 1, \ldots, n$, — коэффициенты характеристического многочлена

$$f(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n = \det[\lambda E - A^T BAC],$$

α_k — последний, отличный от нуля коэффициент этого многочлена.

В [11] получено также предельное представление матрицы A_{BC}^{+}. Различные виды представлений матрицы A_{BC}^{+}, определенной условиями (1), (15), получены в [9], разложения в ряды и многочленные предельные представления — в [2].

Пусть

$$Ax = f, \ \ x \in \mathbb{R}^n, \ \ f \in \mathbb{R}^m, \tag{16}$$

— система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с произвольной матрицей $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

В работе [10] установлена связь между взвешенными псевдообратными матрицами, определенными условиями (1), (15), и взвешенными нормальными псевдорешениями.

Теорема 3. Вектор $x^+ = A_{BC}^{+} f$, где матрица A_{BC}^{+} определена условиями (1), (15), является в $\overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^{+})$ взвешенным нормальным псевдорешением СЛАУ (16) с положительно-полуопределенными весами B и C_{EE}^{+}, а именно, единственным решением задачи: найти

$$\min_{x \in \overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^{+}) \cap \Omega} \|x\|_{C_{EE}^{+}}, \ \ \Omega = \operatorname{Arg}\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - f\|_B.$$

В [4] определены необходимые и достаточные условия существования единственного решения системы матричных уравнений (2) и получено представление соответствующей псевдообратной матрицы в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых и симметричных матриц.

Теорема 4. Для того чтобы система (2) имела единственное решение $X = A_{BC}^{+}$, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\operatorname{rk}(BA) = \operatorname{rk}(A), \quad AC_{EE}^{+}C = A, \tag{17}$$

причем матрица A_{BC}^{+}, удовлетворяющая условиям (2), (17), представима в виде

$$A_{BC}^{+} = C_{EE}^{+} S A^{T} B, \tag{18}$$

где $S = f(A^{T} BAC_{EE}^{+})$ — многочлен от матрицы $A^{T} BAC_{EE}^{+}$ вида

$$S = -\alpha_{k}^{-1}[(A^{T} BAC_{EE}^{+})^{k-1} + \alpha_{1}(A^{T} BAC_{EE}^{+})^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1}E],$$

α_{p}, $p = 1,\ldots,n$, — коэффициенты характеристического многочлена

$$f(\lambda) = \lambda^{n} + \alpha_{1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_{n} = \det[\lambda E - A^{T} BAC_{EE}^{+}],$$

α_{k} — последний, отличный от нуля коэффициент этого многочлена, C_{EE}^{+} — псевдообратная матрица Мура–Пенроуза к матрице C.

В [4] установлена связь между взвешенными псевдообратными матрицами, определенными условиями (2), (17), и взвешенными нормальными псевдорешениями.

Теорема 5. Вектор $x^{+} = A_{BC}^{+} f$, где матрица A_{BC}^{+} определена условиями (2), (17), является в $\overline{\mathbb{R}}^{n}(C)$ взвешенным нормальным псевдорешением СЛАУ (16) с положительно-полуопределенными весами B и C, а именно, единственным решением задачи: найти

$$\min_{x \in \overline{\mathbb{R}}^{n}(C) \cap \Omega} \|x\|_{C}, \quad \Omega = \operatorname{Arg}\min_{x \in \mathbb{R}^{n}} \|Ax - f\|_{B}.$$

В ряде работ определялись симметризуемые матрицы и изучались их свойства. В качестве симметризаторов в основном выбирают положительно-определенные матрицы. В [12, 13] изучались H-симметричные матрицы, где H предполагается симметричной невырожденной знаконеопределенной матрицей. Определим симметризуемые матрицы с положительно-полуопределенными симметризаторами [10].

Определение 1. Квадратную матрицу U назовем симметризуемой слева или справа с помощью симметричных положительно-полуопределенных матриц M и N, если выполняются соответственно условия

$$MU = U^{T}M, \quad \operatorname{rk}(MU) = \operatorname{rk}(U), \quad UN = NU^{T}, \quad \operatorname{rk}(UN) = \operatorname{rk}(U). \tag{19}$$

Используя первое и второе условия в (15) и первое условие в (1), можно показать, что $\operatorname{rk}(BAX) = \operatorname{rk}(AX)$ и $\operatorname{rk}(XAC) = \operatorname{rk}(XA)$. Тогда третье условие в (1) вместе с первым условием в (15) и четвертое условие в (1) со вторым условием в (15) будут соответственно означать, что матрица AX симметризуема слева симметризатором B, а матрица XA — справа симметризатором C. Очевидно, что в (2) согласно определению 1 матрицы AX и XA симметризуемы слева соответственно симметризаторами B и C, а в (3) — справа этими симметризаторами, если выполняются условия на ранги матриц.

При исследовании вопроса существования единственного решения взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами используются следующие утверждения [4].

Лемма 1. Пусть для квадратных матриц K, L, M выполняются условия $KM = MK$, $LM = ML$. Тогда из равенства $KM^{2} = LM^{2}$ следует равенство $KM = LM$.

Лемма 2. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, а $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — симметричные положительно-полуопределенные матрицы. Пусть матрицы $A^T B$, AC, A^T имеют один и тот же ранг. Тогда матрица $A^T BACA^T$ имеет тот же ранг.

При исследовании разложений взвешенных псевдообратных матриц будем использовать следующее утверждение [4].

Лемма 3. Для любых матриц $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $W \in \mathbb{R}^{n\times m}$ и действительного числа $0 < \sigma < \infty$ имеет место тождество

$$\sigma \prod_{k=0}^{n-1} \{E + (E - \sigma P)^{2^k}\} W = \sigma \sum_{k=0}^{2^n-1} (E - \sigma P)^k W, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{20}$$

2. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ

В данном разделе установлены условия, при которых существует единственное решение системы матричных уравнений (3). При доказательстве использована теорема Гамильтона–Кэли, что дало возможность получить представление взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых и симметричных матриц.

Теорема 6. Для того чтобы система (3) имела единственное решение $X = A^+_{BC}$, необходимо и достаточно выполнение условий

$$B^+_{EE} BA = A, \ \operatorname{rk}(AC) = \operatorname{rk}(A), \tag{21}$$

причем матрица A^+_{BC}, удовлетворяющая (3), (21), представима в виде

$$A^+_{BC} = CSA^T B^+_{EE}, \tag{22}$$

где $S = f(A^T B^+_{EE} AC)$ — многочлен от матрицы $A^T B^+_{EE} AC$ вида

$$S = -\alpha_k^{-1} [(A^T B^+_{EE} AC)^{k-1} + \alpha_1 (A^T B^+_{EE} AC)^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1} E], \tag{23}$$

α_p, $p = 1, \ldots, n$, — коэффициенты характеристического многочлена

$$f(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_n = \det[\lambda E - A^T B^+_{EE} AC],$$

α_k — последний, отличный от нуля коэффициент этого многочлена, B^+_{EE} — псевдообратная матрица Мура–Пенроуза к матрице B.

Доказательство. Сначала покажем, что матрица, определенная формулой (22), удовлетворяет системе (3), если выполняется первое условие в (21) и существует матрица S, удовлетворяющая условиям

$$SA^T B^+_{EE} ACA^T = A^T, \quad SA^T B^+_{EE} AC = A^T B^+_{EE} ACS, \quad CS = (CS)^T. \tag{24}$$

Матрица A^+_{BC} удовлетворяет первому уравнению в (3) при выполнении условий (24). Действительно, учитывая (24), можно записать $A^T B^+_{EE} ACSA^T = A^T$, $AS^T CA^T B^+_{EE} A = A$, $ACSA^T B^+_{EE} A = A$, откуда в силу представления A^+_{BC} формулой (22) и следует утверждение.

Для того чтобы показать, что матрица A^+_{BC} удовлетворяет второму уравнению в (3), умножим первое уравнение в (24) слева на CS, справа — на B^+_{EE}. Учитывая второе условие в (24) и представление (22) для A^+_{BC}, получаем

$$CS^2 A^T B^+_{EE} ACA^T B^+_{EE} = CSA^T B^+_{EE},$$

$$CSA^T B^+_{EE} ACSA^T B^+_{EE} = A^+_{BC}, \ A^+_{BC} AA^+_{BC} = A^+_{BC},$$

т.е. матрица A^+_{BC}, определенная формулой (22), удовлетворяет второму уравнению в (3).

Далее, подставляя в третье уравнение из (3) представление для A^+_{BC} из (22), с учетом первого условия в (21) и третьего условия в (24), получаем $ACSA^T B^+_{EE} B =$ $= ACSA^T = AS^T CA^T = (ACSA^T)^T$, т.е. $AA^+_{BC} B$ является симметричной матрицей и, следовательно, A^+_{BC} удовлетворяет третьему уравнению в (3).

Наконец, подставляя в четвертое уравнение из (3) представление для A^+_{BC} из (22) и учитывая второе и третье условия из (24), имеем $CSA^T B^+_{EE} AC =$ $= CA^T B^+_{EE} ACS = CA^T B^+_{EE} AS^T C = (CSA^T B^+_{EE} AC)^T$, так что $A^+_{BC} AC$ является симметричной матрицей, т.е. удовлетворяет четвертому условию в (3).

Покажем, что существует такая матрица S, которая удовлетворяет (24) при выполнении условий (21). Для этого используем теорему Гамильтона–Кэли, согласно которой любая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению. Поскольку $A^T B^+_{EE} AC \in \mathbb{R}^{n\times n}$, справедливо равенство

$$(A^T B^+_{EE} AC)^n + \alpha_1 (A^T B^+_{EE} AC)^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} A^T B^+_{EE} AC + \alpha_n E = 0\,. \tag{25}$$

Пусть матрицы B и C положительно-определенные и матрица $A^T B^{-1} AC$ имеет обратную. Тогда $\alpha_n \neq 0$ и можно положить $S = (A^T B^{-1} AC)^{-1}$. Легко проверить, что такая матрица удовлетворяет условиям (24). Но матрица $A^T B^+_{EE} AC$ вырожденная и, следовательно, $\alpha_n = 0$. Пусть среди коэффициентов α_p, $p = 1, \ldots, n-1$, α_k будет последний, отличный от нуля коэффициент полинома $f(\lambda) =$ $= \det [\lambda E - A^T B^+_{EE} AC]$ и пусть

$$S = -\alpha_k^{-1} [(A^T B^+_{EE} AC)^{k-1} + \alpha_1 (A^T B^+_{EE} AC)^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1} E]\,. \tag{26}$$

Из вида матрицы S, определенной формулой (26), следует, что для нее выполняются второе и третье условия в (24). Покажем, что для матрицы S также выполняется первое условие в (24).

Учитывая (26), из (25) получаем

$$S(A^T B^+_{EE} AC)^{n-k+1} = (A^T B^+_{EE} AC)^{n-k}. \tag{27}$$

В силу леммы 1 из (27) имеем

$$S(A^T B^+_{EE} AC)^2 = A^T B^+_{EE} AC. \tag{28}$$

Умножим справа обе части равенства (28) на A^T, после чего, учитывая второе равенство в (24), получаем

$$(A^T B^+_{EE} AC)^2 SA^T = A^T B^+_{EE} ACA^T. \tag{29}$$

Легко убедиться, что из первого условия в (21) следует

$$\mathrm{rk}(A^T B^+_{EE}) = \mathrm{rk}(A)\,. \tag{30}$$

Тогда матрицы $A^T B^+_{EE} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $AC \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ согласно (30) и второму условию в (21) имеют одинаковый ранг, который положим равным r. В силу леммы 2 ранг матрицы $A^T B^+_{EE} ACA^T$ также равен r.

Для того чтобы показать, что из равенства (29) следует первое равенство в (24) при выполнении условия (30) и второго условия в (21), используем скелетное разложение матриц [14] $A^T B^+_{EE}$, AC и A^T, т.е. представим их в виде $A^T B^+_{EE} = KL$, $AC = MN$, $A^T = PQ$, где $K \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $L \in \mathbb{R}^{r\times m}$, $M \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $N \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $P \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $Q \in \mathbb{R}^{r\times m}$ — матрицы полного ранга. Тогда (29) примет вид

$$KLMNPQB^+_{EE} ACSA^T = KLMNPQ. \tag{31}$$

Матрица $K^T K$ невырождена, поскольку $K \in \mathbb{R}^{n\times r}$ — матрица полного ранга с $n \geq r$ [14]. Умножив равенство (31) слева сначала на K^T, потом — на $(K^T K)^{-1}$, получим

$$LMNPQB_{EE}^{+}ACSA^{T} = LMNPQ. \tag{32}$$

Матрицы LM и NP квадратные, невырожденные ранга r. Действительно, ранг этих матриц равен r, поскольку согласно (30) и второму условию в (21) из леммы 2 следует, что ранг матрицы $KLMNPQ = A^T B_{EE}^{+} ACA^T$ равен r. Но ранг матрицы-произведения не может превышать ранги матриц-сомножителей, а ранги матриц-сомножителей LM и NP не могут превышать r, поскольку r — порядок этих матриц.

Умножим равенство (32) слева сначала на $(LM)^{-1}$, затем — на $(NP)^{-1}$. В результате получим

$$QB_{EE}^{+}ACSA^{T} = Q. \tag{33}$$

Умножая слева (33) на P и используя второе равенство из (24), получаем первое равенство в (24).

Поскольку матрица S, определенная формулой (23), удовлетворяет равенствам (24) при выполнении условий (21), матрица A_{BC}^{+}, определенная формулой (22), удовлетворяет системе матричных уравнений (3) при выполнении условий (21).

Таким образом, показано, что решение системы матричных уравнений (3) при выполнении условий (21) существует, причем оно представимо формулой (22). Покажем, что это представление единственно, т.е. существует единственная взвешенная псевдообратная матрица с вырожденными весами, определяемая системой (3) при выполнении условий (21). Доказательство проведем от противного.

Предположим, что кроме матрицы S существует матрица S_*, удовлетворяющая (22) при выполнении условий (21). Обозначим $\widetilde{S} = S - S_*$, 0 — нулевая матрица. Тогда $C\widetilde{S}A^T B_{EE}^{+} = 0$. Умножим это равенство справа на ACA^T. Учитывая первое равенство в (24) и второе в (21), получаем $C\widetilde{S}A^T B_{EE}^{+} ACA^T = CA^T = A^T = 0$. Последнее равенство при $C \neq 0$, $B \neq 0$ возможно, если $\widetilde{S}$ или A — нулевые матрицы. Следовательно, при $A \neq 0$ матрица $\widetilde{S}$ нулевая, в силу чего матрица S в (23) и, значит, матрица A_{BC}^{+} определяются единственным образом. Если A — нулевая матрица, то из (22) вытекает, что взвешенная псевдообратная матрица с вырожденными весами будет нулевой. В последнем также можно убедиться непосредственной проверкой условий (3), (21). Обратно, если вместо первого условия в (21) положить $B_{EE}^{+} BA = 0$, то $\mathrm{rk}(A^T B_{EE}^{+}) = 0$ и (30) выполняется только для матрицы $A = 0$.

Таким образом, установлено, что условия (21) достаточны для существования единственного решения системы матричных уравнений (3). Покажем, что условия (21) необходимы для существования единственного решения системы (3).

Предположим, что система матричных уравнений (3) имеет единственное решение $X = A_{BC}^{+}$, и покажем, что в этом случае выполняются условия (21). Сначала покажем, что при выполнении (3) выполняется первое условие в (21). Третье условие в (3) перепишем в виде

$$B(A_{BC}^{+})^T A^T = AA_{BC}^{+}B. \tag{34}$$

Умножим (34) слева на $B_{EE}^{+}B$. В силу равенства $BB_{EE}^{+}B = B$ имеем

$$B(A_{BC}^{+})^T A^T = B_{EE}^{+}BAA_{BC}^{+}B. \tag{35}$$

Вычитая (35) из (34), получаем

$$(AA_{BC}^{+} - B_{EE}^{+}BAA_{BC}^{+})B = 0 . \tag{36}$$

Для произвольной матрицы A, удовлетворяющей третьему условию в (3), равенство (36) возможно в трех случаях, а именно, когда

$$AA_{BC}^{+} = B_{EE}^{+}BAA_{BC}^{+}, \tag{37}$$

$B=0$, столбцы матрицы B принадлежат нуль-пространству матрицы $AA_{BC}^{+} - -B_{EE}^{+}BAA_{BC}^{+} = (E - B_{EE}^{+}B)AA_{BC}^{+}$.

Пусть выполняется равенство (37). Умножим (37) слева на A_{BC}^{+}. Учитывая второе условие в (3), получаем $A_{BC}^{+} = A_{BC}^{+}B_{EE}^{+}BAA_{BC}^{+}$. Но согласно второму условию в (3) последнее равенство возможно, когда $B_{EE}^{+}BA = A$, т.е. при выполнении первого условия в (21). Если матрица B нулевая, то согласно (37) $AA_{BC}^{+} = 0$ и в силу первого и второго условий в (3) равенство (37) выполняется, когда A и A_{BC}^{+} — нулевые матрицы. В то же время, если A — нулевая матрица, то для нее выполняются третье условие в (3), первое условие в (21) и равенство (37) при любых B. Третье предположение из перечисленных возможных будет иметь место, когда $AA_{BC}^{+}B = 0$ или $AA_{BC}^{+}B = B$. Выполнение этих равенств влечет за собой выполнение равенства (37). Чтобы убедиться в этом, достаточно умножить справа (37) на B и учесть равенство $BB_{EE}^{+}B = B$. Равенство (37) возможно при выполнении первого условия в (21), что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что при выполнении (3) выполняется второе условие в (21). Четвертое условие в (3) перепишем в виде

$$CA^{T}(A_{BC}^{+})^{T} = A_{BC}^{+}AC. \tag{38}$$

Умножим (38) слева на CC_{EE}^{+}. В силу равенства $CC_{EE}^{+}C = C$ имеем

$$CA^{T}(A_{BC}^{+})^{T} = C_{EE}^{+}CA_{BC}^{+}AC. \tag{39}$$

Вычитая (39) из (38), получаем

$$(A_{BC}^{+}A - C_{EE}^{+}CA_{BC}^{+}A)C = 0\,. \tag{40}$$

Для произвольной матрицы A, удовлетворяющей четвертому условию в (3), равенство (40) возможно в трех случаях, а именно, когда

$$A_{BC}^{+}A = C_{EE}^{+}CA_{BC}^{+}A, \tag{41}$$

$C=0$, столбцы матрицы C принадлежат нуль-пространству матрицы $A_{BC}^{+}A - -C_{EE}^{+}CA_{BC}^{+}A = (E - C_{EE}^{+}C)A_{BC}^{+}A$.

Предположим, что выполняется равенство (41). Умножив слева (41) на A, с учетом первого равенства в (3) получим $A = AC_{EE}^{+}CA_{BC}^{+}A$. На основании этого равенства имеем $\operatorname{rk}(A) = \operatorname{rk}(AC_{EE}^{+}CA_{BC}^{+}A) = \operatorname{rk}(ACC_{EE}^{+}A_{BC}^{+}A) \le \operatorname{rk}(AC) \le \operatorname{rk}(A)$, откуда вытекает $\operatorname{rk}(AC) = \operatorname{rk}(A)$, т.е. второе равенство в (21). Следовательно, (41) обусловливает выполнение второго равенства в (21). Если матрица C нулевая, то согласно (41) $A_{BC}^{+}A = 0$ и в силу первого и второго условий в (3) $A = 0$ и $A_{BC}^{+} = 0$, что влечет за собой выполнение второго условия в (21). Третье предположение из перечисленных возможных будет иметь место, когда $A_{BC}^{+}AC = 0$ или $A_{BC}^{+}AC = C$. Выполнение этих равенств обусловливает выполнение равенства (41). Чтобы убедиться в этом, достаточно умножить справа (41) на C и учесть равенство $CC_{EE}^{+}C = C$. Равенство (41), как указано выше, влечет выполнение второго условия в (21), что и требовалось показать.

Теорема 6 доказана.

Следствие 1. Из (22), (23) вытекает, что взвешенная псевдообратная матрица, определенная условиями (3), (21), имеет также представления

$$A_{BC}^{+}=S_1CA^TB_{EE}^{+}=CA^TB_{EE}^{+}S_2=CA^TS_3B_{EE}^{+}=$$
$$=C^{1/2}S_4C^{1/2}A^TB_{EE}^{+}=CA^TB_{EE}^{+1/2}S_5B_{EE}^{+1/2}, \qquad (42)$$

где S_1, S_2, S_3 — многочлены от симметризуемых матриц, S_4, S_5 — многочлены от симметричных матриц вида

$$S_1=-\alpha_k^{-1}[(CA^TB_{EE}^{+}A)^{k-1}+\alpha_1(CA^TB_{EE}^{+}A)^{k-2}+\ldots+\alpha_{k-1}E],$$
$$S_2=-\alpha_k^{-1}[(ACA^TB_{EE}^{+})^{k-1}+\alpha_1(ACA^TB_{EE}^{+})^{k-2}+\ldots+\alpha_{k-1}E],$$
$$S_3=-\alpha_k^{-1}[(B_{EE}^{+}ACA^T)^{k-1}+\alpha_1(B_{EE}^{+}ACA^T)^{k-2}+\ldots+\alpha_{k-1}E],$$
$$S_4=-\alpha_k^{-1}[(C^{1/2}A^TB_{EE}^{+}AC^{1/2})^{k-1}+\alpha_1(C^{1/2}A^TB_{EE}^{+}AC^{1/2})^{k-2}+\ldots+\alpha_{k-1}E],$$
$$S_5=-\alpha_k^{-1}[(B_{EE}^{+1/2}ACA^TB_{EE}^{+1/2})^{k-1}+\alpha_1(B_{EE}^{+1/2}ACA^TB_{EE}^{+1/2})^{k-2}+\ldots+\alpha_{k-1}E].$$

Следствие 2. Из (22), (23) вытекает, что симметризуемые идемпотентные матрицы $A_{BC}^{+}A$ и AA_{BC}^{+} имеют следующие представления:

$$A_{BC}^{+}A=CSA^TB_{EE}^{+}A=f(CA^TB_{EE}^{+}A)=$$
$$=-\alpha_k^{-1}[(CA^TB_{EE}^{+}A)^k+\alpha_1(CA^TB_{EE}^{+}A)^{k-1}+\ldots+\alpha_{k-1}(CA^TB_{EE}^{+}A)],$$
$$AA_{BC}^{+}=ACSA^TB_{EE}^{+}=f(ACA^TB_{EE}^{+})=$$
$$=-\alpha_k^{-1}[(ACA^TB_{EE}^{+})^k+\alpha_1(ACA^TB_{EE}^{+})^{k-1}+\ldots+\alpha_{k-1}(ACA^TB_{EE}^{+})].$$

Следствие 3. Имеют место равенства (24).

Следствие 4. Из (22), (24) вытекают равенства $A^TB_{EE}^{+}AA_{BC}^{+}=A^TB_{EE}^{+}$, $A_{BC}^{+}ACA^T=CA^T$.

Замечание 3. Если матрицы B и C (или одна из них) нулевые, то система матричных уравнений (3) при условиях (21) имеет решение тогда и только тогда, когда A — нулевая матрица, причем псевдообратная к ней также нулевая.

Замечание 4. Если матрицы B и C положительно-определенные, то в предыдущих утверждениях (теорема 6, следствия 1–4) псевдообратные матрицы необходимо заменить обратными. Тогда условия (21) заведомо выполняются и получим представления взвешенных псевдообратных матриц с положительно-определенными весами. Из соответствующего представления взвешенной псевдообратной матрицы для невырожденных весов следует представление псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза, полученное в работе [15]. В [7] описан алгоритм, позволяющий на основе представления псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза в терминах коэффициентов характеристического многочлена матрицы A^TA вычислять эту матрицу за приемлемое число арифметических операций. В настоящей работе формула (22) далее используется при обосновании существования единственного взвешенного нормального псевдорешения и разложения взвешенных псевдообратных матриц.

Лемма 4. Ранги матриц A, A_{BC}^{+}, $A_{BC}^{+}A$, AA_{BC}^{+}, $CA^TB_{EE}^{+}A$, $A^TB_{EE}^{+}AC$, $ACA^TB_{EE}^{+}$, $B_{EE}^{+}ACA^T$, $C^{1/2}A^TB_{EE}^{+}AC^{1/2}$, $B_{EE}^{+1/2}ACA^TB_{EE}^{+1/2}$, определенных в теореме 6, при выполнении второго условия в (21) и условия (30) совпадают.

Доказательство. Пусть $\mathrm{rk}(A)=r$. Из первого равенства в (3) имеем $\mathrm{rk}(A)=\mathrm{rk}(AA_{BC}^{+}A)\le\mathrm{rk}(AA_{BC}^{+})\le\mathrm{rk}(A)$, т.е. $\mathrm{rk}(A)=\mathrm{rk}(AA_{BC}^{+})$. Из второго равенства в (3) получаем $\mathrm{rk}(A_{BC}^{+})=\mathrm{rk}(A_{BC}^{+}AA_{BC}^{+})\le\mathrm{rk}(AA_{BC}^{+})\le\mathrm{rk}(A_{BC}^{+})$, т.е. $\mathrm{rk}(A_{BC}^{+})=\mathrm{rk}(AA_{BC}^{+})$. Из последних двух равенств имеем $\mathrm{rk}(A)=\mathrm{rk}(A_{BC}^{+})=$ $=\mathrm{rk}(AA_{BC}^{+})$. Аналогично, $\mathrm{rk}(A)=\mathrm{rk}(A_{BC}^{+})=\mathrm{rk}(A_{BC}^{+}A)$.

Поскольку ранг матрицы-произведения матриц не превышает ранга каждой из матриц-сомножителей, в силу условия (30) имеем $\mathrm{rk}(A^T B_{EE}^{+1/2}) = \mathrm{rk}(A) = r$, следовательно, учитывая свойство равенства рангов исходной матрицы и транспонированной, найдем $\mathrm{rk}(A^T B_{EE}^{+} A) = \mathrm{rk}\,\{(B_{EE}^{+1/2} A)^T B_{EE}^{+1/2} A\} = r$. Далее, используя неравенство Фробениуса, получаем $\mathrm{rk}(A^T B_{EE}^{+} A) + \mathrm{rk}(AC) \le \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(A^T B_{EE}^{+} AC)$, откуда в силу второго условия в (21) и последнего равенства имеем $\mathrm{rk}(A) \le \mathrm{rk}(A^T B_{EE}^{+} AC) \le \mathrm{rk}(A)$, т.е. $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A^T B_{EE}^{+} AC) = r$. Аналогично получаем $\mathrm{rk}(CA^T B_{EE}^{+} A) = r$. В силу второго условия в (21) и равенства (30) подобные рассуждения приводят к равенству $\mathrm{rk}(ACA^T B_{EE}^{+}) = \mathrm{rk}(B_{EE}^{+} ACA^T) = r$.

Рассмотрим матрицу $C^{1/2} A^T B_{EE}^{+} AC^{1/2}$. Учитывая свойство равенства рангов исходной матрицы и матрицы-произведения транспонированной и исходной матриц, получаем

$$\mathrm{rk}(C^{1/2} A^T B_{EE}^{+} AC^{1/2}) = \mathrm{rk}\,\{(B_{EE}^{+1/2} AC^{1/2})^T B_{EE}^{+1/2} AC^{1/2}\} = \mathrm{rk}(B_{EE}^{+1/2} AC^{1/2}) . \quad (43)$$

На основании неравенства Фробениуса $\mathrm{rk}(B_{EE}^{+1/2} A) + \mathrm{rk}(AC^{1/2}) \le \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B_{EE}^{+1/2} AC^{1/2})$, откуда в силу второго условия из (21) и условия (30) имеем $\mathrm{rk}(B_{EE}^{+1/2} AC^{1/2}) = \mathrm{rk}(A)$. Согласно этому равенству и равенству (43) получим $\mathrm{rk}(C^{1/2} A^T B_{EE}^{+} AC^{1/2}) = r$. Подобные рассуждения приводят к равенству $\mathrm{rk}(B_{EE}^{+1/2} ACA^T B_{EE}^{+1/2}) = r$.

Лемма 4 доказана.

Замечание 5. Пусть $\mathrm{rk}(A) = 1$. Тогда согласно лемме 4 $\mathrm{rk}(A^T B_{EE}^{+} AC) = 1$ и на основании (22), (23) получаем формулу $A_{BC}^{+} = [\mathrm{tr}\,(A^T B_{EE}^{+} AC)]^{-1} CA^T B_{EE}^{+}$ для вычисления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, где $\mathrm{tr}(L)$ — след матрицы L.

3. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ВЗВЕШЕННЫХ НОРМАЛЬНЫХ ПСЕВДОРЕШЕНИЙ

Обозначим $Y = A_B^{(1,3)} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ матрицу, удовлетворяющую условиям

$$AYA = A, \ \ (AYB)^T = AYB, \quad (44)$$

$$B_{EE}^{+} BA = A, \quad (45)$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, а $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ — симметричная положительно-полуопределенная матрица.

Лемма 5. Вектор $x^{(1,3)} = A_B^{(1,3)} f$ является решением по методу взвешенных наименьших квадратов с положительно-полуопределенным весом $B_{EE}^{+} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ СЛАУ (16), т.е. удовлетворяет условию

$$\left\| Ax^{(1,3)} - f \right\|_{B_{EE}^{+}} = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\| Ax - f \right\|_{B_{EE}^{+}} . \quad (46)$$

Доказательство. Условие (46) равносильно неравенству

$$\left\| AA_B^{(1,3)} f - f \right\|_{B_{EE}^{+}} \le \left\| Ax - f \right\|_{B_{EE}^{+}} \quad \forall f \in \mathbb{R}^m, \ x \in \mathbb{R}^n .$$

Поскольку $Ax - f = AA_B^{(1,3)} f - f + A(x - A_B^{(1,3)} f)$, это неравенство переписывается в виде $\left\| AA_B^{(1,3)} f - f \right\|_{B_{EE}^{+}} \le \left\| AA_B^{(1,3)} f - f + Aw \right\|_{B_{EE}^{+}}$, где $w = x - A_B^{(1,3)} f$. Пусть $u = AA_B^{(1,3)} f - f$, $v = Aw$, тогда последнее неравенство примет вид $\|u\|_{B_{EE}^{+}} \le$

$\leq \|u+v\|_{B^+_{EE}}$ или $\|u\|^2_{B^+_{EE}} \leq \|u\|^2_{B^+_{EE}} + \|v\|^2_{B^+_{EE}} + 2(u, B^+_{EE} v)_E$, откуда

$$0 \leq \|v\|^2_{B^+_{EE}} + 2(u, B^+_{EE} v)_E. \tag{47}$$

Так как $\|v\|^2_{B^+_{EE}} \geq 0$ и $(u, B^+_{EE} v)_E = f^T [(A_B^{(1,3)})^T A^T B^+_{EE} A - B^+_{EE} A] w$ зависит от произвольных f и w, неравенство (47) равносильно требованию

$$(A_B^{(1,3)})^T A^T B^+_{EE} A = B^+_{EE} A. \tag{48}$$

Покажем, что равенство (48) и два равенства (44) при выполнении условия (45) эквивалентны. Из первого равенства в (44) следует, что $B^+_{EE} A A_B^{(1,3)} A = B^+_{EE} A$. Учитывая (45), из этого равенства получаем $B^+_{EE} A A_B^{(1,3)} B B^+_{EE} A = B^+_{EE} A$. В силу второго равенства в (44) из последнего равенства имеем $B^+_{EE} B (A_B^{(1,3)})^T A^T B^+_{EE} A -$ $- B^+_{EE} A = 0$, откуда $B^+_{EE} B [(A_B^{(1,3)})^T A^T B^+_{EE} A - B^+_{EE} A] = 0$. Это равенство возможно в трех случаях, а именно, когда $B^+_{EE} B = 0$, $(A_B^{(1,3)})^T A^T B^+_{EE} A = B^+_{EE} A$, $B^+_{EE} B (A_B^{(1,3)})^T A^T B^+_{EE} A = B^+_{EE} A$.

Если проекционная матрица $B^+_{EE} B$ нулевая, то первый случай возможен при $B = 0$. Второе предположение из перечисленных возможных, совпадающее с (48), означает, что среди столбцов матрицы $B^+_{EE} A$ отсутствуют те, которые принадлежат нуль-пространству идемпотентной матрицы $(A_B^{(1,3)})^T A^T$. В силу равенства $B^+_{EE} B B^+_{EE} = B^+_{EE}$ выполнение второго предположения влечет выполнение третьего предположения. Таким образом, из равенств (44) следует (48).

Обратно, умножив (48) слева на B, с учетом условия (45) получим $B (A_B^{(1,3)})^T A^T B^+_{EE} A = A$. Умножив это равенство справа на $A_B^{(1,3)} B$, получим $B (A_B^{(1,3)})^T A^T B^+_{EE} A A_B^{(1,3)} B = A A_B^{(1,3)} B$, т.е. $A A_B^{(1,3)} B$ — симметричная матрица. Кроме того, из (48), второго равенства из (44) и условия (45) последовательно имеем $B (A_B^{(1,3)})^T A^T B^+_{EE} A = B B^+_{EE} A$, $(A A_B^{(1,3)} B)^T B^+_{EE} A = A$, $A A_B^{(1,3)} B B^+_{EE} A = A$, $A A_B^{(1,3)} A = A$, т.е. получили первое равенство в (44), что завершает доказательство леммы 5.

Решение системы (16) по методу взвешенных наименьших квадратов с положительно-полуопределенной матрицей-весом B^+_{EE} в общем случае не является единственным. Общий вид такого решения устанавливает следующая лемма.

Лемма 6. Множество векторов, удовлетворяющих (46), определяется формулой

$$z = A_B^{(1,3)} f + (E - A^{(1)} A) y, \tag{49}$$

где $A^{(1)}$ — матрица, удовлетворяющая первому условию в (3), y — произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Во-первых, z удовлетворяет условию (46), так как в силу первого равенства из (44) имеем $A(E - A^{(1)} A) y = 0$; во-вторых, каждое решение $\tilde{z} = \tilde{A}_B^{(1,3)} f$, удовлетворяющее (46), можно представить в виде (49), положив $y = A_B^{(1,3)} f - \tilde{A}_B^{(1,3)} f$. Покажем это.

Подставив в (49) значение y, получим $\tilde{z} = A_B^{(1,3)} f + A^{(1)} A \tilde{A}_B^{(1,3)} f - A^{(1)} A A_B^{(1,3)} f$. Тогда для доказательства утверждения леммы 6 достаточно показать, что

$$A^{(1)} A \tilde{A}_B^{(1,3)} f - A^{(1)} A A_B^{(1,3)} f = 0. \tag{50}$$

Очевидно, что для матрицы $\widetilde{A}_B^{(1,3)}$, так же как и для $A_B^{(1,3)}$, должно выполняться равенство (48), в силу которого

$$(\widetilde{A}_B^{(1,3)})^T A^T B_{EE}^+ A = (A_B^{(1,3)})^T A^T B_{EE}^+ A. \tag{51}$$

Используем скелетное разложение матриц [14] и равенство $\mathrm{rk}(A^T) = \mathrm{rk}(B_{EE}^+ A) = r$, которое следует из (30). Пусть $A^T = KL$, $B_{EE}^+ A = PS$, где $K \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $L \in \mathbb{R}^{r\times m}$, $P \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $S \in \mathbb{R}^{r\times n}$. Тогда (51) перепишется в виде

$$(\widetilde{A}_B^{(1,3)})^T KLPS = (A_B^{(1,3)})^T KLPS. \tag{52}$$

Матрица SS^T невырожденная, поскольку $S \in \mathbb{R}^{r\times n}$ — матрица полного ранга с $r \le n$ [14]. Умножив равенство (52) справа сначала на S^T, потом — на $(SS^T)^{-1}$, получим

$$(\widetilde{A}_B^{(1,3)})^T KLP = (A_B^{(1,3)})^T KLP. \tag{53}$$

Матрица $LP \in \mathbb{R}^{r\times r}$ невырожденная. Действительно, из равенства $\mathrm{rk}(B_{EE}^+ A) = r$ имеем $\mathrm{rk}(B_{EE}^{+1/2} A) = r$, в силу чего получаем $\mathrm{rk}(A^T B_{EE}^+ A) = \mathrm{rk}[(B_{EE}^{+1/2} A)^T B_{EE}^{+1/2} A] = \mathrm{rk}(B_{EE}^{+1/2} A) = r$. Следовательно, $\mathrm{rk}(KLPS) = \mathrm{rk}(A^T B_{EE}^+ A) = r$. Тогда $\mathrm{rk}(LP) = r$, поскольку r — порядок матрицы LP и ранг матрицы-произведения не может превышать ранги матриц-сомножителей.

Умножив (53) справа на $(LP)^{-1}$, получим $(\widetilde{A}_B^{(1,3)})^T K = (A_B^{(1,3)})^T K$. Далее, умножая последнее равенство справа на L, находим $(\widetilde{A}_B^{(1,3)})^T A^T = (A_B^{(1,3)})^T A^T$, т.е. $A\widetilde{A}_B^{(1,3)} = AA_B^{(1,3)}$, откуда вытекает равенство (50) и, следовательно, утверждение леммы 6.

Теорема 7. Вектор $x^+ = A_{BC}^+ f$, где матрица A_{BC}^+ определена условиями (3), (21), является в $\overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^+)$ взвешенным нормальным псевдорешением СЛАУ (16) с положительно-полуопределенными весами B_{EE}^+ и C_{EE}^+, а именно, единственным решением задачи: найти

$$\min_{x \in \overline{\mathbb{R}}^n (C_{EE}^+) \cap \Omega} \|x\|_{C_{EE}^+}, \quad \Omega = \operatorname{Arg} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - f\|_{B_{EE}^+}. \tag{54}$$

Доказательство. В лемме 6 установлено, что вектор $z = A_B^{(1,3)} f$ с матрицей $A_B^{(1,3)}$, определенной условиями (44), (45), минимизирует норму $\|\cdot\|_{B_{EE}^+}$ невязки $Ax - f$, т.е. принадлежит множеству Ω, определенному в (54). Пусть матрица $A_B^{(1,3)}$ удовлетворяет еще второму и четвертому условиям в (3) и второму условию в (21). Тогда $A_B^{(1,3)} = A_{BC}^+$,

$$A_{BC}^+ A A_{BC}^+ = A_{BC}^+, \ (A_{BC}^+ AC)^T = A_{BC}^+ AC. \tag{55}$$

В лемме 6 показано, что множество векторов, принадлежащих Ω, определяется формулой (49). Очевидно, что вектор $z^+ = A_{BC}^+ f + (E - A_{BC}^+ A) y$ также принадлежит Ω. Согласно (54) среди множества векторов z^+ необходимо выбрать те, которые принадлежат $\overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^+)$. Поскольку y — произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$, положим $y \in \overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^+) \subset \mathbb{R}^n$. Тогда в силу (22) и равенства $CC_{EE}^+ C = C$ имеем $\widetilde{z}^+ = A_{BC}^+ f + CC_{EE}^+ (E - A_{BC}^+ ACC_{EE}^+) y \ \forall y \in \overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^+)$ и, очевидно, $\widetilde{z}^+ \in \overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^+)$. Покажем, что вектор $x^+ = A_{BC}^+ f$ удовлетворяет первому условию в (54), т.е. имеет минимальную норму в $\overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^+)$ среди векторов $\tilde{z}^+ \in \overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^+) \cap \Omega$. Для этого должно выполняться неравенство $\left\| A_{BC}^+ f \right\|_{C_{EE}^+} \le \left\| A_{BC}^+ f + CC_{EE}^+ (E - A_{BC}^+ ACC_{EE}^+) y \right\|_{C_{EE}^+}$ $\forall f \in \mathbb{R}^n,\ y \in \overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^+)$.

Пусть $u = A_{BC}^+ f,\ v = CC_{EE}^+(E - A_{BC}^+ ACC_{EE}^+) y$. Тогда $\|u\|_{C_{EE}^+} \le \|u + v\|_{C_{EE}^+}$ или $\|u\|_{C_{EE}^+}^2 \le \|u\|_{C_{EE}^+}^2 + \|v\|_{C_{EE}^+}^2 + 2(u, C_{EE}^+ v)_E$, откуда

$$0 \le \|v\|_{C_{EE}^+}^2 + 2(u, C_{EE}^+ v)_E. \qquad (56)$$

Поскольку $\|v\|_{C_{EE}^+}^2 \ge 0$ и $(u, C_{EE}^+ v)_E = f^T [(A_{BC}^+)^T C_{EE}^+ - (A_{BC}^+)^T C_{EE}^+ A_{BC}^+ \times$ $\times ACC_{EE}^+] y$ зависит от произвольных векторов $f \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^+)$, неравенство (56) равносильно требованию $(u, C_{EE}^+ v)_E = 0$ или

$$(A_{BC}^+)^T C_{EE}^+ = (A_{BC}^+)^T C_{EE}^+ A_{BC}^+ ACC_{EE}^+. \qquad (57)$$

Используя (22), покажем, что равенство (57) и два равенства (55) эквивалентны. Действительно, из первого равенства в (55) следует $(A_{BC}^+)^T C_{EE}^+ =$ $= (A_{BC}^+)^T A^T (A_{BC}^+)^T C_{EE}^+$. Учитывая (22), это равенство можно переписать в виде $(A_{BC}^+)^T C_{EE}^+ = (A_{BC}^+)^T C_{EE}^+ CA^T (A_{BC}^+)^T C_{EE}^+$. После подстановки второго равенства из (55) в последнее равенство получаем (57). Обратно, после умножения (57) слева на CA^T, а справа на C с учетом (22) и равенства $CC_{EE}^+ C = C$ устанавливаем, что $A_{BC}^+ AC$ — симметричная матрица. Кроме того, из (57) и второго равенства в (55) имеем $(A_{BC}^+)^T C_{EE}^+ = (A_{BC}^+)^T C_{EE}^+ CA^T (A_{BC}^+)^T C_{EE}^+$. Умножив это равенство справа на C, с учетом (22) получим $(A_{BC}^+)^T = (A_{BC}^+)^T A^T (A_{BC}^+)^T$, т.е. первое условие в (55).

Таким образом, вектор $x^+ = A_{BC}^+ f$ является решением задачи (54). Покажем, что этот вектор — единственное решение указанной задачи. Доказательство проведем от противного. Пусть кроме x^+ существует другое решение задачи (54), которое обозначим x_*^+. Его можно представить в виде $x_*^+ = x^+ - x$, где $x = x^+ - x_*^+$. Это решение должно принадлежать множеству векторов из $\overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^+) \cap \Omega$. Выше определены векторы $\tilde{z}^+$, которые принадлежат этому множеству. Тогда каждый $\tilde{z}^+$ представляется в виде $\tilde{z}^+ = x^+ - x$ и, следовательно,

$$x_*^+ = \tilde{z}^+ = x^+ + v, \quad x^+ = A_{BC}^+ f \quad \forall f \in \mathbb{R}^n,$$
$$v = CC_{EE}^+(E - A_{BC}^+ ACC_{EE}^+) y \quad \forall y \in \overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^+).$$

Возможны два случая. В первом варианте при выполнении условия $A_{BC}^+ Ay =$ $= CC_{EE}^+ y = y$ вектор $v = 0$, т.е. вектор $v = 0$, когда $y \in \overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^+)$ является образом как идемпотентной матрицы $A_{BC}^+ A$, так и проекционной матрицы $C_{EE}^+ C$. Тогда для всех таких y имеем $x_*^+ = \tilde{z}^+ = A_{BC}^+ f$. Второй вариант включает множество векторов x_*^+, для которых $v \ne 0$. Тогда $\left\| x_*^+ \right\|_{C_{EE}^+}^2 = \left\| x^+ \right\|_{C_{EE}^+}^2 + \|v\|_{C_{EE}^+}^2 + 2(u, C_{EE}^+ v)_E$. Третье слагаемое в правой части этого равенства в силу (57) обращается в нуль. Поскольку вектор $v \ne 0 \in \overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^+)$, то $\|v\|_{C_{EE}^+}$ является нормой (не полунормой). В силу этого факта и того, что по предположению $v \neq 0$, имеем $\|v\|^2_{C^+_{EE}} > 0$. Следовательно, в этом случае $\|x^+\|_{C^+_{EE}}$ всегда меньше $\|x^+_*\|_{C^+_{EE}}$. Таким образом, вектор $x^+ = A^+_{BC} f$ — единственное решение задачи (54).

Теорема 2 доказана.

Замечание 6. Если правая часть СЛАУ (16) f принадлежит нуль-пространству матрицы B^+_{EE}, то из (22) следует, что система (16) имеет нулевое взвешенное нормальное псевдорешение.

4. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯДЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ

Теорема 8. Для произвольной матрицы $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, симметричных положительно-полуопределенных матриц $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющих условиям (3), (21), и действительного числа

$$0 < \sigma < 2\,[\lambda_{\max}(C^{1/2} A^T B^+_{EE} A C^{1/2})]^{-1} \tag{58}$$

имеют место соотношения

$$A^+_{BC} = \sigma \sum_{k=0}^{\infty} C^{1/2} (E - \sigma C^{1/2} A^T B^+_{EE} A C^{1/2})^k C^{1/2} A^T B^+_{EE}, \tag{59}$$

$$\left\| A^+_{BC} - A^+_{\sigma,p} \right\|_{C^+_{EE} B^{1/2}} \leq \max_{\lambda_i \neq 0} \{\lambda_i^{-1/2} |1 - \sigma\lambda_i|^p\}, \tag{60}$$

где $A^+_{\sigma,p} = \sigma \sum_{k=0}^{p-1} C^{1/2} (E - \sigma C^{1/2} A^T B^+_{EE} A C^{1/2})^k C^{1/2} A^T B^+_{EE}$, $p = 1, 2, \ldots$, λ_i — собственные значения матрицы $L = C^{1/2} A^T B^+_{EE} A C^{1/2}$.

Доказательство. Матрица $L = C^{1/2} A^T B^+_{EE} A C^{1/2}$ симметричная и положительно-полуопределенная, следовательно, ее собственные значения действительные и неотрицательные. Обозначим $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ собственные значения матрицы L. Поскольку матрица L симметричная, то имеют место соотношения

$$Q^T L Q = \Lambda, \quad L = Q \Lambda Q^T, \quad Q^T Q = E. \tag{61}$$

Рассмотрим одно из слагаемых ряда (59). Учитывая (61) и первые два равенства из (24), можно записать

$$\sigma C^{1/2} (E - \sigma L)^k C^{1/2} A^T B^+_{EE} = \sigma C^{1/2} Q (E - \sigma\Lambda)^k Q^T L^2 C^{1/2} S^2 A^T B^+_{EE} =$$
$$= \sigma C^{1/2} Q (E - \sigma\Lambda)^k \Lambda^2 Q^T C^{1/2} S^2 A^T B^+_{EE}. \tag{62}$$

Поскольку $\sigma(E - \sigma\Lambda)^k \Lambda^2 = \operatorname{diag}\{\sigma(1 - \sigma\lambda_i)^k \lambda_i^2\}$, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sigma (E - \sigma\Lambda)^k \Lambda^2 = \Lambda, \tag{63}$$

т.е. этот матричный ряд сходится к матрице $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_i)$.

Действительно, при выполнении условия (58), когда $\lambda_i > 0$, число $|1 - \sigma\lambda_i| < 1$ и матричный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \sigma (E - \sigma\Lambda)^k \Lambda$ сходится к диагональной матрице с элементами, равными единице при $\lambda_i > 0$ и нулю при $\lambda_i = 0$, в силу чего следует (63).

Учитывая формулу (22), первые два равенства из (24) и соотношения (61)–(63), получаем

$$\sigma \sum_{k=0}^{\infty} C^{1/2} (E - \sigma L)^k C^{1/2} A^T B_{EE}^+ = C^{1/2} Q \Lambda Q^T C^{1/2} S^2 A^T B_{EE}^+ = C^{1/2} L C^{1/2} S^2 A^T B_{EE}^+ =$$

$$= C A^T B_{EE}^+ A C S^2 A^T B_{EE}^+ = C S^2 A^T B_{EE}^+ A C A^T B_{EE}^+ = C S A^T B_{EE}^+ = A_{BC}^+,$$

т.е. имеем формулу (59).

Перейдем к доказательству оценки (60). Поскольку

$$A_{BC}^+ - A_{\sigma,p}^+ = \sigma \sum_{k=p}^{\infty} C^{1/2} (E - \sigma L)^k C^{1/2} A^T B_{EE}^+,$$

в силу первого равенства в (61) и первых двух равенств в (24) имеем

$$A_{BC}^+ - A_{\sigma,p}^+ = \sigma C^{1/2} Q \sum_{k=p}^{\infty} (E - \sigma \Lambda)^k Q^T C^{1/2} A^T B_{EE}^+ A C S A^T B_{EE}^+. \tag{64}$$

Положим в (9) $M = E_n$. Поскольку при этом условие (8) выполняется для любых матриц A и B, на основании (9) из (64) получим

$$\left\| A_{BC}^+ - A_{\sigma,p}^+ \right\|_{C_{EE}^+ B^{1/2}} \leq$$

$$\leq \sigma \left\| C^{1/2} Q \right\|_{C_{EE}^+ E_n} \left\| \sum_{k=p}^{\infty} (E - \sigma \Lambda)^k Q^T C^{1/2} A^T B_{EE}^+ A C S A^T B_{EE}^+ \right\|_{E_n B^{1/2}}. \tag{65}$$

Нетрудно убедиться, что для матрицы $A_{BC}^+ - A_{\sigma,p}^+$, определенной в (64), выполняются условия (5), если в них положить $H = C_{EE}^+$, $V = B^{1/2}$, следовательно, $\| \cdot \|_{C_{EE}^+ B^{1/2}}$ — норма (не полунорма) для этой матрицы.

Учитывая то обстоятельство, что собственные значения идемпотентной матрицы — 0 и 1 [14], в силу ортогональности матрицы Q и определения величины матричной нормы, а также согласно формуле (7) из (65) имеем

$$\left\| A_{BC}^+ - A_{\sigma,p}^+ \right\|_{C_{EE}^+ B^{1/2}} \leq \left\| \sigma \sum_{k=p}^{\infty} (E - \sigma \Lambda)^k Q^T C^{1/2} A^T B_{EE}^+ A C S A^T B_{EE}^+ \right\|_{E_n B^{1/2}}. \tag{66}$$

Исходя из (22), (24), (61) можем записать

$$(E - \sigma \Lambda)^k Q^T C^{1/2} A^T B_{EE}^+ A C S A^T B_{EE}^+ = (E - \sigma \Lambda)^k Q^T L C^{1/2} S A^T B_{EE}^+ =$$

$$= (E - \sigma \Lambda)^k Q^T Q \Lambda Q^T C^{1/2} S A^T B_{EE}^+ = (E - \sigma \Lambda)^k \Lambda^{1/2} \Lambda^{1/2} Q^T C^{1/2} S A^T B_{EE}^+ =$$

$$= (E - \sigma \Lambda)^k \Lambda^{1/2} \Lambda_{EE}^{+1/2} Q^T Q \Lambda Q^T C^{1/2} S A^T B_{EE}^+ =$$

$$= (E - \sigma \Lambda)^k \Lambda^{1/2} \Lambda_{EE}^{+1/2} Q^T C^{1/2} A^T B_{EE}^+ A C S A^T B_{EE}^+ =$$

$$= (E - \sigma \Lambda)^k \Lambda^{1/2} \Lambda_{EE}^{+1/2} Q^T C^{1/2} A^T B_{EE}^+.$$

Тогда (66) переписывается в виде

$$\left\| A_{BC}^+ - A_{\sigma,p}^+ \right\|_{C_{EE}^+ B^{1/2}} \leq \left\| \sigma \sum_{k=p}^{\infty} (E - \sigma \Lambda)^k \Lambda^{1/2} \Lambda_{EE}^{+1/2} Q^T C^{1/2} A^T B_{EE}^+ \right\|_{E_n B^{1/2}}.$$

Для оценки правой части в этом неравенстве опять используем (9), где положим $M = E_n$. Получим

$$\left\| A_{BC}^{+} - A_{\sigma,p}^{+} \right\|_{C_{EE}^{+} B^{1/2}} \le \left\| \sigma \sum_{k=p}^{\infty} (E - \sigma\Lambda)^k \Lambda^{1/2} \right\|_{E_n E_n} \left\| \Lambda_{EE}^{+1/2} Q^T C^{1/2} A^T B_{EE}^{+} \right\|_{E_n B^{1/2}} . \quad (67)$$

Поскольку матричный ряд $\sigma \sum_{k=0}^{\infty} (E - \sigma\Lambda)^k \Lambda^{1/2}$ сходится к диагональной матрице с элементами, равными $\lambda_i^{-1/2}$ при $\lambda_i > 0$ и нулю при $\lambda_i = 0$, а сумма $\sigma \sum_{k=0}^{p-1} (E - \sigma\Lambda)^k \Lambda^{1/2}$ является диагональной матрицей с элементами, равными $[1 - (1 - \sigma\lambda_i)^p] \lambda_i^{-1/2}$ при $\lambda_i > 0$ и нулю при $\lambda_i = 0$, $\sigma \sum_{k=p}^{\infty} (E - \sigma\Lambda)^k \Lambda^{1/2}$ — диагональная матрица с элементами, равными $\lambda_i^{-1/2} (1 - \sigma\lambda_i)^p$ при $\lambda_i > 0$ и нулю при $\lambda_i = 0$. Следовательно,

$$\left\| \sigma \sum_{k=p}^{\infty} (E - \sigma\Lambda)^k \Lambda^{1/2} \right\|_{E_n E_n} = \max_{\lambda_i \ne 0} \{ \lambda_i^{-1/2} |1 - \sigma\lambda_i|^p \} . \quad (68)$$

Оценим вторую норму в правой части соотношения (67). Учитывая (61), определение величины матричной нормы формулой (7) и то обстоятельство, что ненулевые собственные значения матрицы-произведения при перестановке матриц-сомножителей не изменяются [16], а собственные значения проекционной матрицы равны 0 и 1, получаем

$$\left\| \Lambda_{EE}^{+1/2} Q^T C^{1/2} A^T B_{EE}^{+} \right\|_{E_n B^{1/2}} =$$

$$= [\lambda_{\max} (C^{1/2} A^T B_{EE}^{+} A C^{1/2} Q \Lambda_{EE}^{+} Q^T)]^{1/2} = [\lambda_{\max} (L L_{EE}^{+})]^{1/2} = 1 . \quad (69)$$

В силу (68), (69) из (67) следует оценка (60), что завершает доказательство теоремы 8.

Следствие 5. Нетрудно убедиться, что из (59) вытекают соотношения

$$A_{BC}^{+}=\sigma\sum_{k=0}^{\infty}(E-\sigma CA^{T}B_{EE}^{+}A)^{k}CA^{T}B_{EE}^{+}=\sigma\sum_{k=0}^{\infty}C(E-\sigma A^{T}B_{EE}^{+}AC)^{k}A^{T}B_{EE}^{+}=$$

$$=\sigma\sum_{k=0}^{\infty}CA^{T}B_{EE}^{+}(E-\sigma ACA^{T}B_{EE}^{+})^{k}=\sigma\sum_{k=0}^{\infty}CA^{T}(E-\sigma B_{EE}^{+}ACA^{T})^{k}B_{EE}^{+}=$$

$$=\sigma\sum_{k=0}^{\infty}CA^{T}B_{EE}^{+1/2}(E-\sigma B_{EE}^{+1/2}ACA^{T}B_{EE}^{+1/2})^{k}B_{EE}^{+1/2}.$$

Замечание 7. В формуле (58), определяющей σ, вместо $\lambda_{\max}(C^{1/2}A^{T}B_{EE}^{+}AC^{1/2})$ можно полагать максимальное собственное значение одной из матриц $CA^{T}B_{EE}^{+}A$, $A^{T}B_{EE}^{+}AC$, $ACA^{T}B_{EE}^{+}$, $B_{EE}^{+}ACA^{T}$, $B_{EE}^{+1/2}ACA^{T}B_{EE}^{+1/2}$, поскольку согласно [16] они имеют одинаковые собственные значения как матрицы, полученные в результате перестановки матриц-сомножителей.

Для того чтобы получить формулы разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричные степенные произведения, используем тождество (20). При выполнении предположений теоремы 8 в силу следствия 5, а именно разложения

$$A_{BC}^{+}=\sigma\sum_{k=0}^{\infty}(E-\sigma CA^{T}B_{EE}^{+}A)^{k}CA^{T}B_{EE}^{+} \tag{70}$$

и тождества (20), имеем следующее разложение взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричное степенное произведение:

$$A_{BC}^{+}=\sigma\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E-\sigma CA^{T}B_{EE}^{+}A)^{2^{k}}\}CA^{T}B_{EE}^{+}. \tag{71}$$

Обозначим $A_{\sigma,n}^{+}=\sigma\prod_{k=0}^{n-1}\{E+(E-\sigma CA^{T}B_{EE}^{+}A)^{2^{k}}\}CA^{T}B_{EE}^{+}$, $n=1,2,\ldots$ Тогда в силу тождества (20) и соотношения (60) получим

$$\left\|A_{BC}^{+}-A_{\sigma,n}^{+}\right\|_{C_{EE}^{+}B^{1/2}}\le\max_{\lambda_i\ne 0}\{\lambda_i^{-1/2}|1-\sigma\lambda_i|^{2^{n}}\}. \tag{72}$$

На основании (71) можно получить другие виды разложений взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные произведения:

$$A_{BC}^{+}=\sigma C\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E-\sigma A^{T}B_{EE}^{+}AC)^{2^{k}}\}A^{T}B_{EE}^{+}=$$

$$=\sigma C^{1/2}\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E-\sigma C^{1/2}A^{T}B_{EE}^{+}AC^{1/2})^{2^{k}}\}C^{1/2}A^{T}B_{EE}^{+}=$$

$$=\sigma CA^{T}B_{EE}^{+}\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E-\sigma ACA^{T}B_{EE}^{+})^{2^{k}}\}=$$

$$=\sigma CA^{T}\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E-\sigma B_{EE}^{+}ACA^{T})^{2^{k}}\}B_{EE}^{+}=$$

$$=\sigma CA^{T}B_{EE}^{+1/2}\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E-\sigma B_{EE}^{+1/2}ACA^{T}B_{EE}^{+1/2})^{2^{k}}\}B_{EE}^{+1/2}.$$

Замечание 8. Для взвешенной псевдообратной матрицы, определенной условиями (1), (15), разложения в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения получены соответственно в работах [10, 17].

5. ПОСТРОЕНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Опишем методику построения итерационных процессов для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений, основанную на разложениях взвешенных псевдообратных матриц, полученных в разд. 4.

Сначала при построении итерационного процесса для вычисления взвешенных псевдообратных матриц используем их разложение (70) в матричный степенной ряд. Положим

$$X_k = \sigma \sum_{i=0}^{k-1} (E - \sigma C A^T B_{EE}^+ A)^i C A^T B_{EE}^+, \; k = 1, 2, \ldots$$

Тогда для вычисления A_{BC}^+ получим итерационный процесс

$$X_1 = \sigma C A^T B_{EE}^+, \; X_k = (E - \sigma C A^T B_{EE}^+ A) X_{k-1} + \sigma C A^T B_{EE}^+ =$$
$$= X_{k-1} + \sigma C A^T B_{EE}^+ (E - A X_{k-1}), \; k = 2, 3, \ldots \tag{73}$$

Оценка близости k-го приближения к A_{BC}^+ по схеме (73) определяется формулой (60), где следует положить $p = k$.

Для построения итерационного процесса используем разложение (71) взвешенных псевдообратных матриц в матричное степенное произведение. Положим

$$X_k = \sigma \prod_{i=0}^{k-1} \{E + (E - \sigma C A^T B_{EE}^+ A)^{2^i}\} C A^T B_{EE}^+, \; k = 1, 2, \ldots$$

Тогда для вычисления A_{BC}^+ получим итерационный процесс

$$X_1 = \sigma \{E + (E - \sigma C A^T B_{EE}^+ A)\} C A^T B_{EE}^+, \; X_k = \{E + (E - \sigma C A^T B_{EE}^+ A)^{2^{k-1}}\} X_{k-1} =$$
$$= X_{k-1} + (E - \sigma C A^T B_{EE}^+ A)^{2^{k-1}} X_{k-1}, \; k = 2, 3, \ldots \tag{74}$$

Оценка близости k-го приближения к A_{BC}^+ по схеме (74) определяется формулой (72), где следует положить $n = k$.

Рассмотрим методику построения итерационных процессов для вычисления взвешенных нормальных псевдорешений системы (16). Положим $x_k = X_k f$, где матрицы X_k определены формулами (73). Тогда для вычисления приближения к $x^+ = A_{BC}^+ f$ получим итерационный процесс

$$x_1 = \sigma C A^T B_{EE}^+ f, \; x_k = (E - \sigma C A^T B_{EE}^+ A) x_{k-1} + \sigma C A^T B_{EE}^+ f =$$
$$= x_{k-1} + \sigma C A^T B_{EE}^+ (f - A x_{k-1}), \; k = 2, 3, \ldots \tag{75}$$

Теорема 9. Итерационный процесс (75) сходится к x^+, определенному в (54), причем имеет место оценка

$$\left\| x^+ - x_k \right\|_{C_{EE}^+} \le \max_{\lambda_i \ne 0} \{\lambda_i^{-1/2} |1 - \sigma \lambda_i|^k\} \|f\|_{B_{EE}^+}, \tag{76}$$

где λ_i и матрицы C и B определены в теореме 8.

Доказательство. Сходимость последовательности векторов, определенных формулами (75), к взвешенному нормальному псевдорешению СЛАУ (16) при $k \to \infty$ следует из того факта, что данная последовательность построена на основе матричного степенного ряда, сходящегося к взвешенной псевдообратной матрице. Покажем справедливость оценки (76).

Поскольку $x^+ = A_{BC}^+ f$, $x_k = X_k f$, на основании определения нормы прямоугольной матрицы формулой (6) и того факта, что в силу (22), (73) и равенства $B_{EE}^{+} B^{1/2} B_{EE}^{+1/2} = B_{EE}^{+}$ следует $(A_{BC}^{+} - X_k) B^{1/2} B_{EE}^{+1/2} = A_{BC}^{+} - X_k$, имеем

$$\left\| x^{+} - x_k \right\|_{C_{EE}^{+}} = \left\| (A_{BC}^{+} - X_k) B^{1/2} B_{EE}^{+1/2} f \right\|_{C_{EE}^{+}} \leq \left\| A_{BC}^{+} - X_k \right\|_{C_{EE}^{+} B^{1/2}} \left\| f \right\|_{B_{EE}^{+}}. \quad (77)$$

Так как $X_k = A_{\sigma,k}^{+}$, учитывая (60), из (77) получаем (76), т.е. утверждение теоремы 9.

Для вычисления приближения к x^{+} на основании (74) получим итерационный процесс

$$x_1 = \sigma \{E + (E - \sigma C A^T B_{EE}^{+} A)\} C A^T B_{EE}^{+} f, \ x_k = \{E + (E - \sigma C A^T B_{EE}^{+} A)^{2^{k-1}}\} x_{k-1} =$$

$$= x_{k-1} + (E - \sigma C A^T B_{EE}^{+} A)^{2^{k-1}} x_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots \quad (78)$$

Аналогично теореме 9 на основании оценки (72) имеем следующую теорему.

Теорема 10. Итерационный процесс (78) сходится к x^{+}, определенному в (54), причем имеет место оценка

$$\left\| x^{+} - x_k \right\|_{C_{EE}^{+}} \leq \max_{\lambda_i \neq 0} \{\lambda_i^{-1/2} |1 - \sigma \lambda_i|^{2^n}\} \left\| f \right\|_{B_{EE}^{+}},$$

где λ_i и матрицы C и B определены в теореме 8.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ward J.F., Boullion T.L., Lewis T.O. Weighted pseudoinverses with singular weights // SIAM J. Appl. Math. — 1971. — **21**, N 3. — P. 480–482.
2. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Разложения и многочленные предельные представления взвешенных псевдообратных матриц // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2007. — **47**, № 5. — С. 747–766.
3. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Представления и разложения взвешенных псевдообратных матриц, итерационные методы и регуляризация задач. 2. Вырожденные веса // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 3. — С. 75–102.
4. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Взвешенные псевдообратные матрицы и взвешенные нормальные псевдорешения с вырожденными весами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2009. — **49**, № 8. — С. 1347–1363.
5. Moore E.H. On the reciprocal of the general algebraic matrix // Abstract. Bull. Amer. Math. Soc. — 1920. — **26**. — P. 394–395.
6. Penrose R. A generalized inverse for matrices // Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1955. — **51**, N 3. — P. 406–413.
7. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. — М.: Наука, 1977. — 223 с.
8. Галба Е.Ф., Молчанов И.Н., Скопецкий В.В. Итерационные методы для вычисления взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами // Кибернетика и системный анализ. — 1999. — № 5. — С. 150–169.
9. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Предельные представления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами и регуляризация задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2004. — **44**, № 11. — С. 1928–1946.
10. Галба Е.Ф. Итерационные методы для вычисления взвешенного нормального псевдорешения с вырожденными весами // Там же. — 1999. — **39**, № 6. — С. 882–896.
11. Галба Е.Ф. Взвешенное псевдообращение матриц с вырожденными весами // Укр. мат. журн. — 1994. — **46**, № 10. — С. 1323–1327.
12. Lancaster P., Rozsa P. Eigenvectors of *H*-self-adjoint matrices // Z. angew. Math. und Mech. — 1984. — **64**, N 9. — S. 439–441.
13. Икрамов Х.Д. Об алгебраических свойствах классов псевдоперестановочных и *H*-самосопряженных матриц // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1992. — **32**, № 8. — С. 155–169.
14. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 576 с.
15. Decell H.P. An application of the Cayley–Hamilton theorem to generalized matrix inversion // SIAM Rev. — 1965. — **7**, N 4. — P. 526–528.
16. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. — 656 с.
17. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Итерационные методы высоких скоростей сходимости для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2005. — **45**, № 10. — С. 1731–1755.

Поступила 18.01.2010