СИСТЕМНЫЙ
АНАЛИЗ

И.В. СЕРГИЕНКО, В.С. ДЕЙНЕКА

УДК 519.6:539.3

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ПОЛЕ ТЕМПЕРАТУР

Ключевые слова: *многокомпонентные тела, термонапряженное состояние, идентификация параметров, градиентные методы.*

В работах [1, 2] рассмотрены вопросы построения на основе результатов теории оптимального управления состояниями многокомпонентных распределенных систем [3, 4] градиентов функционалов-невязок для идентификации градиентными методами различных параметров соответственно задач динамического упругого и квазистационарного термоупругого деформирования тел с включениями.

В данной статье исследованы вопросы построения явных выражений градиентов функционалов-невязок для идентификации градиентными методами [5] различных параметров и термоупругих состояний составных тел при неустановившемся поле температур.

1. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО И ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЙ ТЕЛА ПО ПОВЕРХНОСТНЫМ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМ

Следуя [6], при длительном отсутствии зависимости от времени механических воздействий, т.е. при отсутствии инерционного члена $\rho\ddot{y}$ (y — вектор смещений), термоупругое состояние тела $\Omega \in R^3$ можно описать следующей начально-краевой задачей. На ограниченной связной строго липшицевой области $\Omega \in R^3$ определена система термоупругого равновесия

$$-\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}(T; y)}{\partial x_k} = \tilde{f}_i(x), \ i = \overline{1, 3}, \ t \in (0, \bar{T}), \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\sigma_{ik} = \sigma_{ik}(T; y) = \sum_{l,m=1}^{3} c_{iklm} (\varepsilon_{lm}(y) - \varepsilon_{lm}^0(\alpha, T))$, σ_{ik}, ε_{lm} — соответственно компоненты тензоров напряжений и деформаций, c_{iklm} — упругие постоянные. Когда материал упруго- и теплоизотропный, компоненты тензора деформаций, вызванных изменением $T = T_1 - T_{10}$ температуры T_1 от начального ее состояния T_{10}, выражают в виде $\varepsilon_{lm}^0 = \alpha T \delta_{lm}$, где α — коэффициент линейного расширения, δ_{lm} — символ Кронекера.

Изменение температуры T по области Ω удовлетворяет уравнению

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \bar{f}, \ \ t \in (0, \bar{T}), \tag{2}$$

где c — объемная теплоемкость, k_{ij} — элементы тензора коэффициентов теплопроводности.

На границе $\Gamma = \partial\Omega$ области Ω заданы краевые условия:

$$y = \varphi\,, \quad (x,\,t) \in \Gamma_{1T}^{1}, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(y)\, n_j = g_i\,, \quad i = \overline{1,3}\,, \quad (x,\,t) \in \Gamma_{2T}^{1}, \tag{4}$$

$$T = \varphi_0, \quad (x,\,t) \in \Gamma_{1T}^{2}\,, \tag{5}$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}\, \frac{\partial T}{\partial x_j} \cos(n,\, x_i) = g_0, \quad (x,\,t) \in \Gamma_{2T}^{2}, \tag{6}$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}\, \frac{\partial T}{\partial x_j} \cos(n,\, x_i) = u\,, \quad (x,\,t) \in \Gamma_{3T}^{2}, \tag{7}$$

$$T\Big|_{t=0} = \overline{T}_0\,, \quad x \in \overline{\Omega}\,, \tag{8}$$

где n — внешняя нормаль, $n_j = \cos(n,\, x_i)$, $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{2} \Gamma_i^1$, $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{3} \Gamma_i^2$, $\Gamma_i^l \cap \Gamma_j^l = \varnothing$ при $i \neq j$, $\Gamma_{iT}^{j} = \Gamma_i^j \times [0, \overline{T}\,]$, $[0, \overline{T}\,]$ — временной отрезок.

Предполагаем, что на участке $\gamma_0 \subset \Gamma_2^1$ известны смещения

$$y = f_0\,, \quad t \in [0, \overline{T}\,]. \tag{9}$$

При этом считаем, что на участке Γ_3^2 плотность теплового потока неизвестна, т.е. функция u неизвестна. Тем самым получена задача (1)–(9), состоящая в определении элемента $u \in \mathcal{U} = C(\Gamma_{3T}^{2})$, при котором первая компонента решения $Y = (y, T)$ дифференциальной задачи (1)–(8) удовлетворяет равенству (9).

Введем в рассмотрение функционал-невязку

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{\overline{T}} \| Au - f_0 \|_{L_2(\gamma_0)}^2\, dt\,, \tag{10}$$

где $Au = y(u)\big|_{\gamma_{0T}}$, $\gamma_{0T} = \gamma_0 \times [0, \overline{T}\,]$.

Вместо классического решения $Y = (y, T)$ дифференциальной задачи (1)–(8) будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 1. При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ обобщенным решением начально-краевой задачи (1)–(8) называется вектор-функция $Y = Y(u) = (y(u), T(u)) \in V$, которая $\forall z = (z_1,\, z_2) \in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$a\,(y,\, z_1) = l\,(T;\, z_1)\,, \quad t \in (0, \overline{T}\,), \tag{11}$$

$$\left(c\, \frac{\partial T}{\partial t},\, z_2 \right) + a_1\,(T,\, z_2) = l_1\,(u;\, z_2)\,, \quad t \in (0, \overline{T}\,), \tag{12}$$

$$(cT,\, z_2)(0) = (c\overline{T}_0,\, z_2)\,, \tag{12$'$}$$

где

$$V = \Bigg\{ v = (v_1(x,\,t),\, v_2(x,\,t)):\ v_1 \in W_2^1(\Omega)^3,\ v_2 \in (W_2^1(\Omega))\ \ \forall t \in [0, \overline{T}\,],$$

$$v_1\big|_{\Gamma_{1T}^1} = \varphi\,,\ v_2\big|_{\Gamma_{1T}^2} = \varphi_0\,,\ \int_0^{\overline{T}} (\| v_1 \|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \| v_2 \|_{W_2^1(\Omega)}^2)\, dt < \infty \Bigg\},$$

$$V_0 = \{v(x) = (v_1(x), v_2(x)) \colon v_1 \in (W_2^1(\Omega))^3,\ v_2 \in W_2^1(\Omega),\ v_1\big|_{\Gamma_1^1} = 0,\ v_2\big|_{\Gamma_1^2} = 0\},$$

$$a(y, z_1) = \int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \varepsilon_{lm}(y) \varepsilon_{ik}(z_1)\, dx, \quad a_1(T, z_2) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial z_2}{\partial x_i}\, dx,$$

$$l(T; z_1) = (\tilde{f}, z_1) + (g, z_1)_{L_2(\Gamma_2^1)} + \int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \varepsilon^0_{lm}(\alpha, T) \varepsilon_{ik}(z_1)\, dx,$$

$$l_1(u; z_2) = (\bar{f}, z_2) + (g_0, z_2)_{L_2(\Gamma_2^2)} + (u, z_2)_{L_2(\Gamma_3^2)}, \quad g = \{g_i\}_{i=1}^3, \quad \tilde{f} = \{f_i\}_{i=1}^3.$$

Теорема 1. При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ решение $Y = (y, T)$ задачи (11), (12), (12′) существует и единственно.

Задачу (11), (12), (12′), (10), состоящую в определении элемента u, минимизирующего на $\mathcal{U}$ функционал (10) при ограничениях (11), (12), (12′), будем решать с помощью градиентных методов [5].

Итерационная последовательность для определени $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (11), (12), (12′), (10) имеет вид

$$u_{n+1} = u_n - \beta_n p_n, \quad n = 0, 1, \ldots, n^*, \tag{13}$$

и начинается с некоторого начального приближения $u_0 \in \mathcal{U}$, где направление спуска p_n и коэффициент β_n определяются выражениями [5]:

- для метода минимальных ошибок

$$p_n = J'_{u_n}, \quad \beta_n = \frac{\| e_n \|^2}{\| J'_{u_n} \|^2}, \tag{14}$$

- для метода скорейшего спуска

$$p_n = J'_{u_n}, \quad \beta_n = \frac{\| J'_{u_n} \|^2}{\| A J'_{u_n} \|^2}, \tag{15}$$

- для метода сопряженных градиентов

$$p_n = J'_{u_n} + \gamma_n p_{n-1}, \quad \gamma_0 = 0, \quad \gamma_n = \frac{\| J'_{u_n} \|^2}{\| J'_{u_{n-1}} \|^2}, \quad \beta_n = \frac{(J'_{u_n}, p_n)}{\| A p_n \|^2}, \tag{16}$$

где J'_{u_n} — градиент функционала (10) в точке $u = u_n$, $e_n = A u_n - f_0$, $A u_n = y(u_n)\big|_{\gamma_{0T}}$.

Введем в рассмотрение обозначения

$$\pi(u, v) = (\bar{Y}(u) - \bar{Y}(0),\ \bar{Y}(v) - \bar{Y}(0))_{L_2(\gamma_0) \times L_2},$$

$$L(v) = (f_0 - \bar{Y}(0),\ \bar{Y}(v) - \bar{Y}(0))_{L_2(\gamma_0) \times L_2}, \tag{17}$$

где $\forall v \in \mathcal{U}$ $\bar{Y}(v) = y(v; x, t)\big|_{\gamma_{0T}}$, $y(v) = y(v; x, t)$ — первая компонента решения $Y = Y(v) = (y(v), T(v))$ задачи (11), (12), (12′) при $u = v$,

$$(\bar{\varphi}, \bar{\psi})_{L_2(\gamma_0) \times L_2} = \int_0^{\bar{T}} \int_{\gamma_0} \bar{\varphi} \bar{\psi}\, d\gamma_0 dt.$$

Имеет место равенство

$$2J(v) = \pi(v, v) - 2L(v) + \| f_0 - \bar{Y}(0) \|^2_{L_2(\gamma_0) \times L_2}. \tag{18}$$

Пусть $u, v \in \mathcal{U}$. При $\lambda \in (0,1)$ $z = \lambda v + (1-\lambda)\, u = u + \lambda(v-u) \in \mathcal{U}$. С учетом (17), (18) получаем

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{J(u+\lambda(v-u)) - J(u)}{\lambda} = \pi(u, v-u) - L(v-u) =$$

$$= (\bar{Y}(u) - f_0, \bar{Y}(v) - \bar{Y}(u))_{L_2(\gamma_0)\times L_2} = \left\langle J'_u, v-u \right\rangle. \qquad (19)$$

Для каждого приближения u_n решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (11), (12), (12′), (10), следуя [7–9], на основании [3, 4] рассмотрим следующую сопряженную задачу:

$$-\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}(\psi)}{\partial x_k} = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad (x,t) \in \Omega_T,$$

$$\psi\big|_{\Gamma_1^1} = 0, \quad \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi)\, n_j = 0, \quad i = \overline{1,3}, \ (x,t) \in (\Gamma_2^1 \setminus \gamma_0) \times (0, \bar{T}),$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi)\, n_j = y_i(u_n) - f_{0i}, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \gamma_0, \quad t \in (0, \bar{T}),$$

$$-c\frac{\partial p}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) - \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\, \alpha\, \delta_{lm} \varepsilon_{ik}(\psi) = 0, \ (x,t) \in \Omega_T, \qquad (20)$$

$$p = 0, \quad x \in \Gamma_1^2, \quad t \in (0, \bar{T}),$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} n_i = 0, \quad x \in \Gamma_2^2 \cup \Gamma_3^2, \quad t \in (0, \bar{T}),$$

$$p = 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad t = \bar{T},$$

где $\sigma_{ik}(\psi) = \sum_{l,m=1}^{3} c_{iklm}\, \varepsilon_{lm}(\psi)$. Здесь $\varepsilon_{lm}^0 = \alpha T \delta_{lm}$, однако, следуя [10], можно положить, например, $\sigma_{ij}^T = \sum_{l,m=1}^{3} c_{ijlm}\, \varepsilon_{lm}^0 = \varphi_{ij}^T T$, $\varphi_{ij}^T = c_{ijlm}\, \alpha_{lm}^T$. Для изотропных тел $\varphi_{ij}^T = (3\lambda + 2\mu)\alpha_T \delta_{ij}$, где α_T — коэффициент линейного расширения, $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$.

Вместо классического решения $Y^* = (\psi, p)$ начально-краевой задачи (20) будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 2. Обобщенным решением начально-краевой задачи (20) называется вектор-функция $Y^* = (\psi, p) \in V_d$, которая $\forall z \in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$a(\psi, z_1) = (y(u_n) - f_0, z_1)_{L_2(\gamma_0)}, \quad t \in (0, \bar{T}), \qquad (21)$$

$$-\left(c\frac{\partial p}{\partial t}, z_2 \right) + a_1(p, z_2) - \int_{\Omega} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \alpha \delta_{lm} \varepsilon_{ik}(\psi)\, z_2\, dx = 0, \quad t \in (0, \bar{T}), \qquad (22)$$

$$(cp, z_2)(\bar{T}) = 0, \qquad (23)$$

где $V_d = \{v = (v_1(x,t), v_2(x,t)) \colon v_1 \in (W_2^1(\Omega))^3, \ v_2 \in W_2^1(\Omega) \ \forall t \in [0, \bar{T}], \ v_1\big|_{\Gamma_{1T}^1} = 0, \ v_2\big|_{\Gamma_{1T}^2} = 0\}$.

Теорема 2. При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ решение Y^* задачи (21)–(23) существует и единственно в V_d .

Заменив в (21) z_1 разностью $y(u_{n+1}) - y(u_n)$, а в (22) z_2 — разностью $T(u_{n+1}) - T(u_n)$, с учетом (11), (12), (12′), (23) получаем

$$(\bar{Y}(u_n) - f_0, \bar{Y}(u_{n+1}) - \bar{Y}(u_n))_{L_2(\gamma_0)\times L_2} = \int_0^{\bar{T}} a(\psi, y(u_{n+1}) - y(u_n))dt +$$

$$+\int_0^{\bar{T}} \left(c\frac{\partial (T(u_{n+1}) - T(u_n))}{\partial t}, p \right) dt + \int_0^{\bar{T}} a_1(p, T(u_{n+1}) - T(u_n))\, dt -$$

$$-\int_0^{\bar{T}} \int_{\Omega} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \alpha\, (T(u_{n+1}) - T(u_n)) \delta_{lm} \varepsilon_{ik}(\psi)\, dxdt = (\Delta u_n, p)_{L_2(\Gamma_3^2)\times L_2},$$

т.е.

$$\left\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \right\rangle = (\Delta u_n, p)_{L_2(\Gamma_3^2)\times L_2}, \tag{24}$$

где $(\varphi, \psi)_{L_2(\Gamma_3^2)\times L_2} = \int_0^{\bar{T}} \int_{\Gamma_3^2} \varphi\psi d\Gamma_3^2 dt$.

Следовательно,

$$J'_{u_n} = \tilde{\psi}_n, \tag{25}$$

где $\tilde{\psi}_n = p \big|_{\Gamma_3^2 \times (0, \bar{T})}$, $\| J'_{u_n} \|^2 = \int_0^{\bar{T}} \int_{\Gamma_3^2} \tilde{\psi}_n^2\, d\Gamma_3^2\, dt$.

Наличие градиента J'_{u_n} позволяет использовать градиентные методы (13) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} искомого решения $u \in \mathcal{U}$.

Замечание 1. Если в задаче (11), (12), (12′), (10) восстанавливаемый поток $u = \text{const} \in \mathcal{U} = R$, то на основании (24) градиент $J'_{u_n} = \tilde{\psi}_n = (1, p)_{L_2(\Gamma_3^2)\times L_2}$. Следовательно, $\| J'_{u_n} \| = |\tilde{\psi}_n|$.

2. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПЛОТНОСТИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА

Согласно (24) можно получить явные выражения градиента J'_{u_n} для случая, когда восстанавливаемый поток u задачи (11), (12), (12′), (10) может быть представлен в виде линейной комбинации системы линейно независимых функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^m$, определенных на Γ_3^2.

Пусть $u = u_m(x, t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(t) \varphi_i(x)$, где $\alpha_i \in C([0, \bar{T}])$. На основании (24) получаем

$$\left\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \right\rangle = \int_0^{\bar{T}} \Delta\alpha_i(t) (\varphi_i, p)_{L_2(\Gamma_3^2)}\, dt . \tag{26}$$

Следовательно, $J'_{u_n} = \tilde{\psi}_n$, где $\tilde{\psi}_n = \{\tilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^m$, $\tilde{\psi}_n^i = (\varphi_i, p)_{L_2(\Gamma_3^2)}$, $i = \overline{1, m}$,

$\| J'_{u_n} \|^2 = \sum_{i=1}^{m} \int_0^{\bar{T}} (\tilde{\psi}_n^i)^2 dt$.

Замечание 2. Если $\{\varphi_i(x, t)\}_{i=1}^m$ — система линейно независимых функций, то $J'_{u_n} = \tilde{\psi}_n$, $\tilde{\psi}_n = \{\tilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^m$, $\tilde{\psi}_n^i = (\varphi_i, p)_{L_2(\Gamma_3^2)\times L_2}$, $\| J'_{u_n} \|^2 = \sum_{i=1}^{m} (\tilde{\psi}_n^i)^2$.

Все проведенные рассуждения остаются в силе также для случая, когда тело Ω — изотропное. Тогда компоненты $\sigma_{ij}(T;\, y)$ тензора напряжений принимают вид

$$\sigma_{ij}(y) = 2\mu\varepsilon_{ij}(y) + (\lambda\varepsilon_{kk}(y) - (3\lambda + 2\mu)\alpha T)\delta_{ij}\,, \tag{27}$$

где λ, μ — постоянные Ляме, $\varepsilon_{kk} = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}$.

С учетом (27) билинейная форма $a(\cdot,\cdot)$ и линейный функционал $l(T;\cdot)$ принимают вид

$$a(y, z_1) = \int_{\Omega} \left\{ \lambda div\ y\ div\ z_1 + 2\mu \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}(y)\varepsilon_{ij}(z_1) \right\} dx\,,$$

$$l(T; z_1) = (\tilde{f}, z_1) + (g, z_1)_{L_2(\Gamma_2^1)} + \int_{\Omega} (3\lambda + 2\mu)\alpha T \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}(z_1)\, dx\,. \tag{28}$$

3. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТЕПЛОВОГО И ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЙ ПО НОРМАЛЬНЫМ СМЕЩЕНИЯМ ЧАСТИ ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА

Пусть уравнения равновесия имеют вид (1), а изменение температуры T на области $\Omega_T = \Omega \times (0, \overline{T})$ удовлетворяет уравнению (2). На границе $\Gamma_T = \Gamma \times (0, \overline{T})$ заданы краевые условия (3)–(7), при $t = 0$ имеем начальное условие (8). Функцию $u = u(x, t) \in \mathcal{U} = C(\Gamma_{3T}^2)$ считаем неизвестной.

Предполагаем, что на участке $\gamma_0 \subset \Gamma_2^1$ известна нормальная составляющая y_N смещения y, заданная равенством

$$y_N = f_0, \quad t \in (0, \overline{T})\,. \tag{29}$$

Получена задача (1)–(8), (29), состоящая в нахождении элемента $u \in \mathcal{U}$, при котором первая компонента решения $Y = (y, T)$ начально-краевой задачи (1)–(8) удовлетворяет равенству (29). В этом случае функционал-невязка имеет вид

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{\overline{T}} \| y_N(u) - f_0 \|^2_{L_2(\gamma_0)}\, dt\,. \tag{30}$$

При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ вместо классического решения задачи (1)–(8) используем ее обобщенное решение, т.е. вектор-функцию $Y = (y,\, T)$, являющуюся решением задачи (11), (12), (12′). Тем самым получена задача (11), (12), (12′), (30), состоящая в определении элемента u, минимизирующего на $\mathcal{U}$ функционал (30) при ограничениях (11), (12), (12′). Эту задачу решаем с помощью градиентных методов (13).

Имеют место выражения вида (17)–(19), где $\forall v \in \mathcal{U}$ $\overline{Y}(v) = y_N(v; x, t)\big|_{\gamma_{0T}}$, y_N — нормальная составляющая первой компоненты $y(v; x, t)$ решения $Y = (y,\, T)$ задачи (11), (12), (12′) при $u = v$.

Для каждого приближения u_n решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (11), (12), (12′), (30) сопряженная задача имеет вид

$$-\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}(\psi)}{\partial x_k} = 0\,, \quad (x, t) \in \Omega_T\,,$$

$$\psi|_{\Gamma_1^1} = 0\,, \quad \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi)\, n_j = 0\,, \quad i = \overline{1,3}\,, \quad x \in \Gamma_2^1 \setminus \gamma_0\,, \quad t \in (0, \overline{T})\,,$$

$$\sigma_N(\psi) = y_N(u_n) - f_0\,, \quad (x, t) \in \gamma_{0T}\,,$$

$$\tau_s(\psi)=0\,,\quad (x,t)\in\gamma_{0T}\,, \tag{31}$$

$$-c\frac{\partial p}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\right)-\sum_{i,k,l,m=1}^{3}c_{iklm}\,\alpha\delta_{lm}\varepsilon_{ik}(\psi)=0\,,\quad (x,t)\in\Omega_T\,,$$

$$p=0\,,\quad (x,t)\in\Gamma_{1T}^2\,,$$

$$\sum_{i,j=1}^{3}k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}n_i=0\,,\ x\in\Gamma_2^2\cup\Gamma_3^2\,,\ t\in(0,\overline{T})\,,$$

$$p\big|_{t=\overline{T}}=0\,,\quad x\in\overline{\Omega}\,,$$

где $\sigma_{ij}(\psi)=\sum_{l,m=1}^{3}c_{ijlm}\,\varepsilon_{lm}(\psi)$.

Определение 3. Обобщенным решением задачи (31) называется вектор-функция $Y^*=(\psi,\,p)\in V_d$, которая $\forall z=(z_1,\,z_2)\in V_0$ удовлетворяет тождествам

$$a(\psi,\,p)=(y_N(u_n)-f_0,\,z_{1N})_{L_2(\gamma_0)}\,,\ t\in(0,\overline{T})\,, \tag{32}$$

$$-\left(c\frac{\partial p}{\partial t},\,z_2\right)+a_1(p,\,z_2)-\int_{\Omega}\sum_{i,k,l,m=1}^{3}c_{iklm}\alpha\delta_{lm}\varepsilon_{ik}(\psi)z_2\,dx=0\,,\quad t\in(0,\overline{T})\,,$$

$$(cp,\,z_2)(\overline{T})=0. \tag{33}$$

Имеет место теорема, аналогичная теореме 2.

Заменив в (32) z_1 разностью $y(u_{n+1})-y(u_n)$, а в (33) z_2 — разностью $T(u_{n+1})-T(u_n)$, с учетом (11), (12), (12′), (33) получаем

$$\left\langle J'_{u_n},\,\Delta u_n\right\rangle=\int_0^{\overline{T}}(\Delta u_n,\,p)_{L_2(\Gamma_3^2)}\,dt\,. \tag{34}$$

Следовательно, $J'_{u_n}=\widetilde{\psi}_n$, где $\widetilde{\psi}_n=p\big|_{\Gamma_3^2\times(0,\overline{T})}$, $\|J'_{u_n}\|^2=\int_0^{\overline{T}}\|p\|^2_{L_2(\Gamma_3^2)}dt$.

4. ВОССТАНОВЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ЛИНЕЙНОГО РАСШИРЕНИЯ ПО ПОВЕРХНОСТНЫМ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМ

Предположим, для простоты изложения материала, что тело $\Omega\in R^3$ — изотропное. В противном случае можно рассматривать вопрос восстановления элементов α_{lm}^T, определяющих температурные напряжения, вызванные изменением T температуры тела (разд. 1).

Компоненты тензора напряжений имеют вид (27), где коэффициент линейного расширения $\alpha=u\in\mathcal{U}=R_+=(0\,,+\infty)$ считаем неизвестным. Уравнения равновесия на Ω_T имеют вид

$$-\mu\,\Delta y_i-(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}divy+(3\lambda+2\,\mu)\,\alpha\frac{\partial T}{\partial x_i}=\widetilde{f}_i\,,\quad i=\overline{1,3}\,, \tag{35}$$

где $\Delta=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

Изменение T температуры удовлетворяет уравнению

$$c\frac{\partial T}{\partial t}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)+\bar{f},\quad (x,t)\in\Omega_T\,. \tag{36}$$

На границе Γ при $t \in (0, \overline{T})$ заданы краевые условия

$$y = \varphi, \; x \in \Gamma_1^1,$$
$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(y)\, n_j = g_i, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \Gamma_2^1, \tag{37}$$
$$T = \varphi_0, \; x \in \Gamma_1^2,$$
$$\sum_{j=1}^{3} k \frac{\partial T}{\partial x_i} \cos(n, x_i) = g_0, \; x \in \Gamma_2^2, \; \Gamma = \Gamma_1^2 \cup \Gamma_2^2.$$

При $t = 0$ имеем начальное условие (8). Считаем, что на участке $\gamma_0 \subset \Gamma_2^1$ известны смещения (9). Функционал-невязка имеет вид (10).

Получена задача (35)–(37), (8), (10), состоящая в нахождении элемента $u = \alpha$, минимизирующего на $\mathcal{U}$ функционал (10) при ограничениях (35)–(37), (8). Решив эту задачу, получим значение коэффициента α линейного расширения, распределение температур T по области $\overline{\Omega}_T$ и смещений $y(x, t)$ точек области $\overline{\Omega}$ в зависимости от времени $t \in [0, \overline{T}]$.

При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ вместо классического решения $Y = (y, T)$ задачи (35)–(37), (8) будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 4. При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ обобщенным решением начально-краевой задачи (35)–(37), (8) называется вектор-функция $Y = (y, T) \in V$, которая $\forall z = (z_1, z_2) \in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$a(y, z_1) = l(u, T; z_1), \quad t \in (0, \overline{T}), \tag{38}$$

$$\left(c \frac{\partial T}{\partial t}, z_2 \right) + a_1(T, z_2) = l_1(z_2), \quad t \in (0, \overline{T}), \tag{39}$$

$$(cT, z_2)(0) = (c\overline{T}_0, z_2), \tag{40}$$

где

$$a(y, z_1) = \int_{\Omega} \left\{ \lambda \, div\, y \, div\, z_1 + 2\mu \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}(y)\, \varepsilon_{ij}(z_1) \right\} dx,$$

$$l(u, T; z_1) = (\widetilde{f}, z_1) + (g, z_1)_{L_2(\Gamma_2^1)} + \int_{\Omega} (3\lambda + 2\mu) u T \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}(z_1)\, dx,$$

$$a_1(T, z_2) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{3} k \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial z_2}{\partial x_i} dx, \quad l_1(z_2) = (\bar{f}, z_2) + (g_0, z_2)_{L_2(\Gamma_2^2)}.$$

Задачу (38)–(40), (10) решим с помощью градиентных методов (13). Для каждого приближения u_n рассмотрим сопряженную задачу

$$-\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}(\psi)}{\partial x_k} = 0, \quad (x, t) \in \Omega_T,$$

$$\psi\big|_{\Gamma_1^1} = 0, \; \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi)\, n_j = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \Gamma_2^1 \setminus \gamma_0, \; t \in (0, \overline{T}), \tag{41}$$
$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi)\, n_j = y_i(u_n) - f_{0i}, \quad i = \overline{1,3}, \quad (x, t) \in \gamma_{0T},$$

где $\sigma_{ik}(\psi) = \sum_{l,m=1}^{3} c_{iklm}\, \varepsilon_{lm}(\psi)$.

Определение 5. Обобщенным решением краевой задачи (41) называется функция $\psi \in V_d^1 = \{ v(x,t) \in (W_2^1(\Omega))^3 : v|_{\Gamma_1^1} = 0,\ \forall t \in [0, \bar{T}] \}$, которая $\forall z_1 \in V_1^0 = \{ v(x) \in (W_2^1(\Omega))^3 : v|_{\Gamma_1^1} = 0 \}$ удовлетворяет тождеству

$$a(\psi, z_1) = (y(u_n) - f_0, z_1)_{L_2(\gamma_0)}, \quad t \in (0, \bar{T}). \tag{42}$$

Следуя [3], легко установить, что при каждом фиксированном $t \in [0, \bar{T}]$ решение $\psi = (x, t)$ задачи (42) существует и единственно.

Заменив в (42) функцию z_1 разностью $y(u_{n+1}) - y(u_n)$, с учетом (38) получим

$$\int_0^{\bar{T}} (y(u_n) - f_0, y(u_{n+1}) - y(u_n))_{L_2(\gamma_0)} dt = \int_0^{\bar{T}} a(\psi, y(u_{n+1}) - y(u_n))\, dt =$$

$$= \int_0^{\bar{T}} (l(u_{n+1}, T; \psi) - l(u_n, T; \psi))\, dt = \int_0^{\bar{T}} \int_\Omega (3\lambda + 2\mu) \Delta u_n T \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii}(\psi)\, dxdt,$$

т.е.

$$\left\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \right\rangle = \int_0^{\bar{T}} \int_\Omega (3\lambda + 2\mu) \Delta u_n T \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii}(\psi)\, dxdt, \tag{43}$$

где $T = T(x, t)$ — единственное решение задачи (39), (40), не зависящее от $u \in \mathcal{U}$.

Следовательно, $J'_{u_n} = \tilde{\psi}_n$, где $\tilde{\psi}_n = \int_0^{\bar{T}} \int_\Omega (3\lambda + 2\mu) T \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii}(\psi)\, dxdt$, $\| J'_{u_n} \| = | \tilde{\psi} |$.

5. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НА ОСНОВЕ ЗАДАЧИ УПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ

Предположим, что тело $\Omega \in R^3$ — изотропное. Компоненты тензора напряжений имеют вид (27), где изменение температуры считаем неизвестным.

Уравнения равновесия на Ω_T имеют вид

$$-\mu \Delta y_i - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} div\ y + (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial x_i} = \tilde{f}_i, \quad i = \overline{1,3}. \tag{44}$$

На границе Γ при $t \in (0, \bar{T})$ заданы краевые условия

$$y = \varphi, \quad x \in \Gamma_1^1,$$

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(y) n_j = g_i, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \Gamma_2^1. \tag{45}$$

Считаем, что на участке $\gamma_0 \subset \Gamma_2^1$ известны смещения, заданные равенством (9). Функционал-невязка имеет вид (10).

Получена задача (44), (45), (10), состоящая в определении изменения температуры $T = T(x, t) = u \in \mathcal{U} = C^{1,0}(\Omega_T)$, при которой решение $y = y(u)$ задачи (44), (45) удовлетворяет равенству (9).

Определение 6. При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ обобщенным решением краевой задачи (44), (45) называется функция $y = y(u) = y(u; x, t) \in V_1$, которая $\forall z_1 \in V_1^0$ удовлетворяет тождеству

$$a(y, z_1) = l(u; z_1), \quad t \in (0, T), \tag{46}$$

где множество V_1^0 и билинейная форма $a(\cdot,\cdot)$ определены в разд. 4,

$$V_1 = \{ v(x,t) \in (W_2^1(\Omega))^3 : v\big|_{\Gamma_1^1} = \varphi\,, \quad t \in (0, \bar{T}) \}\,,$$

$$l(u; z_1) = (\tilde{f}, z_1) + (g, z_1)_{L_2(\Gamma_2^1)} + \int_\Omega (3\lambda + 2\mu)\alpha\, u \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}(z_1)\, dx\,.$$

При решении задачи (46), (10) можем принять $\mathcal{U} = C(\bar{\Omega}_T)$. Имеют место выражения вида (17)–(19). Для каждого приближения u_n решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (46), (10) сопряженная задача при $t \in (0, \bar{T})$ имеет вид

$$-\mu\Delta\psi_i - (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_i} div\,\psi = 0\,, \quad (x,t) \in \Omega_T\,,$$

$$\psi\big|_{\Gamma_{1T}^1} = 0\,,$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi) n_j = 0\,, \quad i = \overline{1,3}\,, \quad (x,t) \in (\Gamma_2^1 \setminus \gamma_0) \times (0, \bar{T})\,, \tag{47}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi) n_j = y_i(u_n) - f_{0i}\,, \; i = \overline{1,3}\,, \quad (x,t) \in \gamma_{0T}\,,$$

где $\sigma_{ij}(\psi) = \lambda \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{kk}(\psi)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(\psi)$, $i, j = \overline{1,3}$.

Определение 7. Обобщенным решением краевой задачи (47) называется функция $\psi \in V_d^1$, которая $\forall z_1 \in V_{d_0}^1$ удовлетворяет тождеству

$$a(\psi, z_1) = (y(u_n) - f_0, z_1)_{L_2(\gamma_0)}\,, \quad t \in (0, \bar{T})\,. \tag{47$'$}$$

Выбирая в тождестве (47′) вместо z_1 разность $y(u_{n+1}) - y(u_n)$, с учетом (46) получаем

$$\left\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \right\rangle = \int_0^{\bar{T}} (y(u_n) - f_0, y(u_{n+1}) - y(u_n))_{L_2(\gamma_0)}\, dt =$$

$$= \int_0^{\bar{T}} a(\psi, y(u_{n+1}) - y(u_n))\, dt = \int_0^{\bar{T}}\int_\Omega (3\lambda + 2\mu)\alpha\Delta u_n \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}(\psi)\, dxdt.$$

Следовательно, $J'_{u_n} = \tilde{\psi}_n$, где

$$\tilde{\psi}_n = (3\lambda + 2\mu)\alpha \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}(\psi)\big|_{\Omega_T}, \qquad \| J'_{u_n} \|^2 = \int_0^{\bar{T}}\int_\Omega \tilde{\psi}_n^2 dxdt.$$

Замечание 3. При решении задачи (46), (10) можно использовать параметрический способ идентификации температуры тела $T(x,t)$.

6. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПО ЗАДАННЫМ НОРМАЛЬНЫМ СМЕЩЕНИЯМ НА ОСНОВЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА ЛИНЕЙНОГО РАСШИРЕНИЯ

Пусть для изотропного тела Ω $\forall\, t \in (0, \bar{T})$ уравнения равновесия имеют вид (44), где α считается неизвестным. Краевые условия $\forall\, t \in (0, \bar{T})$ заданы выражениями

$$y = \varphi\,, \quad x \in \Gamma_1^1,$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(y) n_j = g_i\,, \quad i = \overline{1,3}\,, \quad x \in \Gamma_2^1\,. \tag{48}$$

При каждом $t \in [0, \bar{T}]$ на $\gamma_0 \subset \Gamma_2^1$ имеем

$$y_N = f_0. \tag{49}$$

Изменение температуры T $\forall\, t \in (0, \bar{T})$ удовлетворяет уравнению (36). При каждом $t \in (0, \bar{T})$ на границе Γ заданы краевые условия

$$T = \varphi_0, \quad x \in \Gamma_1^2,$$
$$\sum_{k=1}^{3} k \frac{\partial T}{\partial x_i} \cos(n, x_i) = g_0, \quad x \in \Gamma_2^2. \tag{50}$$

Начальное условие имеет вид (8).

Получена задача (44), (36), (48)–(50), (8), состоящая в определении положительного вещественного числа $u = \alpha \in \mathcal{U} = R_+$, при котором первая компонента классического решения $Y = (y, T)$ начально-краевой задачи (44), (36), (48), (50), (8) удовлетворяет равенству (49). Функционал-невязка имеет вид (30). Вместо классического решения начально-краевой задачи (44), (36), (48), (50), (8) используем ее обобщенное решение, т.е. решение задачи (38)–(40).

Вместо задачи (44), (48)–(50), (8) решаем задачу (38)–(40), (30), состоящую в определении элемента u, минимизирующего на $\mathcal{U}$ функционал (30) при ограничениях (38)–(40). Задачу (38)–(40), (30) будем решать с помощью градиентных методов (13).

Для каждого приближения u_n решения $u \in \mathcal{U}$ введем в рассмотрение сопряженную задачу

$$-\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}(\psi)}{\partial x_k} = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad (x, t) \in \Omega_T,$$
$$\psi\big|_{\Gamma_1^1} = 0, \quad \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi)\, n_j = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \Gamma_2^1 \setminus \gamma_0, \quad t \in (0, \bar{T}), \tag{51}$$
$$\sigma_N(\psi) = y_N(u_n) - f_0, \quad x \in \gamma_0, \quad t \in (0, \bar{T}),$$
$$\tau_s(\psi) = 0, \quad x \in \gamma_0, \quad t \in (0, \bar{T}),$$

где $\sigma_{ik}(\psi) = \sum_{l,m=1}^{3} c_{iklm} \varepsilon_{lm}(\psi)$.

Определение 8. Обобщенным решением краевой задачи (51) называется функция $\psi \in V_d^1$, которая $\forall z_1 \in V_{d_0}^1$ удовлетворяет тождеству

$$a(\psi, z_1) = (y_N(u_n) - f_0,\ z_{1N})_{L_2(\gamma_0)}, \quad t \in (0, \bar{T}). \tag{52}$$

Заменяя в (52) функцию z_1 разностью $y(u_{n+1}) - y(u_n)$, с учетом (38), где $T = T(x, t)$ — решение задачи (39), (40), получаем

$$\left\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \right\rangle = \int_0^{\bar{T}} (y_N(u_n) - f_0, y_N(u_{n+1}) - y_N(u_n))_{L_2(\gamma_0)} dt =$$
$$= \int_0^{\bar{T}} a(\psi, y(u_{n+1}) - y(u_n))\, dt = \int_0^{\bar{T}} (l(u_{n+1}, T; \psi) - l(u_n, T; \psi))\, dt = \tag{53}$$
$$= \int_0^{\bar{T}} \int_\Omega (3\lambda + 2\mu)\, \Delta u_n T \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}(\psi)\, dx dt.$$

Следовательно, $J'_{u_n} = \tilde{\psi}_n$, где $\tilde{\psi}_n = \int_0^{\bar{T}} \int_\Omega (3\lambda + 2\mu) T \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}(\psi)\, dx dt.$

Замечание 4. Если предположить, что коэффициент линейного расширения $\alpha=\alpha(t)=u(t)\in\mathcal{U}=C_{+}([0,\ T])$, то на основании (53) получаем

$$\widetilde{\psi}_n=\int_{\Omega}(3\lambda+2\mu)T\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{ii}(\psi)\,dx\,,\quad \|J'_{u_n}\|^2=\int_0^{\bar T}\widetilde{\psi}_n^2dt\,.$$

Замечание 5. Если $\alpha(t)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\varphi_j(t)$, где $\{\varphi_j\}_{j=1}^{m}$ — система линейно независимых функций, $\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\varphi_j(t)\ge 0$, то

$$\widetilde{\psi}_n=\{\widetilde{\psi}_n^j\}_{j=1}^m\,,\quad \widetilde{\psi}_n^j=\int_0^{\bar T}\int_{\Omega}(3\lambda+2\mu)T\varphi_j\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{ii}(\psi)\,dxdt,\quad \|J'_{u_n}\|^2=\sum_{j=1}^{m}(\widetilde{\psi}_n^j)^2.$$

7. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПО ЗАДАННЫМ СМЕЩЕНИЯМ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТЕЛА, ОСЛАБЛЕННОГО СЛАБОПРОЧНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Пусть на ограниченных связных строго липшицевых областях Ω_1, $\Omega_2\in R^3$ ($\Omega_1\cap\Omega_2=\varnothing$, $\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2=\gamma\ne\varnothing$) определена система уравнений термоупругого равновесия

$$-\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ik}(y)}{\partial x_k}=\widetilde{f}_i,\quad i=\overline{1,3}\,,\ t\in(0,\bar T)\,,\tag{54}$$

где $\sigma_{ik}(y)=\sigma_{ik}(T\,;y)=\sum_{l,m=1}^{3}c_{iklm}\,(\varepsilon_{lm}(y)-\varepsilon_{lm}^0)\,.$

Изменение температуры T удовлетворяет уравнению

$$c\frac{\partial T}{\partial t}=\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)+\bar f,\quad (x,t)\in\Omega_T,\tag{55}$$

где $\Omega_T=\Omega\times(0,\bar T)$, $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$.

На границе $\Gamma=(\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2)\setminus\gamma$ при $\forall t\in(0,\bar T)$ заданы краевые условия:

$$\begin{gathered}y=\varphi\,,\quad x\in\Gamma_1^1\,,\\ \sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(y)n_j=g_i,\quad i=\overline{1,3}\,,\quad x\in\Gamma_2^1\,,\\ T=\varphi_0,\quad x\in\Gamma_1^2,\\ \sum_{i,j=1}^{3}k_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j}\cos(n,x_i)=g_0,\quad x\in\Gamma_2^2,\\ \sum_{i,j=1}^{3}k_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j}\cos(n,x_i)=u\,,\quad x\in\Gamma_3^2.\end{gathered}\tag{56}$$

При $t=0$ имеем начальное условие

$$T=\bar T_0,\ x\in\bar\Omega_1\cup\bar\Omega_2.\tag{57}$$

Считаем, что на участке $\gamma_{0T}\subset\Gamma_{2T}^1$ известны смещения, заданные равенством (9).

На участке γ, разделяющем тело $\overline{\Omega}$ на две составляющие — $\overline{\Omega}_1, \overline{\Omega}_2$, при $\forall t \in (0, \overline{T})$ условия сопряжения слабопрочного включения имеют вид

$$[y_N] = 0, \quad [\sigma_N(y)] = 0,$$
$$[\tau_s(y)] = 0, \quad \tau_s^{\pm}(y) = r[y_s], \tag{58}$$

где $[\varphi] = \varphi^+ - \varphi^-$, $\varphi^{\pm} = \varphi(x, t)$ при $(x, t) \in \gamma_T^{\pm}$, $\gamma_T^{\pm} = \gamma^{\pm} \times (0, \overline{T})$, $\gamma^+ = \partial\Omega_2 \cap \gamma$, $\gamma^- = \partial\Omega_1 \cap \gamma$.

Влияние слаботеплопроницаемого включения γ на температурное состояние тела Ω при $\forall t \in (0, \overline{T})$ учитываем условиями

$$[q_T] = 0, \quad q_T^{\pm} = r_1[T], \tag{59}$$

где $q_T = \sum\limits_{i,j=1}^{3} k_{ij} \dfrac{\partial T}{\partial x_j} \cos(n, x_i)$, n — нормаль к участку γ, направленная в область Ω_2.

Получена задача (54)–(59), (9), состоящая в нахождении функции $u \in \mathcal{U} = C(\Gamma_{3T}^2)$, при которой первая компонента y классического решения $Y = (y, T)$ начально-краевой задачи (54)–(59) удовлетворяет равенству (9).

Функционал-невязка имеет вид (10). Вместо классического решения начально-краевой задачи (54)–(59) используем ее обобщенное решение.

Определение 9. При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ обобщенным решением начально-краевой задачи (54)–(59) называется вектор-функция $Y = (y, T) \in V$, которая $\forall z = (z_1, z_2) \in V_0$ удовлетворяет тождествам

$$a(y, z_1) = l(T; z_1), \quad t \in (0, \overline{T}), \tag{60}$$

$$\left(c\frac{\partial T}{\partial t}, z_2 \right) + a_1(T, z_2) = l_1(u; z_2), \quad t \in (0, \overline{T}), \tag{61}$$

$$(cT, z_2)(0) = (c\overline{T}_0, z_2), \tag{62}$$

где

$$V = \{v(x, t) = (v_1(x, t), v_2(x, t)) \colon v_1\big|_{\Omega_i} \in (W_2^1(\Omega_i))^3, \; v_2\big|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i), \; i = 1, 2,$$
$$v_1\big|_{\Gamma_1^1} = \varphi, \; [v_{1N}]\big|_{\gamma} = 0, \; v_2\big|_{\Gamma_1^2} = \varphi_0, \; \forall t \in (0, \overline{T})\},$$

$$V_0 = \{v(x) = (v_1(x), v_2(x)) \colon \; v_1\big|_{\Omega_i} \in (W_2^1(\Omega_i))^3,$$

$$v_2\big|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i), \quad i = 1, 2, \; v_1\big|_{\Gamma_1^1} = 0, \; [v_{1N}]\big|_{\gamma} = 0, \; v_2\big|_{\Gamma_1^2} = 0\},$$

$$a(y, z_1) = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \, \varepsilon_{lm}(y) \, \varepsilon_{ik}(z_1) dx + \int\limits_{\gamma} r[y_s][z_{1s}] d\gamma,$$

$$a_1(T, z_2) = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial z_2}{\partial x_i} dx + \int\limits_{\gamma} r_1[T][z_2] d\gamma,$$

$$l(T; z_1) = (\tilde{f}, z_1) + (g, z_1)_{L_2(\Gamma_2^1)} + \int\limits_{\Omega} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \, \alpha T \delta_{lm} \varepsilon_{ik}(z_1) \, dx,$$

$$l_1(u; z_2) = (\bar{f}, z_2) + (g_0, z_2)_{L_2(\Gamma_2^2)} + (u, z_2)_{L_2(\Gamma_3^2)}.$$

Задачу (60)–(62), (10) решим с помощью градиентных методов (13). Для каждого приближения u_n решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (60)–(62), (10) введем в рассмотрение сопряженную задачу

$$-\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}(\psi)}{\partial x_k} = 0\,, \quad (x,t) \in \Omega_T\,,$$

$$\psi\big|_{\Gamma_{1T}^1} = 0\,, \quad \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}(\psi)\, n_k = 0\,, \quad i = \overline{1,3}, \quad (x,t) \in \Gamma_{2T}^1 \setminus \gamma_{0T}\,,$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi) n_j = y_i(u_n) - f_{0i}\,, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \gamma_{0T}\,,$$

$$[\psi_N] = 0\,, \quad [\sigma_N(\psi)] = 0\,, \quad (x,t) \in \gamma_T\,,$$

$$[\tau_s(\psi)] = 0\,, \quad \tau_s^{\pm}(\psi) = r[\psi_s]\,, \quad (x,t) \in \gamma_T\,, \tag{63}$$

$$-c\frac{\partial p}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) - \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\, \alpha \delta_{lm} \varepsilon_{ik}(\psi) = 0\,, \quad (x,t) \in \Omega_T\,,$$

$$p = 0\,, \quad (x,t) \in \Gamma_{1T}^2\,,$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \cos(n, x_i) \right] = 0\,, \quad (x,t) \in \gamma_T\,,$$

$$\left\{ \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \cos(n, x_i) \right\}^{\pm} = r_1[p]\,, \quad (x,t) \in \gamma_T\,,$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} n_i = 0\,, \quad (x,t) \in \Gamma_{2T}^2 \cup \Gamma_{3T}^2\,,$$

$$p\big|_{t=\overline{T}} = 0\,, \quad x \in \overline{\Omega}\,,$$

где $\sigma_{ij}(\psi) = \sum_{l,m=1}^{3} c_{ijlm}\, \varepsilon_{lm}(\psi)$.

Определение 10. Обобщенным решением начально-краевой задачи (63) называется вектор-функция $Y^* = (\psi, p) \in V_d$, которая $\forall z = (z_1, z_2) \in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$a(\psi, z_1) = (y(u_n) - f_0, z_1)_{L_2(\gamma_0)}\,, \quad t \in (0, \overline{T})\,, \tag{64}$$

$$-\left(c\frac{\partial p}{\partial t}, z_2 \right) + a_1(p, z_2) - \int_{\Omega} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\, \alpha \delta_{lm} \varepsilon_{ik}(\psi) z_2\, dx = 0\,, \quad t \in (0, \overline{T})\,, \tag{65}$$

$$(cp, z_2)(\overline{T}) = 0\,. \tag{66}$$

Решение задачи (64)–(66) существует и единственно.

Заменив в (64) функцию z_1 разностью $y(u_{n+1}) - y(u_n)$, а в (65) z_2 — разностью $T(u_{n+1}) - T(u_n)$, с учетом (60)–(62), (66) получаем

$$\left\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \right\rangle = \int_0^{\overline{T}} (\Delta u_n, p)_{L_2(\Gamma_3^2)}\, dt\,. \tag{67}$$

Следовательно, $J'_{u_n} = \widetilde{\psi}_n$, где $\widetilde{\psi}_n = p\big|_{\Gamma^2_{3T}}$, $\| J'_{u_n} \|^2 = \int\limits_0^{\overline{T}} \int\limits_{\Gamma^2_3} \widetilde{\psi}^2_n dxdt$.

Замечание 6. Если $\Gamma^2_3 = \Gamma^{21}_3 \cup \Gamma^{22}_3$, где $\Gamma^{21}_3 \cap \Gamma^{22}_3 = \varnothing$, $\Gamma^{2i}_3 = \partial\Omega_i \cap \Gamma^2_3$, $i = 1, 2$, то можем предположить $\mathcal{U} = C(\Gamma^{21}_{3T}) \times C(\Gamma^{22}_{3T})$. На основании (67) получаем $J'_{u_n} = \widetilde{\psi}_n$, где $\widetilde{\psi}_n = \{\widetilde{\psi}^i_n\}^2_{i=1}$, $\widetilde{\psi}^i_n = p\big|_{\Gamma^{2i}_{3T}}$, $i = 1, 2$,

$$\| J'_{u_n} \|^2 = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_0^{\overline{T}} \int\limits_{\Gamma^{2i}_{3T}} (\widetilde{\psi}^i_n)^2 d\Gamma^{2i}_{3T} dt .$$

Замечание 7. Если $u\big|_{\Gamma^{2i}_{3T}} = u^i_m = \sum\limits_{j=1}^{m_i} \alpha^i_j(t) \varphi^i_j(x)$, где $\{\varphi^i_j\}^{m_i}_{j=1}$ — система линейно независимых функций, то $J'_{u_n} = \widetilde{\psi}_n$, где $\widetilde{\psi}_n = \{\widetilde{\psi}^i_n\}^2_{i=1}$, $\widetilde{\psi}^i_n = \{\widetilde{\psi}^i_{n_j}\}^{m_i}_{j=1}$, $\widetilde{\psi}^i_{n_j} = \int\limits_{\Gamma^{2i}_3} \varphi^i_j p\, d\Gamma^{2i}_3$, $\| J'_{u_n} \|^2 = \sum\limits_{i=1}^{2} \sum\limits_{j=1}^{m_i} \int\limits_0^{\overline{T}} (\widetilde{\psi}^i_{n_j})^2 dt$. Если $u^i_m = \sum\limits_{j=1}^{m_i} \alpha_i \varphi^i_j(x, t)$, где $\{\varphi^i_j(x, t)\}^{m_i}_{j=1}$ — система линейно независимых функций, то $\widetilde{\psi}^i_{n_j} = \int\limits_0^{\overline{T}} \int\limits_{\Gamma^{2i}_3} \varphi^i_j p\, d\Gamma^{2i}_3 dt$, $\| J'_{u_n} \|^2 = \sum\limits_{i=1}^{2} \sum\limits_{j=1}^{m_i} (\widetilde{\psi}^i_{n_j})^2$.

8. ОДНОВРЕМЕННАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПЛОТНОСТИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА, ПАРАМЕТРА ЖЕСТКОСТИ НА СДВИГ ПРОСЛОЯ, ЕГО ТЕРМИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Пусть на области $\Omega_T = \Omega_{1T} \cup \Omega_{2T}$ определена система термоупругого равновесия (54) и диффузии тепла (55). При $\forall t \in (0, \overline{T})$ на границе Γ заданы краевые условия:

$$
\begin{gathered}
y = \varphi, \quad x \in \Gamma^1_1, \\
\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(y) n_j = g_i, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \Gamma^1_2, \\
T = \varphi_0, \quad x \in \Gamma^2_1, \\
\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \cos(n, x_i) = g_0, \quad x \in \Gamma^2_2, \\
\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \cos(n, x_i) = u_1(x, t), \quad x \in \Gamma^2_3.
\end{gathered}
\tag{68}
$$

Считаем, что на участке $\gamma_{0T} \subset \Gamma^1_{2T}$ известны смещения, заданные равенством (9). На участке γ_T условия сопряжения имеют вид

$$
\begin{gathered}
[y_N] = 0, \quad [\sigma_N(y)] = 0, \\
[\tau_s(y)] = 0, \quad \tau^{\pm}_s(y) = u_2[y_s], \\
[q_T] = 0, \quad q^{\pm}_T = u_3[T],
\end{gathered}
\tag{69}
$$

где $u_2 \ge 0$, $u_3 \ge 0$.

При $t=0$ имеем начальное условие (8).

Получена задача (54), (55), (68), (69), (8), (9), состоящая в определении вектора $u=(u_1,u_2,u_3)\in\mathcal{U}=C(\Gamma_{3T}^2)\times C_+(\gamma_T)\times C_+(\gamma_T)$, при котором первая компонента классического решения $Y=(y,T)$ начально-краевой задачи (54), (55), (68), (69), (8) удовлетворяет равенству (9).

Определение 11. При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}$ обобщенным решением начально-краевой задачи (54), (55), (68), (69), (8) называется вектор-функция $Y=(y,T)\in V$, которая $\forall z=(z_1,z_2)\in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$a(u;y,z_1)=l(T;z_1),\quad t\in(0,\overline{T}),\tag{70}$$

$$\left(c\frac{\partial T}{\partial t},z_2\right)+a_1(u;T,z_2)=l_1(u;z_2),\quad t\in(0,\overline{T}),\tag{71}$$

$$(cT,z_2)(0)=(c\overline{T}_0,z_2),\tag{72}$$

где

$$a(u;y,z_1)=\int_\Omega\sum_{i,k,l,m=1}^3 c_{iklm}\,\varepsilon_{lm}(y)\,\varepsilon_{ik}(z_1)dx+\int_\gamma u_2[y_s][z_{1s}]d\gamma,$$

$$a_1(u;T,z_2)=\int_\Omega\sum_{i,j=1}^3 k_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j}\frac{\partial z_2}{\partial x_i}dx+\int_\gamma u_3[T][z_2]d\gamma,$$

$$l(T;z_1)=(\widetilde{f},z_1)+(g,z_1)_{L_2(\Gamma_2^1)}+\int_\Omega\sum_{i,k,l,m=1}^3 c_{iklm}\,\alpha T\delta_{lm}\varepsilon_{ik}(z_1)\,dx,$$

$$l_1(u;z_2)=(\bar{f},z_2)+(g_0,z_2)_{L_2(\Gamma_2^2)}+(u_1,z_2)_{L_2(\Gamma_3^2)}.$$

При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}$ решение $Y=(y,T)$ задачи (70)–(72) существует и единственно в V. Задачу (70)–(72), (10), состоящую в нахождении элемента u, минимизирующего на $\mathcal{U}$ функционал (10) при ограничениях (70)–(72), будем решать с помощью градиентных методов (13). При нахождении $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u\in\mathcal{U}$ определим вектор $\widetilde{Y}=(\widetilde{y},\widetilde{T})$ как элемент множества V, который $\forall z=(z_1,z_2)\in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$a(u_n;\widetilde{y},z_1)=l(\widetilde{T};z_1)-\int_\gamma\Delta u_{2n}[y_s(u_n)][z_{1s}]d\gamma,\ t\in(0,\overline{T}),$$

$$\left(c\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial t},z_2\right)+a_1(u_n;\widetilde{T},z_2)=l_1(u_n;z_2)-$$

$$-\int_\gamma\Delta u_{3n}[T(u_n)][z_2]d\gamma+(\Delta u_{1n},z_2)_{L_2(\Gamma_3^2)},\quad t\in(0,\overline{T}),$$

$$(c\widetilde{T},z_2)(0)=(c\overline{T}_0,z_2).\tag{72$'$}$$

Решение $\widetilde{Y}$ задачи (72′) существует и единственно в V.

Для каждого приближения u_n решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (70)–(72), (10) введем в рассмотрение сопряженную задачу, состоящую в нахождении вектор-функции $Y^*=(\psi,p)\in V_d$, которая $\forall z=(z_1,z_2)\in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$a(u_n;\psi,z_1)=(y(u_n)-f_0,z_1)_{L_2(\gamma_0)},\quad t\in(0,\overline{T}),\tag{73}$$

$$-\left(c\frac{\partial p}{\partial t},z_2\right)+a_1(u_n;p,z_2)-\int_\Omega\sum_{i,k,l,m=1}^3 c_{iklm}\alpha z_2\delta_{lm}\varepsilon_{ik}(\psi)dx=0,\ t\in(0,\overline{T}),\tag{74}$$

$$p\big|_{t=\overline{T}}=0,\quad x\in\overline{\Omega}.\tag{75}$$

Заменив в (73) функцию z_1 разностью $\widetilde{y}-y(u_n)$, а в (74) z_2 — разностью $\widetilde{T}-T(u_n)$, с учетом (70)–(72), (72′), (75) получаем

$$\left\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \right\rangle \approx \int_0^{\overline{T}} (y(u_n)-f_0, \widetilde{y}-y(u_n))_{L_2(\gamma_0)}\,dt = -\int_0^{\overline{T}} \int_\gamma \Delta u_{2n}[y_s(u_n)][\psi_s]\,d\gamma dt -$$

$$-\int_0^{\overline{T}} \int_\gamma \Delta u_{3n}[T(u_n)][p]\,d\gamma dt + \int_0^{\overline{T}} \int_{\Gamma_3^2} \Delta u_{1n}\, p\, d\Gamma_3^2\; dt\,. \tag{76}$$

Следовательно, $J'_{u_n} \approx \widetilde{\psi}_n$, где

$$\widetilde{\psi}_n = \{\widetilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^3,\quad \widetilde{\psi}_n^1 = p\big|_{\Gamma_3^2},\quad \widetilde{\psi}_n^2 = -[y_s(u_n)][\psi_s],$$

$$\widetilde{\psi}_n^3 = -[\overline{T}(u_n)][p],\ \| J'_{u_n}\|^2 \approx \int_0^{\overline{T}} \|\widetilde{\psi}_n^1\|^2_{L_2(\Gamma_3^2)}\,dt + \sum_{i=2}^3 \int_0^{\overline{T}} \|\widetilde{\psi}_n^i\|^2_{L_2(\gamma)}\,dt. \tag{76′}$$

Замечание 8. Если в задаче (70)–(72), (10) u_1 — известная функция, $\mathcal{U}=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$, то на основании (76) имеем $J'_{u_n} \approx \widetilde{\psi}_n$, где

$$\widetilde{\psi}_n = \{\widetilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^2\,,\quad \widetilde{\psi}_n^1 = -\int_0^{\overline{T}}\int_\gamma [y_s(u_n)][\psi_s]\,d\gamma dt\,,\quad \widetilde{\psi}_n^2 = -\int_0^{\overline{T}}\int_\gamma [T(u_n)][p]\,d\gamma dt,$$

$$\| J'_{u_n}\|^2 \approx \sum_{i=1}^2 (\widetilde{\psi}_n^i)^2.$$

Замечание 9. Для всех u_i, $i=\overline{1,3}$, или некоторых из них на основе (76) можно применить параметрический способ идентификации параметров.

Замечание 10. Если кроме γ_0 имеются другие участки, на которых известны смещения или какие-нибудь их составляющие, например $\gamma_i \in \Omega$, $i=\overline{1,N}$, где

$$y=f_i,\quad (x,t)\in\gamma_{iT},\quad i=\overline{1,N},$$

то функционал-невязка имеет вид

$$J(u)=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N}\int_0^{\overline{T}} \| y(u)-f_i\|^2_{L_2(\gamma_i)}\,dt\,. \tag{77}$$

Имеем задачу (70)–(72), (77).

При каждом приближении u_n решения $u\in\mathcal{U}$ сопряженная задача состоит в определении вектора $Y^*=(\psi,p)\in\widetilde{V}_d$, который $\forall z=(z_1,z_2)\in\widetilde{V}_0$ удовлетворяет тождествам

$$a(u_n;\psi,z_1)=\sum_{i=0}^{N}(y(u_n)-f_i, z_1)_{L_2(\gamma_i)}\,,\quad t\in(0,\overline{T})\,,$$

$$-\left(c\frac{\partial p}{\partial t}, z_2\right)+a_1(u_n;p,z_2)-\int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\alpha z_2 \delta_{lm}\varepsilon_{ik}(\psi)\,dx=0\,,\quad t\in(0,\overline{T})\,,$$

$$p\big|_{t=\overline{T}}=0\,,\quad x\in\overline{\Omega}\,. \tag{78}$$

На основании задачи (78) получаем

$$\left\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \right\rangle \approx \sum_{i=0}^{N}\int_0^{\overline{T}} (y(u_n)-f_i, \widetilde{y}-y(u_n))_{L_2(\gamma_i)}\,dt = \left\langle \Delta u_n, \widetilde{\psi}_n \right\rangle,$$

где вектор $\widetilde{\psi}_n$ определен соответствующими выражениями (76′).

Замечание 11. Возможны некоторые другие предположения относительно наблюдений.

9. ОДНОВРЕМЕННАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНОГО РАСШИРЕНИЯ И КОЭФФИЦИЕНТА ЖЕСТКОСТИ НА СДВИГ ПРОСЛОЯ

Пусть на областях Ω_1, Ω_2 определена система термоупругого равновесия (54) и диффузии тепла (55), где $\sigma_{ik}(T;y)\big|_{\overline{\Omega}_j} = \sum_{l,m=1}^{3} c_{iklm}(\varepsilon_{lm}(y) - u_1^j T\delta_{lm})$, u_1^j — коэффициент линейного расширения материала тела $\overline{\Omega}_j$, $u_1 = (u_1^1, u_1^2)$.

На границе Γ_T заданы краевые условия

$$
\begin{gathered}
y = \varphi, \quad (x,t) \in \Gamma_{1T}^1, \\
\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(y) n_j = g_i, \quad i = \overline{1,3}, \quad (x,t) \in \Gamma_{2T}^1, \\
T = \varphi_0, \quad (x,t) \in \Gamma_{1T}^2, \\
\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \cos(n, x_i) = g_0, \quad x \in \Gamma_{2T}^2,
\end{gathered} \tag{79}
$$

где $\Gamma = \Gamma_1^2 \cup \Gamma_2^2$, $\Gamma_1^2 \cap \Gamma_2^2 = \varnothing$.

Считаем, что на участке $\gamma_{0T} \subset \Gamma_{2T}^1$ известны смещения, заданные равенством (9). На участке γ_T условия сопряжения имеют вид

$$
[y_N] = 0, \, [\sigma_N(y)] = 0, \, [\tau_s(y)] = 0, \, \tau_s^{\pm}(y) = u_2[y_s], \, [q_T] = 0, \, q_T^{\pm} = r_1[T], \tag{80}
$$

где $u_2 = \text{const} \geq 0$ неизвестна.

При $t = 0$ задано начальное условие (8).

Получена задача (54), (55), (79), (80), (8), (9), состоящая в определении элемента $u \in \mathcal{U} = (R_+ \times R_+) \times [0, +\infty)$, при котором первая компонента классического решения $Y = (y, T)$ начально-краевой задачи (54), (55), (79), (80), (8) удовлетворяет равенству (9).

Определение 12. При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ обобщенным решением начально-краевой задачи (54), (55), (79), (80), (8) называется вектор-функция $Y = (y, T) \in V$, которая $\forall z = (z_1, z_2) \in V_0$ удовлетворяет тождествам

$$
\begin{gathered}
a(u; y, z_1) = l(u, T; z_1), \quad t \in (0, \overline{T}), \\
\left(c \frac{\partial T}{\partial t}, z_2 \right) + a_1(T, z_2) = l_1(z_2), \quad t \in (0, \overline{T}), \\
(cT, z_2)(0) = (c\overline{T}_0, z_2),
\end{gathered} \tag{81}
$$

где

$$
a(u; y, z_1) = \int_{\Omega} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \varepsilon_{lm}(y) \varepsilon_{ik}(z_1) dx + \int_{\gamma} u_2[y_s][z_{1s}] d\gamma,
$$

$$
a_1(T, z_2) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial z_2}{\partial x_i} dx + \int_{\gamma} r_1[T][z_2] d\gamma,
$$

$$l(u,T;z_1)=(\widetilde{f},z_1)+(g,z_1)_{L_2(\Gamma_2^1)}+\int\limits_{\Omega}\sum_{i,k,l,m=1}^{3}c_{iklm}u_1T\delta_{lm}\varepsilon_{ik}(z_1)\,dx\,,$$

$$l_1(z_2)=(\bar{f},z_2)+(g_0,\ z_2)_{L_2(\Gamma_2^2)}\,.$$

Задачу (81), (10) будем решать с помощью градиентных методов (13). При нахождении $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (81), (10) определим вектор $\widetilde{Y}=(\widetilde{y},T)$ как элемент множества V, который $\forall z=(z_1,z_2)\in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$a(u_n;\widetilde{y},z_1)=l(u_n,T;z_1)-\int\limits_{\gamma}\Delta u_{2n}[y_s(u_n)][z_{1s}]d\gamma+$$

$$+\int\limits_{\Omega}\sum_{i,k,l,m=1}^{3}c_{iklm}\ \Delta u_{1n}T\ \delta_{lm}\varepsilon_{ik}(z_1)\,dx,\quad t\in(0,\bar{T})\,,$$

$$\left(c\frac{\partial T}{\partial t},z_2\right)+a_1(T,z_2)=l_1(\,z_2)\,,\quad t\in(0,\bar{T})\,,\tag{82}$$

$$(cT,z_2)(0)=(c\overline{T}_0,z_2)\,.$$

Для каждого приближения u_n искомого решения $u\in\mathcal{U}$ введем в рассмотрение сопряженную задачу, состоящую в нахождении функции $\psi\in\overline{V}_1^{\,0}=\{\,v(x,t):$ $v\big|_{\Omega_i}\in(W_2^1(\Omega_i))^3$, $i=1,2$, $v\big|_{\Gamma_1^1}=0$, $[v_N]\big|_{\gamma}=0$, $\forall t\in[0,\bar{T}]\}$, которая $\forall z_1\in V_1^{\,0}=$ $=\{\,v(x):\ v\big|_{\Omega_i}\in(W_2^1(\Omega_i))^3$, $i=1,2$, $v\big|_{\Gamma_1^1}=0$, $[v_N]\big|_{\gamma}=0\}$ удовлетворяет тождеству

$$a(\,u_n;\psi,z_1)=(\,y(u_n)-f_0,z_1)_{L_2(\gamma_0)}\,.\tag{83}$$

Выбирая в тождестве (83) вместо функции z_1 разность $\widetilde{y}-y(u_n)$, с учетом (81), (82) имеем

$$\left\langle J'_{u_n},\Delta u_n\right\rangle\approx\int\limits_0^{\bar{T}}(\,y(u_n)-f_0,\ \widetilde{y}-y(u_n))_{L_2(\gamma_0)}\,dt=-\int\limits_0^{\bar{T}}\Delta u_{2n}[y_s(u_n)][\psi_s]+$$

$$+\int\limits_0^{\bar{T}}\int\limits_{\Omega}\sum_{i,k,l,m=1}^{3}c_{iklm}\Delta u_{1n}T\delta_{lm}\varepsilon_{ik}(\psi)\,dxdt.\tag{84}$$

Следовательно, $J'_{u_n}=\widetilde{\psi}_n$, где $\widetilde{\psi}_n=\{\widetilde{\psi}_n^{\,i}\}_{i=1}^2$, $\widetilde{\psi}_n^{\,1}=\{\widetilde{\psi}_{n_i}^{\,1}\}_{i=1}^2$,

$$\widetilde{\psi}_{n_j}^{\,1}=\int\limits_0^{T}\int\limits_{\Omega_j}\sum_{i,k,l,m=1}^{3}c_{iklm}T\delta_{lm}\varepsilon_{ik}(\psi)\,dxdt,\quad\widetilde{\psi}_n^{\,2}=-\int\limits_0^{\bar{T}}\int\limits_{\gamma}[y_s(u_n)][\psi_s]d\gamma\ dt\,,$$

$$\|J'_{u_n}\|^2\approx\sum_{j=1}^{2}(\widetilde{\psi}_{n_j}^{\,1})^2+(\widetilde{\psi}_n^{\,2})^2\,.$$

Замечание 12. Выражение (84) позволяет определить приближение градиента J'_{u_n} для случая переменного параметра $u_2=u_2(x,t)\big|_{\gamma_T}$, переменных u_1^j на Ω_{jT} , $j=1,2$, а также для случаев их параметрического определения, например, если $u_2=u_2(x,t)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(t)\varphi_i(x)$, где $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^m$ — система линейно независимых функций, то $\widetilde{\psi}_n = \{\widetilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^2$, $\widetilde{\psi}_n^1 = \{\widetilde{\psi}_{n_i}^1\}_{i=1}^2$, $\widetilde{\psi}_n^2 = \{\widetilde{\psi}_{n_j}^2\}_{j=1}^m$, $\widetilde{\psi}_{n_j}^2 =$

$$= -\int_\gamma \varphi_j [y_s(u_n)][\psi_s] d\gamma\,, \qquad \widetilde{\psi}_{n_j}^1 = \int_0^T \int_{\Omega_j} \sum_{i,k,l,m=1}^3 c_{iklm} T \delta_{lm} \varepsilon_{ik}(\psi)\, d\Omega_j dt, \qquad j = 1,\ 2,$$

$$\| J'_{u_n} \|^2 \approx \sum_{j=1}^2 (\widetilde{\psi}_{n_j}^1)^2 + \sum_{j=1}^m \int_0^T (\widetilde{\psi}_{n_j}^2)^2 dt\,.$$

10. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПО ЗАДАННЫМ СМЕЩЕНИЯМ (НЕОДНОРОДНЫЕ СМЕШАННЫЕ УСЛОВИЯ СОПРЯЖЕНИЯ)

Пусть на ограниченных связных строго липшицевых областях Ω_1, $\Omega_2 \in R^3$ $\forall t \in (0, \overline{T})$ определена система уравнений термоупругого равновесия

$$-\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}(y)}{\partial x_k} = \widetilde{f}_i\,, \quad i = \overline{1,3}\,, \tag{85}$$

где $\sigma_{ik}(y) = \sigma_{ik}(T; y) = \sum_{l,m=1}^3 c_{iklm}(\varepsilon_{lm}(y) - \varepsilon_{lm}^0)$.

Изменение температуры T удовлетворяет уравнению

$$c\frac{\partial T}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \bar{f}\,, \quad (x,t) \in \Omega_T\,. \tag{86}$$

На границе $\Gamma_T = ((\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) \setminus \gamma) \times (0, \overline{T})$ заданы краевые условия

$$\begin{gathered} y = \varphi\,, \quad (x,t) \in \Gamma_{1T}^1\,, \\ \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(y) n_j = g_i\,, \quad i = \overline{1,3}\,,\ (x,t) \in \Gamma_{2T}^1\,, \\ T = \varphi_0\,, \quad (x,t) \in \Gamma_{1T}^2\,, \\ \sum_{i,j=1}^3 k_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j}\cos(n, x_i) = -\overline{\alpha} T + \beta\,, \quad (x,t) \in \Gamma_{2T}^2\,, \\ \sum_{i,j=1}^3 k_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j}\cos(n, x_i) = u(x,t)\,, \quad (x,t) \in \Gamma_{3T}^2\,, \end{gathered} \tag{87}$$

где $\overline{\alpha} \in C(\Gamma_2^2)$, $\overline{\alpha} \ge \alpha_0 = \mathrm{const} > 0$, $\beta \in C(\Gamma_{2T}^2)$.

При $t = 0$ задано начальное условие (57). Считаем, что на участке $\gamma_{0T} \subset \Gamma_{2T}^1$ известны смещения, заданные равенством вида (9).

На участке γ, разделяющем тело Ω на две составляющие — $\overline{\Omega}_1, \overline{\Omega}_2$, $\forall t \in (0, \overline{T})$ условия сопряжения расклинивающего давления имеют следующий вид [11]:

$$\begin{gathered} [y_N] = \delta\,, \quad \sigma_{N_0} = -\overline{p}\,, \quad (x,t) \in \gamma_T^-\,, \quad (x,t) \in \gamma_T^+\,, \\ [\tau_s(y)] = 0\,, \quad \tau_s^{\pm} = r[y_s]\,, \quad (x,t) \in \gamma_T\,, \end{gathered} \tag{88}$$

где N_0 — внешняя нормаль к $\partial\Omega_i$, $i = 1, 2$, $\delta \in C(\gamma_T)$ — заданная функция.

Влияние составного слабопроницаемого включения γ на температурное состояние тела $\overline{\Omega}$ $\forall t \in (0, \overline{T})$ учитываем условиями

$$R_1 q_T^- + R_2 q_T^+ = [T]\,, \qquad [q_T] = \omega\,. \tag{89}$$

Получена задача (85)–(89), (57), (9), состоящая в определении функции $u \in \mathcal{U} = C(\Gamma_{3T}^2)$, при которой первая компонента y классического решения $Y = (y, T)$ начально-краевой задачи (85)–(89), (57) удовлетворяет равенству (9). Функционал-невязка имеет вид (10). Вместо классического решения начально-краевой задачи (85)–(89), (57) будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 13. При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ обобщенным решением начально-краевой задачи (85)–(89), (57) называется вектор-функция $Y = (y, T) \in V$, которая $\forall z = (z_1, z_2) \in V_0$ удовлетворяет тождествам

$$\begin{gathered} a\,(y, z_1) = l\,(T; z_1)\,, \quad t \in (0, T)\,, \\ \left(c\,\frac{\partial T}{\partial t}, z_2 \right) + a_1\,(T, z_2) = l_1\,(u; z_2)\,, \quad t \in (0, T)\,, \\ (cT, z_2)(0) = (c\overline{T}_0, z_2)\,, \end{gathered} \tag{90}$$

где

$$V = \{ v = (v_1(x, t), v_2(x, t)) :\ v_1|_{\Omega_i} \in (W_2^1(\Omega_i))^3\,,$$

$$[v_{1N}] = \delta\,,\ v_1\big|_{\Gamma_1^1} = \varphi,\ \ v_2\big|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i),\ i = 1, 2\,,\ v_2\big|_{\Gamma_1^2} = \varphi_0,\ t \in (0, \overline{T}) \}\,,$$

$$V_0 = \{ z = (z_1, z_2) :\ z_1\big|_{\Omega_i} \in (W_2^1(\Omega_i))^3,\ \ z_2\big|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i)\,,\ i = 1, 2\,;$$

$$[z_{1N}] = 0\,,\ z_1\big|_{\Gamma_1^1} = 0\,,\ z_2\big|_{\Gamma_1^2} = 0 \},$$

$$a\,(y, z_1) = \int_{\Omega} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\,\varepsilon_{lm}(y)\,\varepsilon_{ik}(z_1)\,dx + \int_{\gamma} r\,[y_s][z_{1s}]\,d\gamma\,,$$

$$a_1(T, z_2) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}\,\frac{\partial T}{\partial x_j}\,\frac{\partial z_2}{\partial x_i}\,dx + \frac{1}{R_1 + R_2} \int_{\gamma} [T][z_2]\,d\gamma + \int_{\Gamma_2^2} \overline{\alpha} T z_2\,d\Gamma_2^2\,,$$

$$l\,(T; z_1) = (\widetilde{f}, z_1) + (g, z_1)_{L_2(\Gamma_2^1)} + \int_{\Omega} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\,\alpha T \delta_{lm}\,\varepsilon_{ik}(z_1)\,dx - 2\int_{\gamma} \overline{p} z_{1N}\,d\gamma,$$

$$l_2\,(u; z_2) = (\bar{f}, z_2) + (\beta, z_2)_{L_2(\Gamma_2^2)} + (u, z_2)_{L_2(\Gamma_3^2)} + \int_{\gamma} \frac{R_2\omega}{R_1 + R_2}[z_2]\,d\gamma - \int_{\gamma} \omega z_2^{+}\,d\gamma.$$

Задачу (90), (10) будем решать с помощью градиентных методов (13). Для каждого приближения u_n решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (90), (10) введем в рассмотрение следующую сопряженную задачу:

$$\begin{gathered} -\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}(\psi)}{\partial x_k} = 0\,,\ (x, t) \in \Omega_T\,, \\ \psi\,\Big|_{\Gamma_{1T}^1} = 0\,,\ \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi)\,n_j = 0\,,\ \ i = \overline{1, 3}\,,\ \ x \in \Gamma_2^1 \setminus \gamma_0,\ \ t \in (0, \overline{T})\,, \\ \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi) n_j = y_i(u_n) - f_{0i}\,,\ \ i = \overline{1, 3}\,,\ \ (x, t) \in \gamma_{0T}\,, \\ [\psi_N] = 0\,,\ \sigma_{N_0}(\psi) = 0\,,\ [\tau_s(\psi)] = 0\,,\ \tau_s^{\pm}(\psi) = r[\psi_s]\,,\ (x, t) \in \gamma_T\,, \\ -c\,\frac{\partial p}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\,\frac{\partial p}{\partial x_j} \right) - \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\,\alpha \delta_{lm}\,\varepsilon_{ik}(\psi) = 0\,,\ \ (x, t) \in \Omega_T\,, \end{gathered} \tag{91}$$

$$p\Big|_{\Gamma^2_{1T}}=0\,,\ \left[\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\cos(n,x_i)\right]\Bigg|_{\gamma_T}=0\,,$$

$$\left\{\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\cos(n,x_i)\right\}^{\pm}=\frac{1}{R_1+R_2}[p],\quad (x,t)\in\gamma_T\,,$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\cos(n,x_i)=-\overline{\alpha}p\,,\quad (x,t)\in\Gamma^2_{2T}\,,$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\cos(n,x_i)=0\,,\quad (x,t)\in\Gamma^2_{3T}\,,$$

$$p\Big|_{t=\overline{T}}=0\,,\quad x\in\overline{\Omega}\,,$$

где $\sigma_{ij}(\psi)=\sum\limits_{l,m=1}^{3} c_{ijlm}\varepsilon_{lm}(\psi)$.

Определение 14. Обобщенным решением начально-краевой задачи (91) называется вектор-функция $Y^*=(\psi,\ p)\in V_d$, которая $\forall z=(z_1,z_2)\in V_0$ удовлетворяет тождествам

$$a(\psi,z_1)=(y(u_n)-f_0,z_1)_{L_2(\gamma_0)},\quad t\in(0,\overline{T})\,,$$

$$-\left(c\frac{\partial p}{\partial t},z_2\right)-\int\limits_{\Omega}\sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\alpha\delta_{lm}\varepsilon_{ik}(\psi)z_2\,dx=0\,,\quad t\in(0,\overline{T})\,, \tag{92}$$

$$(cp,z_2)(\overline{T})=0\,.$$

Заменив в (92) функцию z_1 разностью $y(u_{n+1})-y(u_n)$, а z_2 — разностью $T(u_{n+1})-T(u_n)$, с учетом (90), (92) получаем

$$\left\langle J'_{u_n},\Delta u_n\right\rangle=\int\limits_0^{\overline{T}}(y(u_n)-f_0\,,\ y(u_{n+1})-y(u_n))_{L_2(\gamma_0)}\,dt=\int\limits_0^{\overline{T}}(\Delta u_n,\,p)_{L_2(\Gamma_3^2)}\,dt\,.$$

Следовательно, $J'_{u_n}=\widetilde{\psi}_n$, где $\widetilde{\psi}_n=p\big|_{\Gamma_3^2}$, $\|J'_{u_n}\|^2=\int\limits_0^{\overline{T}}\int\limits_{\Gamma_3^2}\widetilde{\psi}_n^2\,d\Gamma_3^2\,dt$.

11. ОДНОВРЕМЕННАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПЛОТНОСТИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА И МОЩНОСТИ ПОТОКА ТЕПЛА НА γ

Пусть на области $\Omega_T=\Omega_{1T}\cup\Omega_{2T}$ определена система термоупругого равновесия (85) и диффузии тепла (86). На границе Γ_T заданы краевые условия:

$$\begin{gathered}
y=\varphi\,,\ (x,t)\in\Gamma^1_{1T}\,,\\
\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(y)\,n_j=g_i\,,\quad i=\overline{1,3}\,,\ (x,t)\in\Gamma^1_{2T}\,,\\
T=\varphi_0\,,\ (x,t)\in\Gamma^2_{1T}\,,\\
\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j}\cos(n,x_i)=-\overline{\alpha}T+\beta\,,\quad (x,t)\in\Gamma^2_{2T}\,,\\
\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j}\cos(n,x_i)=u_1(x,t)\,,\quad (x,t)\in\Gamma^2_{3T}\,.
\end{gathered} \tag{93}$$

При $t=0$ имеем начальное условие

$$T(x,0)=\bar{T}_0(x)\,,\quad x\in\bar{\Omega}_1\cup\bar{\Omega}_2\,. \tag{94}$$

Считаем, что на участке $\gamma_{0T}\subset\Gamma_{2T}^1$ известны смещения, заданные равенством (9). На участке γ, разделяющем тело Ω на две составляющие — Ω_1,Ω_2, при $t\in(0,\bar{T})$ условия сопряжения заданы выражениями (88) и ограничениями

$$R_1q_T^- + R_2q_T^+ = [T]\,,\quad (x,t)\in\gamma_T\,,$$

$$[q_T]=u_2(x,t)\,,\quad (x,t)\in\gamma_T\,. \tag{95}$$

Получена задача (85), (86), (88), (93)–(95), (9), состоящая в определении вектора $u=(u_1,u_2)\in\ \mathcal{U}=C(\Gamma_{3T}^2)\times C(\gamma_T)$, при котором первая компонента y классического решения $Y=(y,T)$ начально-краевой задачи (85), (86), (88), (93)–(95) удовлетворяет равенству (9).

Определение 15. Обобщенным решением начально-краевой задачи (85), (86), (88), (93)–(95) называется вектор-функция $Y=(y,T)\in V$, которая $\forall z=(z_1(x),z_2(x))\in V_0$ удовлетворяет тождествам

$$a\,(y,z_1)=l\,(T;z_1)\,,\quad t\in(0,\bar{T})\,,$$

$$\left(c\,\frac{\partial T}{\partial t},\,z_2\right)+a_1\,(T,z_2)=l_1\,(u;z_2)\,,\quad t\in(0,\bar{T})\,, \tag{96}$$

$$(cT,z_2)(0)=(c\bar{T}_0,z_2)\,,$$

где формы $a(\cdot,\cdot)$, $a_1(\cdot,\cdot)$, $l(T;\cdot)$ и множества V, V_0 определены в разд. 10,

$$l_1(u;z_2)=(\bar{f},z_2)+(\beta,z_2)_{L_2(\Gamma_2^2)}+(u_1,z_2)_{L_2(\Gamma_3^2)}+\int_\gamma\frac{R_2u_2}{R_1+R_2}[z_2]\,d\gamma-\int_\gamma u_2z_2^+\,d\gamma.$$

Для каждого приближения u_n решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (96), (10) сопряженная задача имеет вид (91), а соответствующая ей обобщенная — вид (92). На основании (92) с учетом (96) получаем

$$\left\langle J'_{u_n},\Delta u_n\right\rangle=\int_0^{\bar{T}}(y(u_n)-f_0\,,\;y(u_{n+1})-y(u_n))_{L_2(\gamma_0)}\,dt=$$

$$=\int_0^{\bar{T}}(\Delta u_{1n},p)_{L_2(\Gamma_3^2)}dt+\int_0^{\bar{T}}\int_\gamma\frac{R_2\Delta u_{2n}}{R_1+R_2}[p]\,d\gamma dt-$$

$$-\int_0^{\bar{T}}\int_\gamma\Delta u_{2n}p^+\,d\gamma dt=\int_0^{\bar{T}}(\Delta u_{1n},p)_{L_2(\Gamma_3^2)}dt-\int_0^{\bar{T}}\int_\gamma\Delta u_{2n}\,\frac{R_1p^++R_2p^-}{R_1+R_2}\,d\gamma dt\,.$$

Следовательно, $J'_{u_n}=\tilde{\psi}_n$, где $\tilde{\psi}_n=(\tilde{\psi}_n^1,\tilde{\psi}_n^2)$, $\tilde{\psi}_n^1=p\big|_{\Gamma_3^2}$, $\tilde{\psi}_n^2=-\left.\dfrac{R_1p^++R_2p^-}{R_1+R_2}\right|_{\gamma_T}$, $\|J'_{u_n}\|^2=\int_0^{\bar{T}}\int_{\Gamma_3^2}(\tilde{\psi}_n^1)^2d\Gamma_3^2dt+\int_0^{\bar{T}}\int_\gamma(\tilde{\psi}_n^2)^2d\gamma dt$. Если $\mathcal{U}=$ $=C(\Gamma_3^2)\times R^1$, то $\tilde{\psi}_n^1=\int_0^{\bar{T}}p\big|_{\Gamma_3^2}dt$, $\tilde{\psi}_n^2=-\int_0^{\bar{T}}\int_\gamma\dfrac{R_1p^++R_2p^-}{R_1+R_2}\,d\gamma dt$, $\|J'_{u_n}\|^2=$ $=\int_{\Gamma_3^2}(\tilde{\psi}_n^1)^2d\Gamma_3^2+(\tilde{\psi}_n^2)^2$.

12. ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕРМИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ И РАСКЛИНИВАЮЩЕГО ДАВЛЕНИЯ

Пусть на области $\Omega_T = \Omega_{1T} \cup \Omega_{2T}$ определена система термоупругого равновесия (85) и диффузии тепла (86). На границе Γ_T заданы краевые условия (93). Начальное условие имеет вид (94). Считаем, что на участке γ_{0T} известны смещения, заданные равенством (9). На участке γ, разделяющем тело $\overline{\Omega}$ на две составляющие — $\overline{\Omega}_1, \overline{\Omega}_2$, $\forall t \in (0, \overline{T})$ условия сопряжения имеют вид

$$[y_N] = \delta, \quad \sigma_{N_0}(y) = -u_2,$$
$$[\tau_s(y)] = 0, \quad \tau_s^{\pm}(y) = r[y_s], \tag{97}$$

$$u_3 q_T^- + u_4 q_T^+ = [T],$$
$$[q_T] = \omega.$$

Получена задача (85), (86), (93), (94), (97), (9), состоящая в определении вектора $u = \{u_i\}_{i=1}^4 \in \mathcal{U} = C(\Gamma_{3T}^2) \times C_+(\gamma_T) \times R_+ \times R_+$, при котором первая компонента y классического решения $Y = (y, T)$ начально-краевой задачи (85), (86), (93), (94), (97) удовлетворяет равенству (9), где $C_+(\gamma_T) = \{v(x,t) \in C(\gamma_T) : v \geq 0\}$.

Определение 16. При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ обобщенным решением начально-краевой задачи (85), (86), (93), (94), (97) называется вектор-функция $Y = (y, T) \in V$, которая $\forall z = (z_1, z_2) \in V_0$ удовлетворяет тождествам

$$a(y, z_1) = l(u, T; z_1), \quad t \in (0, \overline{T}),$$
$$-\left(c\frac{\partial p}{\partial t}, z_2 \right) + a_1(u; T, z_2) = l_1(z_2), \quad t \in (0, \overline{T}), \tag{98}$$

$$(cT, z_2)(0) = (c\overline{T}_0, z_2),$$

где множества V, V_0 определены в разд. 10,

$$a(y, z_1) = \int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^3 c_{iklm} \varepsilon_{lm}(y) \varepsilon_{ik}(z_1)\, dx + \int_\gamma r[y_s][z_{1s}] d\gamma,$$

$$a_1(u; T, z_2) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial z_2}{\partial x_i}\, dx + \frac{1}{u_3 + u_4} \int_\gamma [T][z_2] d\gamma + \int_{\Gamma_2^2} \overline{\alpha} T z_2 d\Gamma_2^2,$$

$$l(u, T; z_1) = (\widetilde{f}, z_1) + (g, z_1)_{L_2(\Gamma_2^1)} + \int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^3 c_{iklm} \alpha T \delta_{lm} \varepsilon_{ik}(z_1)\, dx - 2\int_\gamma u_2 z_{1N}\, d\gamma,$$

$$l_1(u; z_2) = (\bar{f}, z_2) + (\beta, z_2)_{L_2(\Gamma_2^2)} + (u_1, z_2)_{L_2(\Gamma_3^2)} + \int_\gamma \frac{u_4 \omega}{u_3 + u_4} [z_2] d\gamma - \int_\gamma \omega z_2^+\, d\gamma.$$

При определении $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (98), (10) введем в рассмотрение вектор-функцию $\widetilde{Y} = (\widetilde{y}, \widetilde{T})$, являющуюся классическим решением начально-краевой задачи, заданной системой уравнений

$$-\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}(\tilde{y})}{\partial x_k} = \tilde{f}_i, \quad i = \overline{1,3}, \quad (x, t) \in \Omega_T,$$

$$c \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right) = \bar{f}, \quad (x, t) \in \Omega_T,$$

$$\tilde{y} = \varphi, \quad (x, t) \in \Gamma_{1T}^1,$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\tilde{y}) n_j = g_i, \quad i = \overline{1,3}, \quad (x, t) \in \Gamma_{2T}^1, \tag{99}$$

$$\tilde{T} = \varphi_0, \quad (x, t) \in \Gamma_{1T}^2,$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \cos(n, x_i) = -\overline{\alpha} \tilde{T} + \beta, \quad (x, t) \in \Gamma_{2T}^2,$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \cos(n, x_i) = u_{1n} + \Delta u_{1n}, \quad (x, t) \in \Gamma_{3T}^2,$$

$$[\tilde{y}_N] = \delta, \quad \sigma_{N_0}(\tilde{y}) = -(u_{2n} + \Delta u_{2n}), \quad (x, t) \in \gamma_T,$$

$$[\tau_s(\tilde{y})] = 0, \quad \tau_s^{\pm}(\tilde{y}) = r[\tilde{y}_s], \quad (x, t) \in \gamma_T,$$

$$u_{3n} q_{\tilde{T}}^- + u_{4n} q_{\tilde{T}}^+ = [\tilde{T}] - \Delta u_{3n} q_T^- - \Delta u_{4n} q_T^+, \quad (x, t) \in \gamma_T,$$

$$[q_{\tilde{T}}] = \omega, \quad (x, t) \in \gamma_T,$$

где

$$\sigma_{ik}(\tilde{y}) = \sigma_{ik}(\tilde{T}, \tilde{y}; x) = \sum_{l,m=1}^{3} c_{iklm} (\varepsilon_{lm}(\tilde{y}) - \alpha \tilde{T} \delta_{lm}),$$

$$q_T = \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial T(u_n)}{\partial x_j} \cos(n, x_i).$$

Определение 17. Обобщенным решением начально-краевой задачи (99) называется вектор-функция $\tilde{Y} = (\tilde{y}, \tilde{T}) \in V$, которая $\forall z = (z_1, z_2) \in V_0$ удовлетворяет тождествам

$$a(\tilde{y}, z_1) = l(u_n, \tilde{T}; z_1) - 2\int_{\gamma} \Delta u_{2n} z_{1N} \, d\gamma,$$

$$-\left(c \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t}, z_2 \right) + a_1(u_n; \tilde{T}, z_2) = \tag{100}$$

$$= l_1(u_n; z_2) + \int_{\gamma} \frac{\Delta u_{3n} q_T^- + \Delta u_{4n} q_T^+}{u_{3n} + u_{4n}} [p] \, d\gamma + (\Delta u_{1n}, z_2)_{L_2(\Gamma_3^2)},$$

$$(c\tilde{T}, z_2)(0) = (c\overline{T}_0, z_2),$$

где множества V, V_0 определены в разд. 10.

Для каждого приближения u_n решения $u \in \mathcal{U}$ сопряженная задача имеет вид

$$-\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}(\psi)}{\partial x_k} = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad (x, t) \in \Omega_T,$$

$$-c\frac{\partial p}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\right) - \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\,\alpha\delta_{lm}\varepsilon_{ik}(\psi) = 0, \quad (x, t) \in \Omega_T,$$

$$\psi\big|_{\Gamma_{1T}^1} = 0, \quad \sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(\psi)\, n_j = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \Gamma_2^1 \setminus \gamma_0, \quad t \in (0, T),$$

$$\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(\psi) n_j = y_i(u_n) - f_{0i}, \quad i = \overline{1,3}, \quad (x, t) \in \gamma_{0T},$$

$$p\big|_{\Gamma_{1T}^2} = 0, \quad \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\cos(n, x_i) = -\overline{\alpha}p, \quad (x, t) \in \Gamma_{2T}^2,$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\cos(n, x_i) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_{3T}^2, \tag{101}$$

$$[\psi_N] = 0, \quad \{\sigma_{N_0}(\psi)\}^{\pm} = 0, \quad (x, t) \in \gamma_T,$$

$$[\tau_s(\psi)] = 0, \quad \tau_s^{\pm}(\psi) = r[\psi_s], \quad (x, t) \in \gamma_T,$$

$$[q_p] = 0, \quad q_p^{\pm} = \frac{1}{u_{1n} + u_{2n}}[p], \quad (x, t) \in \gamma_T,$$

$$p\big|_{t=\overline{T}} = 0, \quad x \in \overline{\Omega},$$

где $\sigma_{ij}(\psi) = \sum_{l,m=1}^{3} c_{ijlm}\varepsilon_{lm}(\psi)$.

Определение 18. Обобщенным решением начально-краевой задачи (101) называется вектор-функция $Y^* = (\psi, p) \in V_d$, которая $\forall z = (z_1, z_2) \in V_0$ удовлетворяет тождествам

$$a(\psi, z_1) = (y(u_n) - f_0, z_1)_{L_2(\gamma_0)}, \quad t \in (0, \overline{T}),$$

$$-\left(c\frac{\partial p}{\partial t}, z_2\right) + a(u_n; p, z_2) -$$

$$-\int_{\Omega}\sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\,\alpha\delta_{lm}\varepsilon_{ik}(\psi)\, z_2\, dx = 0, \qquad t \in (0, \overline{T}), \tag{102}$$

$$(cp, z_2)(\overline{T}) = 0.$$

На основании задачи (102) с учетом (100), (98) получаем

$$\left\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \right\rangle \approx \int_0^{\overline{T}} (y(u_n) - f_0,\ \tilde{y}(u_{n+1}) - y(u_n))_{L_2(\gamma_0)}\, dt =$$

$$= -2\int_0^{\overline{T}}\int_{\gamma} \Delta u_{2n}\psi_N\, d\gamma dt + \int_0^{\overline{T}}\int_{\gamma} \frac{\Delta u_{3n} q_T^- + \Delta u_{4n} q_T^+}{u_{3n} + u_{4n}}[p]\, d\gamma dt + \int_0^{\overline{T}} (\Delta u_{1n} p)_{L_2(\Gamma_3^2)}\, dt.$$

Следовательно, $J'_{u_n} = \widetilde{\psi}_n$ где

$$\widetilde{\psi}_n = \{\widetilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^4, \quad \widetilde{\psi}_n^1 = p\Big|_{\Gamma_{3T}^2}, \; \widetilde{\psi}_n^2 = -2\psi_N\Big|_{\gamma_T}, \quad \widetilde{\psi}_n^3 = \int_0^{\bar{T}}\int_\gamma q_T^-[p]/(u_{3n}+u_{4n})\,d\gamma dt,$$

$$\widetilde{\psi}_n^4 = \int_0^{\bar{T}}\int_\gamma q_T^+[p]/(u_{3n}+u_{4n})\,d\gamma dt,$$

$$\| J'_{u_n} \|^2 \approx \int_0^{\bar{T}}\int_{\Gamma_3^2} (\widetilde{\psi}_n^1)^2 d\Gamma_3^2 dt + \int_0^{\bar{T}}\int_\gamma (\widetilde{\psi}_n^2)^2 d\gamma dt + \sum_{i=3}^4 (\widetilde{\psi}_n^i)^2 .$$

Наличие приближения $\widetilde{\psi}_n$ градиента J'_{u_n} позволяет использовать градиентные методы (13) для определения $(n+1)$-го приближения решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (98), (10).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Идентификация параметров динамической задачи теории упругости тела с включением // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 3. — С. 75–97.
2. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Идентификация параметров квазистационарных задач термоупругости // Там же. — 2010. — № 2. — С. 59–80.
3. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. — Киев: Наук. думка, 2003. — 506 с.
4. Sergienko I.V., Deineka V.S. Optimal control of distributed systems with conjugation conditions. — New York: Kluwer Acad. Publ., 2005. — 400 p.
5. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1988. — 288 с.
6. Коваленко А.Д. Термоупругость. — Киев: Вища шк., 1975. — 216 с.
7. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение граничных обратных задач теплопроводности для составного стержня // Проблемы управления и информатики. — 2007. — № 2. — С. 75–97.
8. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение комплексных обратных задач термоупругости // Там же. — 2007. — № 5. — С. 64–87.
9. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Системный анализ многокомпонентных распределенных систем. — Киев: Наук. думка, 2009. — 640 с.
10. Мотовиловец И.А., Козлов В.И. Механика связанных полей в элементах конструкций. — Киев: Наук. думка, 1987. — Т. 1. — 264 с.
11. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. К определению осесимметричного напряженного состояния составного тела при расклинивающем давлении // Приклад. механика. — 1999. — **35**, № 1. — С. 50–57.

Поступила 27.01.2010