УДК 519.6 + 518:512.25

И.В. СЕРГИЕНКО, А.Н. ХИМИЧ, М.Ф. ЯКОВЛЕВ

МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ ДОСТОВЕРНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Ключевые слова: *приближенные исходные данные, несовместные системы, полная погрешность решений, итерационные методы.*

ВВЕДЕНИЕ

Разнообразные физические процессы и явления, которые всесторонне изучаются с помощью их математических моделей для выявления новых свойств, закономерностей и качеств, а также расчет напряженно-деформированного состояния узлов и изделий, физических полей, синтез новых материалов, использующихся при проектировании и построении установок, конструкций, сооружений, часто тем или иным способом сводятся к решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с различными типами матриц. Более того, численное моделирование нелинейных процессов реализуется, как правило, построением некоторого сходящегося ряда линейных моделей, при расчете которых также используется решение СЛАУ. При этом СЛАУ имеют приближенные значения элементов матриц и компонент векторов правых частей. Это обусловлено тем, что входные данные получаются с помощью каких-либо измерений или в результате предварительных расчетов.

Характерным свойством рассматриваемых задач в такой постановке является то, что их свойства априори неизвестны. В пределах заданного уровня погрешности элементов матрицы и вектора правой части системы могут быть совместными или несовместными, задачи — корректно поставленными или некорректно, и в то же время хорошо или плохо обусловленными. Проблема состоит в том, чтобы в машинной среде исследовать свойства решаемой задачи, сформировать алгоритм получения приближенного решения и оценить его достоверность.

Зависимость погрешности решений от свойств решаемых задач рассматривалась в работах [1–6] и др. На основе определенных свойств задач строились различные методы получения их решения. Например, работа [2] посвящена методу регуляризации А.Н. Тихонова поиска решения некорректно поставленных задач, а в [7] рассматривается аналитический способ вычисления псевдообратных матриц. В [8, 9] предложены прямые и итерационные методы нахождения псевдорешений. В настоящей работе исследуется точность решений, получаемых прямыми и итерационными методами в условиях приближенных исходных данных, в зависимости от математических свойств решаемой задачи, как для корректно поставленных, так и некорректных задач.

СЛАУ С НЕВЫРОЖДЕННЫМИ МАТРИЦАМИ

Рассмотрим систему уравнений с точными исходными данными

$$Ax = b \tag{1}$$

и некоторую систему с приближенными исходными данными

$$\overline{A}\overline{x} = \overline{b}. \tag{2}$$

Пусть $\det(\overline{A}) \neq 0$ и для погрешностей элементов матрицы и компонент вектора правой части выполняются следующие соотношения:

$$\Delta A = A - \overline{A},\ \Delta b = b - \overline{b},\ ||\Delta A|| \le \varepsilon_A ||A||, ||\Delta b|| \le \varepsilon_b ||b||. \tag{3}$$

Кроме того, пусть выполнено неравенство $H = ||\Delta A|| || \overline{A}^{-1} || < 1$. Здесь H — обусловленность матрицы. Последнее неравенство гарантирует, что при любых вариациях элементов матрицы, проводящихся в рамках указанных границ, матрица не станет вырожденной.

Приведем необходимые в дальнейшем определения.

Определение 1. Невырожденной в пределах точности задания исходных данных будем считать невырожденную матрицу, которая не может стать вырожденной в области ΔA изменения ее элементов.

Определение 2. Машинно-невырожденной будем считать матрицу, которая не может стать вырожденной при изменении ее элементов в пределах машинной точности.

Алгоритм машинного исследования корректности сводится к проверке двух соотношений:

$$1{,}0+\gamma \neq 1{,}0,\ \ \gamma = H^{-1}(\bar{A});\ \ \varepsilon_A H(\bar{A}) < 1.$$

Первое условие, выполняющееся в арифметике с плавающей запятой, означает, что матрица машинно-невырождена, второе — что она невырождена в пределах точности задания исходных данных.

При этих условиях решение машинной задачи существует, единственно и устойчиво. Такую машинную задачу следует рассматривать как корректно поставленную в пределах точности задания исходных данных.

В противном случае матрица системы может оказаться матрицей неполного ранга и, следовательно, машинную модель задачи (2), (3) нужно рассматривать как некорректно поставленную.

В [10] получены оценки точности решения системы (1) в зависимости от точности задания исходных данных:

$$\frac{||\bar{x}-x||}{||\bar{x}||} \leq \frac{H(\varepsilon_A+\varepsilon_b)}{1-||\Delta A||\,||\bar{A}^{-1}||},\ \ \frac{||\bar{x}-x||}{||x||} \leq \frac{H(\varepsilon_A+\varepsilon_b)}{1-\varepsilon_b}. \tag{4}$$

Если для вектора u, полученного любым методом (не обязательно прямым или итерационным) и приближающего решение системы (2), выполняется неравенство

$$\frac{||r||}{||\bar{b}||} = \frac{||\bar{A}u-\bar{b}||}{||\bar{b}||} \leq \frac{\varepsilon}{||\bar{A}^{-1}||\,||\bar{A}||}, \tag{5}$$

то относительная погрешность полученного решения оценивается формулой

$$\frac{||u-\bar{x}||}{||\bar{x}||} \leq \varepsilon. \tag{6}$$

Здесь и далее $||x|| = \sqrt{(x,x)}$, $||A||$ — норма матрицы, подчиненная векторной норме, (x,x) — скалярное произведение векторов.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если математическая модель явления или процесса описывается СЛАУ с невырожденной симметричной матрицей и приближенно заданными исходными данными с погрешностями, удовлетворяющими неравенствам (3), то полная погрешность приближенного решения оценивается формулой

$$\frac{||u-x||}{||x||} \leq \varepsilon + \frac{H(1+\varepsilon)(\varepsilon_A+\varepsilon_b)}{1-\varepsilon_b}. \tag{7}$$

При доказательстве теоремы используется тот факт, что для вектора u, полученного любым методом, имеет место оценка

$$\frac{||u-x||}{||x||} \leq \frac{||u-\bar{x}||}{||\bar{x}||}\frac{||\bar{x}||}{||x||} + \frac{||\bar{x}-x||}{||x||},$$

для $||\bar{x}||/||x||$ можно использовать неравенство

$$||\bar{x}||/||x|| \leq (||x||+||\bar{x}-x||)/||x|| = 1+||\bar{x}-x||/||x||,$$

затем применить неравенства (4) и (6).

Если матрица системы (2) симметричная и положительно-определенная с границами спектра ($\delta = \lambda_1$; $\Delta = \lambda_n$), то вместо неравенства (5) можно использовать $\frac{||r||}{||\overline{b}||} \le \frac{\varepsilon\delta}{\Delta}$.

Отметим, что при условии невырожденности матрицы $\overline{A}$ оценка (6) является оценкой вычислительной погрешности приближенного решения системы (2) независимо от способа его получения.

УСЛОВИЯ ОКОНЧАНИЯ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ РЕШЕНИЯ СЛАУ С НЕВЫРОЖДЕННЫМИ МАТРИЦАМИ

Во многих случаях целесообразно получать приближенное решение системы (2) с симметричной ($\overline{A} = \overline{A}^{\mathrm{T}}$, где $\overline{A}^{\mathrm{T}}$ — транспонированная по отношению к $\overline{A}$ матрица) и положительно-определенной матрицей ($\overline{A} > 0$ или $(\overline{A}x, x) > 0$) итерационными методами. Здесь будут рассматриваться:

- класс одношаговых методов вида

$$B\frac{\overline{x}^{(k+1)} - \overline{x}^{(k)}}{\tau_{k+1}} + \overline{A}\overline{x}^{(k)} = \overline{b},\ \ \overline{x}^{(0)} = \overline{x}_0, \tag{8}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$ — номер итерации (к ним относятся, например, методы простой итерации, чебышевский итерационный — метод Ричардсона, Гаусса–Зейделя, верхней релаксации и др.), где $B > 0$ и параметр τ_{k+1} зависят от применяемого метода;

- класс двухшаговых методов вида

$$B\overline{x}^{(k+1)} = \alpha_{k+1}(B - \tau_{k+1}\overline{A})\,\overline{x}^{(k)} + (1 - \alpha_{k+1})\,B\overline{x}^{(k-1)} + \alpha_{k+1}\tau_{k+1}\overline{b} \tag{9}$$

или

$$B\left(\frac{\overline{x}^{(k+1)} - \overline{x}^{(k)}}{\alpha_{k+1}\tau_{k+1}} - \frac{(\alpha_{k+1} - 1)}{\alpha_{k+1}\tau_{k+1}}(\overline{x}^{(k)} - \overline{x}^{(k-1)})\right) + \overline{A}\overline{x}^{(k)} = \overline{b} \tag{10}$$

с $\overline{x}^{(0)} = \overline{x}_0$, $\overline{x}^{(1)} = \overline{x}^{(0)} - \tau_0(\overline{A}\overline{x}^{(0)} - \overline{b})$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ — номер итерации; если $\gamma_1(B\overline{x}, \overline{x}) \le (\overline{A}\overline{x}, \overline{x}) \le \gamma_2(B\overline{x}, \overline{x})$, $\gamma_1 > 0$, параметры могут вычисляться, например, по следующим формулам [11]: переменные

$$\alpha_{k+1} = \frac{4}{4 - \rho_0^2\alpha_k},\ \ \rho_0 = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1},\ \ \alpha_1 = 2,\ \ \tau_{k+1} = \tau_0 \tag{11}$$

и постоянные

$$\alpha_{k+1} = \frac{2(\gamma_2 + \gamma_1)}{(\sqrt{\gamma_2} + \sqrt{\gamma_1})^2},\ \ \tau_{k+1} = \tau_0,\ \ \tau_0 = \frac{2}{\gamma_2 + \gamma_1}. \tag{12}$$

Для этих итерационных схем справедливы следующие утверждения [12].

Теорема 2. Если для каких-либо $\overline{x}^{(k)}$ и $\overline{x}^{(k+1)}$, полученных по итерационной схеме (8), выполняется неравенство

$$\frac{||\overline{x}^{(k+1)} - \overline{x}^{(k)}||}{||\overline{x}^{(k)}||} \le \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\frac{|\tau_{k+1}|}{||\overline{A}^{-1}||\,||B||} \tag{13}$$

или

$$\frac{||\overline{x}^{(k+1)} - \overline{x}^{(k)}||}{||\overline{x}^{(k)}||} \le \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\frac{|\tau_{k+1}|}{||\overline{A}^{-1}B||}, \tag{13a}$$

то для приближенного решения $\bar{x}^{(k)}$справедлива оценка

$$\frac{\|\bar{x}^{(k)}-\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|}\le \varepsilon, \tag{14}$$

где $\bar{x}$ — точное решение системы (2).

Доказательство. Из формулы (8) можно получить неравенство $\|\bar{x}^{(k)}-\bar{x}\|\le$ $\le \|\bar{A}^{-1}\|\|B\|\frac{\|\bar{x}^{(k+1)}-\bar{x}^{(k)}\|}{|\tau_{k+1}|}$. Разделим обе части неравенства, учитывая, что $\|\bar{x}^{(k)}\|\le\|\bar{x}^{(k)}-\bar{x}\|+\|\bar{x}\|$, на $\|\bar{x}^{(k)}\|$ и его оценку $\frac{\|\bar{x}^{(k)}-\bar{x}\|}{\|\bar{x}^{(k)}-\bar{x}\|+\|\bar{x}\|}\le\|\bar{A}^{-1}\|\,\|B\|\times$ $\times\frac{\|\bar{x}^{(k+1)}-\bar{x}^{(k)}\|}{|\tau_{k+1}|\,\|\bar{x}^{(k)}\|}$. Если выполняется неравенство $\frac{\|\bar{x}^{(k)}-\bar{x}\|}{\|\bar{x}^{(k)}-\bar{x}\|+\|\bar{x}\|}\le\|\bar{A}^{-1}\|\|B\|\times$ $\times\frac{\|\bar{x}^{(k+1)}-\bar{x}^{(k)}\|}{|\tau_{k+1}|\,\|\bar{x}^{(k)}\|}\le\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, то из него следует условие (13) и в то же время — оценка (14). Этим завершается доказательство теоремы.

Если учесть приближенность исходных данных, то для решения системы (1) можно получить оценку, аналогичную (7).

Теорема 3. Если для каких-либо значений $\bar{x}^{(k-1)}$, $\bar{x}^{(k)}$ и $\bar{x}^{(k+1)}$, полученных по итерационной схеме (9), выполняется неравенство

$$\frac{\max(w^{(k+1)},w^{(k)})}{\|\bar{x}^{(k)}\|}\le\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\,\frac{\tau_0}{\|\bar{A}^{-1}\|\,\|B\|} \tag{15}$$

или

$$\frac{\max(w^{(k+1)},w^{(k)})}{\|\bar{x}^{(k)}\|}\le\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\,\frac{\tau_0}{\|\bar{A}^{-1}B\|}, \tag{15a}$$

где $w^{(k)}=\|\bar{x}^{(k)}-\bar{x}^{(k-1)}\|$ и $\tau_0=\frac{2}{\gamma_2+\gamma_1}$, то для приближенного решения $\bar{x}^{(k)}$ справедлива оценка (14).

Доказательство. Перепишем (9) в виде

$$\bar{A}^{-1}B(\bar{x}^{(k+1)}-\bar{x}^{(k)}-(\alpha_{k+1}-1)(\bar{x}^{(k)}-\bar{x}^{(k-1)}))=\alpha_{k+1}\tau_0(\bar{x}-\bar{x}^{(k)}).$$

Так как $1<\alpha_{k+1}\le 2$, $k=1,2,\ldots$ (формулы (11), (12)), имеем

$$\|\bar{A}^{-1}\|\,\|B\|\frac{\max(w^{(k+1)},\,w^{(k)})}{\tau_0}\ge\|\bar{x}^{(k)}-\bar{x}\|.$$

Разделив последнее неравенство на $\|\bar{x}^{(k)}\|$ и используя $\|\bar{x}^{(k)}\|\le\|\bar{x}^{(k)}-\bar{x}\|+\|\bar{x}\|$, можно записать

$$\frac{\dfrac{\|\bar{x}^{(k)}-\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|}}{\dfrac{\|\bar{x}^{(k)}-\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|}+1}\le\|\bar{A}^{-1}\|\,\|B\|\frac{\max(w^{(k+1)},\,w^{(k)})}{\tau_0\|\bar{x}^{(k)}\|}.$$

Если правая часть последнего неравенства удовлетворяет условию $\|\bar{A}^{-1}\|\,\|B\|\frac{\max(w^{(k+1)},w^{(k)})}{\tau_0\|\bar{x}^{(k)}\|}\le\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, то отсюда следует неравенство (15), при выполнении которого справедливо условие (14).

Если $B=E$, то $\gamma_1=\delta, \gamma_2=\Delta$ и условия (15), (15а) преобразуются в условие

$$\frac{\max(||w^{(k+1)}||, ||w^{(k)}||)}{||\bar{x}^{(k)}||} \le \frac{2\varepsilon\delta}{(1+\varepsilon)(\Delta+\delta)}.$$

Если учесть приближенность исходных данных, то для решения системы (1) можно получить оценку, аналогичную (7).

О РЕШЕНИИ СЛАУ С ПОЛОЖИТЕЛЬНО-ПОЛУОПРЕДЕЛЕННЫМИ МАТРИЦАМИ С ПОМОЩЬЮ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрим линейную математическую модель процесса, описываемого в общем случае несовместной СЛАУ вида (1) с симметричной и положительно-полуопределенной матрицей $A=A^{\mathrm{T}}$, $\det(A)=0$, $(Ax,x)\ge 0$. При такой матрице пространство представляет собой прямую сумму подпространства образов $\operatorname{Im} A$ и ядра $\ker A$ и любой вектор x (в частности, любое решение системы (1)) можно представить в виде суммы $x=x_0+u$, где $x_0\in\ker A$, $u\in\operatorname{Im} A$.

Для матрицы системы (1) справедливы неравенства

$$\gamma_1||x_1||^2 \le (Ax_1, x_1) \le \gamma_2||x_1||^2, \quad \gamma_1>0\,. \tag{16}$$

Нормальным псевдорешением (если матрица системы вырождена) является вектор $u\in\operatorname{Im} A$. Кроме того, в случае несовместности системы уравнений под нормальным псевдорешением понимается такой вектор u, который доставляет минимум функционалу

$$u=\min_{x\in C}||x||, \ \ C=\{\,x\,\big|\ ||Ax-b||=\min\,\}\,,$$

и имеет наименьшую евклидову норму.

Решение системы (1) будем искать, используя итерационные процессы (8), (9) (или (10)). Для них в [13] доказаны теоремы сходимости, определена скорость их сходимости в подпространстве образов некоторого оператора, указаны способы построения нормального решения или нормального псевдорешения и, в частности, показано, что для невязки справедливо соотношение

$$\lim_{k\to\infty}||r^{(k+1)}-r^{(k)}||=0\,.$$

Для упрощения дальнейшего изложения в итерационных процессах (8), (9), (10) положим $B=E$.

Для итерационного процесса (8) имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Если для $x^{(k)}$, вычисленных по итерационной схеме (8), выполняется условие

$$\frac{||r^{(k+1)}-r^{(k)}||}{||b+r^{(k)}||}=\frac{||r^{(k+1)}-r^{(k)}||}{||Ax^{(k)}||}\le\frac{\tau_{k+1}\gamma_1^2\varepsilon}{\gamma_2(1+\varepsilon)}, \tag{17}$$

то для проекции $x_1^{(k)}$ полученного приближенного решения на подпространство образов матрицы A справедлива оценка

$$\frac{||x_1^{(k)}-u||}{||u||}\le\varepsilon, \tag{18}$$

где $u\in\operatorname{Im} A$.

Доказательство. Перепишем (8) в виде $x^{(k+1)}-x^{(k)}=\tau_{k+1}(Ax^{(k)}-b)$. Отсюда следует, что $r^{(k+1)}-r^{(k)}=\tau_{k+1}A(Ax^{(k)}-b)=\tau_{k+1}A(Ax^{(k)}-b_1-b_0)=\tau_{k+1}A(Ax^{(k)}-$ $-b_1)=\tau_{k+1}A^2z_1^{(k)}$, где $z_1^{(k)}=x_1^{(k)}-u$. Тогда справедлива оценка $||r^{(k+1)}-r^{(k)}||\ge$

$\geq \tau_{k+1}\gamma_1^2 \| x_1^{(k)} - u \|$. В то же время $b + r^{(k)} = b + Ax^{(k)} - b = Ax_1^{(k)} = Az_1^{(k)} + Au$, что приводит к неравенству $\| Ax^{(k)} \| = \| Ax_1^{(k)} \| \leq \| Az_1^{(k)} \| + \| Au \| \leq \gamma_2 (\| x_1^{(k)} - u \| + \| u \|)$. Из последних двух неравенств можно получить следующее соотношение: $\dfrac{\tau_{k+1}\gamma_1^2 \| x_k - u \|}{\gamma_2 (\| x_1^{(k)} - u \| + \| u \|)} \leq \dfrac{\| r^{(k+1)} - r^{(k)} \|}{\| Ax^{(k)} \|}$. Если выполняется неравенство (17), то будет справедлива оценка (18).

Теорема доказана.

Если обозначить $\nu^{(k)} = \max (\| r^{(k+1)} - r^{(k)} \|, \| r^{(k)} - r^{(k-1)} \|)$, то для итерационных процессов (9), (10) справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Если для $x^{(k)}$, полученных с помощью итерационных процессов (9), (10) с параметрами (11) или (12), выполняется неравенство

$$\frac{\nu^{(k)}}{\| f + r^{(k)} \|} = \frac{\nu^{(k)}}{\| Ax^{(k)} \|} \leq \frac{\tau_{k+1}\gamma_1^2 \varepsilon}{\gamma_2 (1 + \varepsilon)}, \tag{19}$$

то относительная погрешность проекции $x_1^{(k)}$ приближенного решения $x^{(k)}$ на подпространство образов матрицы A удовлетворяет оценке (18).

Доказательство. Согласно формуле (5) (рассматривается случай $B = E$) можно записать $(\alpha_{k+1} - 1)(r^{(k)} - r^{(k-1)}) - (r^{(k+1)} - r^{(k)}) = \alpha_{k+1}\tau_{k+1} A^2 z_1^{(k)}$, где $z_1^{(k)} = x_1^{(k)} - u$. Тогда $\alpha_{k+1}\tau_{k+1} \| A^2 z_1^{(k)} \| \leq (\alpha_{k+1} - 1) \| r^{(k)} - r^{(k-1)} \| + \| r^{(k+1)} - r^{(k)} \| \leq \alpha_{k+1} \nu^{(k)}$. Далее, поскольку $\| A^2 z_1^{(k)} \| \geq \gamma_1^2 \| z_1^{(k)} \|$, $\| Ax^{(k)} \| = \| Ax_1^{(k)} \| \leq \gamma_2 (\| x_1^{(k)} - u \| + \| u \|)$ и $\nu^{(k)} \geq \tau_{k+1}\gamma_1^2 \| x_1^{(k)} - u \|$, справедливо соотношение $\dfrac{\tau_{k+1}\gamma_1^2 \| x_1^{(k)} \|}{\gamma_2 (\| x_1^{(k)} - u \| + \| u \|)} \leq \dfrac{\nu^{(k)}}{\| Ax^{(k)} \|}$. Если выполняется неравенство (19), то при этом будет выполнено и неравенство (18), что завершает доказательство теоремы.

О ПОЛНОЙ ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕНИЙ СЛАУ, ПОЛУЧЕННЫХ С ПОМОЩЬЮ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ, В СЛУЧАЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНО-ПОЛУОПРЕДЕЛЕННЫХ МАТРИЦ И ВОЗМУЩЕННОГО ВЕКТОРА ПРАВОЙ ЧАСТИ

Система (1) с симметричной и положительно-полуопределенной матрицей является приближенной моделью некоторого точного процесса, описываемого СЛАУ

$$A\bar{x} = \bar{b} \tag{20}$$

с той же матрицей A и $b = \bar{b} + \Delta\bar{b}$, так что $\| \Delta\bar{b} \| = \| b - \bar{b} \| \leq \delta_b$. Как было показано выше, под решением таких систем понимается нормальное псевдорешение.

В этих условиях оценка точности нормального псевдорешения системы (20) примет вид

$$\frac{\| x_1 - \bar{x}_1 \|}{\| \bar{x}_1 \|} \leq \frac{\gamma_2 \| \Delta\bar{b}_1 \|}{\gamma_1 \| \bar{b}_1 \|} \leq \frac{\gamma_2 \delta_b}{\gamma_1 \| \bar{b}_1 \|} \leq \frac{\gamma_2 \delta_b}{\gamma_1 (\| b_1 \| - \delta_b)}. \tag{21}$$

Если решение системы (1) получено итерационным методом с точностью ε,

$$\frac{\| x_1^{(k)} - x_1 \|}{\| x_1 \|} \leq \varepsilon, \ x_1 \in \operatorname{Im} A,$$

где $x_1^{(k)}$ — приближение к нормальному псевдорешению этой системы, то полная погрешность нормального псевдорешения СЛАУ с положительно-полуопределенной матрицей, при приближенно заданной правой части системы, оценивается неравенством

$$\frac{\|x_1^{(k)}-\bar{x}_1\|}{\|\bar{x}_1\|}\le \varepsilon+(1+\varepsilon)\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\frac{\delta_b}{(\|b_1\|-\delta_b)},\ \bar{x}_1\in \operatorname{Im} A.$$

РЕШЕНИЕ СЛАУ С СИММЕТРИЧНЫМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНО-ПОЛУОПРЕДЕЛЕННЫМИ МАТРИЦАМИ И ПРИБЛИЖЕННЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

Пусть имеется в общем случае несовместная система линейных алгебраических уравнений

$$Ax=b \tag{22}$$

с симметричной положительно-полуопределенной матрицей ($A=A^{\mathrm{T}}$, $A\ge 0$) порядка n и ранга k. Как и ранее, под решением такой системы понимаем нормальное псевдорешение.

Рассмотрим задачу с приближенной правой частью

$$A\bar{x}=\bar{b}, \tag{23}$$

$$\|b-\bar{b}\|\le\|\Delta b\|\le\delta.$$

Для задач (22), (23) можно записать

$$Ax=b_k, \tag{24}$$

$$A\bar{x}=\bar{b}_k, \tag{25}$$

где x, $\bar{x}$ — нормальные псевдорешения задач (22), (23) соответственно, $\bar{b}_k\in\operatorname{Im} A$.

Лемма. Для погрешности нормального псевдорешения задачи (22) имеет место оценка

$$\frac{\|x-\bar{x}\|}{\|x\|}\le\|A\|\,\|A^+\|\frac{\|\Delta b_k\|}{\|b_k\|}, \tag{26}$$

где A^+ — псевдообратная матрица, $\Delta b_k=\bar{b}_k-b_k$.

Доказательство. Вычтем из уравнения (22) уравнение (23):

$$A(x-\bar{x})=b_k-\bar{b}_k.$$

Отсюда вытекает

$$\frac{\|x-\bar{x}\|}{\|x\|}\le\frac{\|A^+\|\|b_k-\bar{b}_k\|}{\|x\|}.$$

Поскольку $\|x\|\ge\|b_k\|/\|A\|$, в результате получаем оценку (26).

Из последней оценки следует непрерывная зависимость нормального псевдорешения от возмущения правой части [1].

Задачу (23) будем считать хорошо обусловленной, если свойства задачи и погрешность исходных данных позволяют получить заданную точность ε решения, а именно

$$\|A\|\,\|A^+\|\frac{\|\Delta b_k\|}{\|b_k\|}\le\varepsilon. \tag{27}$$

Применим трехэтапный метод решения задачи. При произвольно выбранном параметре α (например, $\alpha=0{,}01$) выполняются следующие шаги алгоритма:

$$(A+\alpha E)\,z=b, \tag{28}$$

$$(A+\alpha E)\,u=Az, \tag{29}$$

$$u_H=\frac{u}{\max\limits_i|u_i|}, \tag{30}$$

$$(A+\alpha E)w=u_H, \tag{31}$$

$$\mu = \max_i |w_i|, \tag{32}$$

$$\alpha \le \frac{1}{2\mu\sqrt{1-\varepsilon}}(\varepsilon - \lambda_n \mu \varepsilon_b). \tag{33}$$

Заметим, что система (28) эквивалентна системе двух уравнений

$$(A + \alpha E) z_k = \bar{b}_k = b_k + \Delta b_k, \tag{34}$$

$$\alpha\, z_{n-k} = \bar{b}_{n-k} = b_{n-k} + \Delta b_{n-k},$$

а уравнение (29) в силу $Az = Az_k + Az_{n-k} = Az_k$ можно записать в виде

$$(A + \alpha E) u = Az_k. \tag{35}$$

Теорема 6. Для погрешности нормального псевдорешения задачи (28) имеет место оценка

$$\frac{||x-u||}{||x||} \le \alpha \frac{2\lambda_k + \alpha}{(\lambda_k + \alpha)^2} + \frac{\lambda_n \lambda_k}{(\lambda_k + \alpha)^2} \frac{||\Delta b_k||}{||b_k||}, \tag{36}$$

где λ_k — наименьшее отличное от нуля собственное значение матрицы A, λ_n — ее максимальное собственное значение.

Доказательство. Для доказательства введем необходимую матричную норму, согласованную с евклидовой векторной нормой:

$$||A||_{\bullet} = \sup_{v \in \operatorname{Im} A} \frac{||Av||}{||v||}.$$

Из формул (35), (22) и (34) можно записать

$$(A + \alpha E)(u - x) = \Delta b_k - \alpha z_k - \alpha x, \qquad (A + \alpha E) z_k = Ax_k + \Delta b_k.$$

Тогда

$$u - x = -\alpha((A + \alpha E)^{-2} A - (A + \alpha E)^{-1})\, x + (A + \alpha E)^{-2} (A + \alpha E - \alpha E) \Delta b_k.$$

Отсюда норма погрешности оценивается формулой

$$||u - x|| \le \alpha ||(A + \alpha E)^{-2} (2A + \alpha E)||_{\bullet} \, ||\bar{x}|| + ||(A + \alpha E)^{-2} A||_{\bullet} \, ||\Delta b_k||.$$

При вычислении спектральной нормы матриц необходимо исследовать поведение функций $\frac{2\lambda + \alpha}{(\lambda + \alpha)^2}$, $\frac{\lambda}{(\lambda + \alpha)^2}$. При $\lambda \to \infty$ они стремятся к нулю. Значит, наибольшее значение этих функций достигается при наименьшем возможном значении λ, т.е. при $\lambda = \lambda_k$. Таким образом, для норм матриц имеют место следующие равенства:

$$||(A + \alpha E)^{-2} (2A + \alpha E)||_{\bullet} = \frac{2\lambda_k + \alpha}{(\lambda_k + \alpha)^2}, \qquad ||(A + \alpha E)^{-2} A||_{\bullet} = \frac{\lambda_k}{(\lambda_k + \alpha)^2}.$$

Тогда для относительной погрешности решения справедлива оценка

$$\frac{||u - \bar{x}||}{||\bar{x}||} \le \alpha \frac{2\lambda_k + \alpha}{(\lambda_k + \alpha)^2} + \frac{\lambda_k}{(\lambda_k + \alpha)^2} \frac{||\Delta b_k||}{||x||}.$$

Так как $||x|| \ge ||b_k|| / ||A||_{\bullet}$, в результате получаем неравенство (36), что и требовалось доказать.

Для параметра α, обеспечивающего достижение необходимой точности $\frac{||u-x||}{||x||} \le \varepsilon$, с точностью до величин второго порядка малости выполняется следующая оценка:

$$\alpha \le \frac{\lambda_k}{2\sqrt{1-\varepsilon}} \left(\varepsilon - \frac{\lambda_n \varepsilon_b}{\lambda_k} \right).$$

После выполнения всех шагов алгоритма проверяется выполнение неравенства $\frac{\alpha\mu}{2}+\lambda_n \mu \varepsilon_b \le \varepsilon$.

Если неравенство имеет место, то требуемая точность ε достигнута при заданном произвольном α, если оно не выполняется, то по формуле (33) вычисляется новое значение α и приближение к нормальному псевдорешению, точность которого гарантирует новое значение параметра.

ОЦЕНКИ ПОЛНОЙ ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ДЛЯ МАТРИЦ ПРОИЗВОЛЬНОГО РАНГА

Рассмотрим задачу о нахождении нормального псевдорешения x несовместной системы уравнений (1) с матрицей A неполного ранга

$$\min_{x \in C} ||x||, \ C = \{x \,\big|\, ||Ax-b|| = \min\}.$$

Задача с возмущенными, т.е. приближенными, исходными данными заключается в следующем: найти

$$\min_{\bar{x} \in C} ||\bar{x}||, \ C = \{\bar{x} \,\big|\, ||\bar{A}x-\bar{b}|| = \min\}. \tag{37}$$

Для погрешности элементов матрицы и ее правой части выполняются такие соотношения:

$$\Delta A = A-\bar{A}, \ \Delta b = b-\bar{b}, \quad ||\Delta A|| \le \varepsilon_A ||A||, \ \ ||\Delta b|| \le \varepsilon_b ||b||. \tag{38}$$

Применение того или иного численного алгоритма для решения задачи (37), (38) позволяет получить приближенное решение u.

Для вычисления оценок погрешности задачи наименьших квадратов использован метод сингулярного разложения, который отличается устойчивостью сингулярных чисел, поскольку они являются собственными значениями симметричной матрицы. Заметим, что его целесообразно использовать и для вычисления приближенного нормального псевдорешения, точность которого будет гарантирована полученными в данной работе оценками.

Рассмотрим случай, когда ранг матрицы не изменяется при возмущении ее элементов.

Теорема 7. Предположим, что $||\Delta A|| \, ||A^+|| < 1$, ранг $\bar{A}$= ранг $A = k$, и пусть u — произвольный вектор $u \in \operatorname{Im}\bar{A}^{\mathrm{T}}$. Тогда

$$\frac{||x-u||}{||x||} \le \frac{H}{1-\varepsilon_A H}\left(2\varepsilon_A + \varepsilon_{b_k} + ||\bar{r}|| / ||b_k|| + \varepsilon_A H \frac{||b-b_k||}{||b_k||}\right). \tag{39}$$

Здесь b_k — проекция правой части задачи (36) на главное левое сингулярное подпространство матрицы A, т.е. $b_k \in \operatorname{Im} A$.

Оценка наследственной погрешности в этом случае следует из соотношения

$$x-u = (A^+ - \bar{A}^+)\, b + \bar{A}^+ (b-\bar{b}), \tag{40}$$

где для разности $A^+ - \bar{A}^+$ справедливы равенства из [6]

$$A^+ - \bar{A}^+ = \bar{A}^+ \Delta\, AA^+ - \bar{A}^+ \bar{A}^{\mathrm{T}+} (I-Q) - (I-\bar{P})\, \Delta\, A^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}+} A^+,$$

$$Q = AA^+, \quad \bar{P} = \bar{A}^+ \bar{A}.$$

Учитывая, что $(I-Q)\, b = (I-Q)\, r, \quad r = b - Ax$, из (40) получаем

$$x-u = \bar{A}^+ \Delta A A^+ b - \bar{A}^+ \bar{A}^{\mathrm{T}+} \Delta\, A (I-Q)\, r - (I-\bar{P})\, \Delta A^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}+} A^+ b + \bar{A}^+ (b-\bar{b}).$$

Принимая во внимание неравенства $||I-Q||\le 1$, $||I-\overline{P}||\le 1$,

$$||\overline{A}^{+}||\le \frac{||A^{+}||}{1-||\Delta A||||A^{+}||}, \tag{41}$$

получаем оценку

$$\frac{||x-u||}{||x||}\le \frac{||A^{+}||||A||}{1-||\Delta A||\,||A^{+}||}\left(2\frac{||\Delta A||}{||A||}+\frac{||\Delta b||}{||A||\,||x||}+||A||||A^{+}||\frac{||\Delta A||}{||A||}\frac{||r||}{||A||||x||}\right). \tag{42}$$

Так как $Ax=b_k$, $||r||=||b-b_k||$, из (42) следует

$$\frac{||x-u||}{||x||}\le \frac{H}{1-\varepsilon_A H}\left(2\varepsilon_A+\varepsilon_{b_k}+\varepsilon_A H\frac{||b-b_k||}{||b_k||}\right). \tag{43}$$

Для оценки вычислительной погрешности $\overline{x}-u$ воспользуемся соотношением

$$\overline{A}(\overline{x}-u)=\overline{r}=\overline{b}_k-\overline{A}\overline{x},$$

где $\overline{b}_k$ — проекция вектора $\overline{b}$ на главное левое сингулярное подпространство матрицы $\overline{A}$: $\overline{b}_k\in \operatorname{Im}\overline{A}^{\mathrm{T}}$.

С учетом $\overline{x}-u\in \operatorname{Im}\overline{A}^{\mathrm{T}}$ и того факта, что $\overline{A}^{+}A$ — проектор на $\operatorname{Im}\overline{A}^{\mathrm{T}}$, имеем

$$\overline{A}^{+}\overline{A}(\overline{x}-u)=\overline{x}-u=\overline{A}^{+}\overline{r},\quad ||\overline{x}-u||\le||\overline{A}^{+}||\,||\overline{r}||. \tag{44}$$

Отсюда можно получить оценку вычислительной погрешности

$$\frac{||\overline{x}-u||}{||\overline{x}||}\le||\overline{A}||\,||\overline{A}^{+}||\frac{||\overline{r}||}{||\overline{b}_k||}. \tag{45}$$

Оценка полной погрешности нормального псевдорешения следует из соотношения

$$\frac{||x-u||}{||x||}\le\frac{||x-\overline{x}||}{||x||}+\frac{||\overline{x}-u||}{||x||}. \tag{46}$$

Учитывая (43), (44), а также оценку (41), из (46) получаем неравенство (39).

Рассмотрим случай, когда ранг матрицы неполного ранга может измениться при возмущении ее элементов.

Предположим, что имеют место два варианта: ранг $A\ge$ ранга $\overline{A}$; ранг $A<$ ранга $\overline{A}$.

Если выполняется первое неравенство при условии $||\Delta A||\,||A^{+}||<1$, то, следуя [6], приходим к выводу, что ранг возмущенной матрицы равняется рангу исходной матрицы, и, таким образом, возвращаемся к рассмотренному выше случаю.

Для получения оценки при выполнении второго неравенства используем способ из [14], основанный на сингулярном разложении матриц. Представим $\overline{A}$ в виде

$$\overline{A}=\overline{U}\Sigma\overline{V}^{\mathrm{T}}. \tag{47}$$

Наряду с (47) рассмотрим разложение

$$\overline{A}_k=\overline{U}\,\Sigma_k\overline{V}^{\mathrm{T}}, \tag{48}$$

где Σ_k — диагональная матрица, первые k диагональных элементов которой отличны от нуля и совпадают с соответствующими элементами матрицы Σ, а все остальные элементы равны нулю.

Используем из [15] тот факт, что нормальное псевдорешение $\overline{x}_k$ задачи наименьших квадратов $\overline{A}_k\overline{x}=\overline{b}$ является ортогональной проекцией нормального псевдорешения задачи на главное правое сингулярное подпространство размерности k для матрицы $\overline{A}$. Таким способом построенная матрица (47) имеет ранг k, т.е. такой же, как и ранг матрицы невозмущенной задачи. Следовательно, проблему оценки погрешности псевдорешения для матриц, ранг которых изменился, свели к случаю, когда ранги матриц не изменяются. Учитывая этот факт, используем (42) для оценки $||x-\bar{x}_k||/||x||$:

$$\frac{||x-u||}{||x||} \le \frac{||A^+||\,||A||}{1-||\Delta A||\,||A^+||}\left(2\frac{||\Delta A||}{||A||}+\frac{||\Delta b||}{||A||||x||}+||A||||A^+||\frac{||\Delta A||}{||A||}\frac{||r||}{||A||||x||}\right).$$

Для оценки ΔA_k воспользуемся оценкой из [16]: $||\Delta A_k|| \le 2||\Delta A||$. Кроме того, неравенство $||\Delta A||||A^+||<1/2$ приводит к $||\Delta A_k||\,||A^+||<1$, что является необходимым для выполнения условий теоремы 7. Поэтому из (46) получим в этом случае следующую оценку для наследственной погрешности:

$$\frac{||x-\bar{x}_k||}{||x||} \le \frac{H}{1-2\varepsilon_A H}\left(4\varepsilon_A+\varepsilon_{b_k}+2\varepsilon_A H\frac{||b-b_k||}{||b_k||}\right). \tag{49}$$

Для оценки $||\bar{x}_k-u||$ используем тот факт, что $\overline{A}_k\bar{x}_k=\bar{b}_k$. Тогда для произвольного вектора $u\in \operatorname{Im}\overline{A}_k^{\mathrm{T}}$ имеют место соотношения:

$$\overline{A}_k(\bar{x}_k-u)=\bar{r}_k=\bar{b}_k-\overline{A}_k\bar{x},\quad \overline{A}_k^+\overline{A}_k(\bar{x}_k-u)=\overline{A}_k^+\bar{r}_k. \tag{50}$$

Так как $\bar{x}_k-u\in \operatorname{Im}\overline{A}_k^{\mathrm{T}}$, а оператор $\overline{A}_k^+\overline{A}_k$ — оператор проектирования в $\operatorname{Im}\overline{A}_k^{\mathrm{T}}$, получим

$$\overline{A}_k^+\overline{A}_k(\bar{x}_k-u)=\bar{x}_k-u=\overline{A}_k^+\bar{r}_k,\quad ||\bar{x}_k-u|| \le ||\overline{A}_k^+||\,||\bar{r}_k||. \tag{51}$$

Отсюда следует оценка вычислительной погрешности для проекции псевдорешения

$$\frac{||\bar{x}_k-u||}{||\bar{x}_k||} \le ||\overline{A}_k||\,||\overline{A}_k^+||\frac{||\bar{r}_k||}{||\bar{b}_k||}.$$

Оценка полной погрешности вытекает из (46) с учетом (49), (51). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 8. Предположим, что выполняется условие $||\Delta A||||A^+||<1/2$, тогда для нормального псевдорешения задачи (37) имеет место оценка

$$\frac{||x-u||}{||x||} \le \frac{H}{1-2\varepsilon_A H}\left(4\varepsilon_A+\varepsilon_{b_k}+2\varepsilon_A H\frac{||b-b_k||}{||b_k||}+\frac{||\bar{r}_k||}{||b_k||}\right). \tag{52}$$

Здесь u — элемент подпространства $\operatorname{Im}\overline{A}_k^{\mathrm{T}}$.

В матрицах полного ранга ранг не изменяется при возмущении элементов, если выполнено условие $||\Delta A||\,||A^+||<1$.

Кроме того, имеет место следующее свойство матриц полного ранга:

$$A^+=(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}} \text{ для } n\ge m,\quad A^+=A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1} \text{ для } n\le m. \tag{53}$$

Аналогичные соотношения выполняются для матрицы $\overline{A}$.

Теорема 9. Предположим, что $||\Delta A||||A^+||<1$ и $m>n$, и пусть u — произвольный вектор из R^n. Тогда

$$\frac{||x-u||}{||x||} \le \frac{H}{1-2\varepsilon_A H}\left(4\varepsilon_A+\varepsilon_{b_k}+2\varepsilon_A H\frac{||b-b_k||}{||b_k||}+\frac{||\bar{r}_k||}{||b_k||}\right). \tag{54}$$

При доказательстве теоремы будем использовать формулу (40). Выражение для разности $A^{+}-\bar{A}^{+}$ с учетом (53) и, следовательно, соотношения $\bar{P}=\bar{A}^{+}\bar{A}=I$ примет вид

$$A^{+}-\bar{A}^{+}=\bar{A}^{+}\Delta AA^{+}-\bar{A}^{+}\bar{A}^{\mathrm{T}+}(I-Q)-(I-\bar{P})\Delta A^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}+}A^{+}.$$

Отсюда получаем оценку наследственной погрешности

$$\frac{||x-u||}{||x||}\le\frac{H}{1-2\varepsilon_A H}\left(4\varepsilon_A+\varepsilon_{b_k}+2\varepsilon_A H\frac{||b-b_k||}{||b_k||}+\frac{||\bar{r}_k||}{||b_k||}\right). \tag{55}$$

Оценкой наследственной погрешности является соотношение (46), как и в теореме 8. Отметим, что при оценке вычислительной погрешности можно не использовать свойство проекционных матриц, поскольку для матриц полного ранга в этом случае выполняется условие $A^{+}A=I$.

Окончательно, из (46), (45), (40) и (55) получаем неравенство (54).

Теорема 10. Предположим, что $||\Delta A||||A^{+}||<1, n>m=k$, и пусть u — произвольный вектор из $\mathrm{Im}\bar{A}^{\mathrm{T}}$. Тогда

$$\frac{||x-u||}{||x||}\le\frac{H}{1-H\varepsilon_A}\left(\varepsilon_A+\varepsilon_b+\frac{||\bar{r}||}{||b||}\right). \tag{56}$$

Поскольку в этом случае $Q=AA^{+}=I$, выражение для $A^{+}-\bar{A}^{+}$ примет вид

$$A^{+}-\bar{A}^{+}=\bar{A}^{+}\Delta AA^{+}-\bar{A}^{+}\bar{A}^{\mathrm{T}+}(I-Q)-(I-\bar{P})\Delta A^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}+}A^{+}.$$

Дальнейшие выкладки аналогичны предыдущим. В результате получаем неравенство (56).

Теорема 11. Предположим, что $||\Delta A||\,||A^{+}||<1, m=n=k$, и пусть u — произвольный вектор из R^{n}. Тогда справедливо неравенство (56).

Оценка следует из (40) при условии $Q=I$, $\bar{P}=I$, что имеет место для невырожденных матриц.

Как видно из оценок, используется число обусловленности матриц исходной задачи. Чтобы придать этим оценкам более конструктивный вид, рассмотрим связь между числами обусловленности точной и возмущенной задач.

Используя результаты теории возмущений сингулярных чисел, для спектрального числа обусловленности получаем

$$\sigma_k-||\Delta A||\le\bar{\sigma}_k\le\sigma_k+||\Delta A||,\qquad \sigma_1-||\Delta A||\le\bar{\sigma}_1\le\sigma_1+||\Delta A||,$$
$$\frac{\sigma_1-||\Delta A||}{\sigma_k+||\Delta A||}\le\frac{\bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_k}\le\frac{\sigma_1+||\Delta A||}{\sigma_k-||\Delta A||},\quad \frac{1-\varepsilon_A}{1+\varepsilon_A H}\le\frac{H(\bar{A})}{H(A)}\le\frac{1+\varepsilon_A}{1-\varepsilon_A H}. \tag{57}$$

Для чисел обусловленности относительно других норм верны следующие оценки [17]:

$$(1-\varepsilon_A)||A||\le||\bar{A}||\le(1+\varepsilon_A)||A||,$$
$$\frac{||A^{-1}||(1-2\varepsilon_A H(A))}{1-\varepsilon_A H(A)}\le||(\bar{A})^{-1}||\le\frac{||A^{-1}||}{1-\varepsilon_A H(A)},$$
$$\frac{(1-\varepsilon_A)(1-2\varepsilon_A H(A))}{1-\varepsilon_A H(A)}\le\frac{H(\bar{A})}{H(A)}\le\frac{(1+\varepsilon_A)}{1-\varepsilon_A H(A)}. \tag{58}$$

Для хорошо обусловленных систем, например, если $H(A)\,\varepsilon_A<0{,}1$, получим

$$\frac{8(1-\varepsilon_A)}{9}\le\frac{H(\bar{A})}{H(A)}\le\frac{10(1+\varepsilon_A)}{9}.$$

Поскольку H входит в оценки погрешности решения в качестве сомножителя, интерес представляет только его порядок. Из приведенных оценок (57), (58) следует, что использование числа обусловленности приближенной матрицы вместо точной вполне допустимо для хорошо обусловленных задач.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены СЛАУ с невырожденными и вырожденными матрицами, имеющие матрицы с приближенными элементами и векторы правых частей с приближенными компонентами. При решении систем итерационными методами подробно изучены условия окончания итерационных процессов, обеспечивающие получение решений с заданной точностью. Для всех рассмотренных случаев получены оценки полной погрешности в условиях приближенных исходных данных. Особое внимание уделено решению несовместных систем с симметричными положительно-полуопределенными матрицами методом трехэтапной регуляризации, в котором предложен итерационный алгоритм выбора параметра регуляризации, позволяющего найти решение задачи с требуемой точностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов В.А. Методы регуляризации неустойчивых задач. — М.: Изд-во МГУ, 1987. — 217 с.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач: Учеб. пособ. для вузов. — М.: Наука, 1986. — 287 с.
3. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1977. — 304 с.
4. Молчанов И.Н., Николенко Л.Д., Кириченко М.П. Об одном пакете программ для решения систем линейных алгебраических уравнений // Кибернетика. — 1972. — № 1. — С. 127–134.
5. Годунов С.К., Антонов А.Г., Кирилюк О.П., Костин В.Н. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. — Новосибирск: Наука, 1992. — 359 с.
6. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. — М.: Наука, 1986. — 230 с.
7. Кириченко Н.Ф. Аналитическое представление возмущений псевдообратных матриц // Кибернетика и системный анализ. — 1997. — № 2. — С. 98–107.
8. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Разложения и многочленные предельные представления взвешенных псевдообратных матриц // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2007. — **47**, № 5. — С. 747–766.
9. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Разложение взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные произведения и итерационные методы // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, № 9. — С. 1269–1289.
10. Программное обеспечение ЭВМ МИР-1 и МИР-2. Т. 1. Численные методы / В.М. Глушков, И.Н. Молчанов, Б.Н. Брусникин и др. — Киев: Наук. думка, 1976. — 280 с.
11. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 592 с.
12. Химич А.Н., Яковлев М.Ф. О полной погрешности расчета линейных математических моделей итерационными методами // Кибернетика и системный анализ. — 2002. — № 5. — С. 1–12.
13. Молчанов И.Н., Яковлев М.Ф. Итерационные процессы решения одного класса несовместных систем линейных алгебраических уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1975. — **15**, № 3. — С. 547–558.
14. Химич А.Н. Оценки возмущений для решения задачи наименьших квадратов // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 3. — С. 142–145.
15. Aird T.J., Lynch R.E. Computable accurate upper and lower error bounds for approximate solution of linear algebraic system // ACM Trans. Math. Software. — 1972. — N 1. — P. 217–231.
16. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 318 с.
17. Cline A.K., Moler C.B., Stewart G.W., Wilkinson J.H. On estimate for the condition number of a matrix // SIAM J. Numer. Anal. — 1979. — **16**, N 2. — P. 369–375.

Поступила 04.08.2010