СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

И.В. СЕРГИЕНКО, А.А. ЧИКРИЙ

УДК 517.977

# О РАЗВИТИИ НАУЧНЫХ ИДЕЙ Б.Н. ПШЕНИЧНОГО В ОБЛАСТИ ОПТИМИЗАЦИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ[1]

**Ключевые слова:** *оптимизация, метод линеаризации, производная по направлению, многозначные отображения, выпуклый анализ, необходимые условия экстремума, дифференциальные игры, дельта-функция Дирака, функционал Минковского, интеграл Аумана, условие Понтрягина, формула Коши, обобщенная матричная функция Миттаг–Леффлера, дробная производная Римана–Лиувилля*.

В этом году исполнилось бы 75 лет всемирно известному украинскому ученому, специалисту в области математики и кибернетики академику НАН Украины Б.Н. Пшеничному.

Борис Николаевич Пшеничный закончил Львовский университет имени Ивана Франко, механико-математический факультет, и большую часть жизни работал в Киеве в Институте кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины. Круг научных интересов Б.Н. Пшеничного необычайно широк. Это проблемы проектирования сетей и теория графов, вычислительные методы оптимизации и теория оптимального управления, выпуклый анализ и необходимые условия экстремума, многозначные отображения и дифференциальные включения, теория динамических игр и задачи поиска движущихся объектов, модели экономической динамики, построение инвариантных множеств динамических систем, минимаксное оценивание параметров, решение вариационных неравенств, методы укладки геометрических фигур. В работе [1] дается подробный обзор научного наследия Бориса Николаевича, освещаются разнообразные стороны его научной деятельности и исследования представителей его школы. Отметим, что Б.Н. Пшеничный написал около 200 статей и 8 монографий, подготовил свыше 50 кандидатов и 8 докторов наук. За выдающуюся научную и организаторскую деятельность ученый был удостоен Государственных премий СССР и Украины.

Цель настоящей статьи — проследить развитие основополагающих идей и методов Б.Н. Пшеничного сегодня в работах его учеников, коллег и последователей. Выполнение поставленной задачи в полном объеме является сложной проблемой. Однако освещение хотя бы некоторых работ дает представление о большом вкладе известного ученого и его влиянии на развитие современной науки.

---

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке украинско-российского гранта ДФФД-Ф 40.1/021.

## 1. ОБОБЩЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

Б.Н. Пшеничный один из первых ввел в обращение и эффективно работал с такими понятиями в анализе, как производная по направлению, субдифференциал и субградиент выпуклой функции. Эти понятия дали возможность получить необходимые условия экстремума для широких классов задач оптимизации и управления, обобщая, в частности, правило множителей Лагранжа. Результаты ученого в этом направлении тесно связаны с теорией Милютина–Дубовицкого, работами Л. Нейштадта, Х. Халкина. С единых позиций были изучены задача оптимального управления с фазовыми ограничениями, дискретный принцип максимума (в тесной связи с работами А.И. Пропоя), задачи чебышевского приближения, доказаны теоремы о минимаксе, даны критерии разрешимости систем неравенств и установлена их связь с проблемой моментов.

Известно, что в окрестности точки минимума гладкие функции хорошо аппроксимируются линейными, а выпуклые — производными по направлению, в то время как негладкие и невыпуклые функции не обладают столь привлекательными свойствами. Выход из этой достаточно сложной ситуации Б.Н. Пшеничный предложил в виде понятия верхней выпуклой аппроксимации [3]. Отметим, что верхняя выпуклая аппроксимация определяется неоднозначно, и для получения содержательных условий экстремума необходимо знать достаточно широкое семейство верхних выпуклых аппроксимаций. На этой основе с привлечением аппарата конусов касательных направлений и понятия локального шатра Болтянского Борису Николаевичу удалось сформулировать общие необходимые условия для негладких и невыпуклых функций, а с их помощью — необходимые условия оптимальности в конкретных задачах [2, 3].

Как было сказано, локальные свойства дифференцируемых функций достаточно хорошо могут быть описаны с помощью понятия производной и связанного с этим понятия градиента функции. Для выпуклых функций понятие градиента заменяется субдифференциалом. В случае многозначных отображений в аналогичной роли выступает локально сопряженное отображение, введенное впервые Б.Н. Пшеничным [4]. Оно позволило сформулировать теорему двойственности для выпуклых многозначных отображений, из которой следуют многие факты выпуклого анализа и теории экстремальных задач, в частности теорема Фенхеля–Моро о равенстве выпуклой замкнутой собственной функции своей дважды сопряженной, теорема о минимаксе. Локально сопряженное отображение обладает рядом удобных свойств и позволяет, в частности, сформулировать необходимые условия экстремума в задачах оптимизации с ограничениями, задаваемыми многозначными отображениями, и для дифференциальных включений. По-видимому, наиболее близкими идейно к исследованиям Б.Н. Пшеничного являются работы [43–46], развивающие и дополняющие эти исследования. Изложить содержательно столь высокого уровня результаты в одной статье весьма затруднительно. Ограничимся кратким перечнем результатов Б.Ш. Мордуховича, содержащихся в его последних энциклопедических монографиях [43] и достаточно полно представляющих современное состояние вариационного анализа и обобщенного дифференцирования.

Обобщенное дифференцирование лежит в основе вариационного анализа и его приложений. Б.Ш. Мордухович развивает двойственный подход к теории обобщенного дифференцирования, касающийся экстремального принципа. Данный принцип позволяет работать с невыпуклыми производно подобными конструкциями для множеств (нормальными конусами), многозначными отображениями (копроизводными). Эти конструкции определяются в двойственных пространствах и, будучи невыпуклозначными, не могут генерироваться никакими производно подобными конструкциями в основных пространствах подобно касательному конусу и производным по направлению. Тем не менее упомянутые невыпуклые конструкции обладают исчерпывающими исчислениями, которые оказываются лучше тех, которыми обладают их выпуклые аналоги. Нет существенных ограничений в основных пространствах при гладких и выпуклых постановках, поскольку основные двойственные производно подобные конструкции эквивалентны таким классическим постановкам. Этого не наблюдается в структуре современного вариационного анализа, где даже локальные аппроксимации в невыпуклом основном пространстве (например, касательные конусы) при двойственном отображении дают выпуклые множества нормалей и субградиентов. Выпуклость двойственных объектов приводит к значительным ограничениям в теории и приложениях. Описаны ситуации, когда аппроксимации основного пространства не могут использоваться в вариационном анализе, в то время как применение конструкций двойственного пространства обеспечивает исчерпывающие результаты.

Исследования, изложенные в [43], касаются теории обобщенного дифференцирования в банаховых пространствах. Базовые объекты — нормали, субградиенты и копроизводные — определены непосредственно в двойственных пространствах через слабые пределы последовательностей, включающие $\varepsilon$-нормали и $\varepsilon$-субградиенты типа Фреше. Получены необходимые условия оптимальности в копроизводных для липшицевой стабильности и метрической регулярности. Определены и изучены свойства нормальной компактности множеств и многозначных отображений, имеющие важное значение в бесконечномерном случае. Исследуется экстремальный принцип, являющийся главным инструментом. Независимо рассмотрены конечномерный и бесконечномерный случаи. В последнем широко используются пространства Асплунда, которые играют существенную роль в теории и приложениях вариационного анализа. Установлены соотношения между геометрическим экстремальным принципом и аналитическими вариационными принципами в различных формах, а также правила вычислений для основных нормалей, субградиентов и копроизводных в рамках пространств Асплунда. Основное различие между конечномерными и бесконечномерными пространствами в контексте сказанного состоит в необходимости использовать достаточные количества компактности в бесконечных размерностях. Требуемая компактность обеспечивается свойствами секвенциальной нормальной компактности. На основе вариационных принципов и теории обобщенного дифференцирования установлен ряд важных свойств, касающихся липшицевой метрической регулярности. Они применяются при исследовании оптимальных решений в задачах оптимизации и равновесия, неявных многозначных отображений, условий дополнительности вариационных неравенств.

Принципы вариационного анализа и теории обобщенного дифференцирования [43] широко применяются к задачам оптимизации, оптимальному управлению, моделям экономики.

## 2. МЕТОДЫ ИЗБЕЖАНИЯ СТОЛКНОВЕНИЙ ДВИЖУЩИХСЯ ОБЪЕКТОВ: ЗАДАЧА УБЕГАНИЯ ПОНТРЯГИНА–МИЩЕНКО, УБЕГАНИЕ ОТ ГРУППЫ, ФУНКЦИЯ $\omega(n, \nu)$

Более 40 лет тому Л.С. Понтрягин и Е.Ф. Мищенко [5] поставили задачу об уклонении от встречи с преследователем из любых начальных положений на полубесконечном интервале времени. Результаты касались линейных конфликтно-управляемых процессов и представляли некоторые (по возможности минимальные) требования на параметры процесса, достаточные для избежания встречи траекторий игроков. Вскоре стали разделять грубый и тонкий случаи: грубый соответствует уклонению от встречи лишь по геометрическим координатам, а тонкий, например, — уклонению по геометрическим координатам и скоростям, хотя обоим случаям соответствуют и более общие ситуации. В линейном случае авторам удалось добиться успеха благодаря формуле Коши для представления решения при выбранных управлениях игроков.

Метод, используемый Л.С. Понтрягиным и Е.Ф. Мищенко [13], был назван методом маневра обхода. Траектория процесса проектировалась на два взаимно ортогональных направления из ортогонального дополнения к терминальному множеству — линейному подпространству. Эти проекции представляли собой полиномы, содержащие управления игроков при старших степенях. Управляя таким образом корнями полиномов, следовало добиться того, чтобы полиномы не имели ни одного общего корня. Это автоматически означало бы, что встречи траекторий не произошло. Этот прием и есть маневр обхода (корней полиномов). Для его реализации использовалась лемма о квадратах Л.С. Понтрягина, а позже и другие способы.

Достаточно быстро (спустя пять лет) появились исследования нелинейных задач убегания [21–23]. Следует отметить, что специфика задачи убегания — убегание из любых начальных состояний — не требует знания решения нелинейной системы. Достаточно знать вектор изменения скорости траектории, т.е. правую часть системы. Тем не менее благодаря структуре системы в задаче убегания с помощью интегрирования по частям может быть получено представление проекции решения на некоторое подпространство из ортогонального дополнения к терминальному множеству в виде аналога формулы Тейлора. Это представление получено в работе [21], и оно является базовым соотношением в нелинейной теории убегания. Более того, в методе маневра обхода условия преимущества убегающего выражаются в терминах соотношений для множеств. В то же время методы убегания по направлению, разработанные в отделе Б.Н. Пшеничного, выражают преимущество убегающего с помощью минимаксных или максиминных неравенств в зависимости от взаимной информированности игроков. Если сравнивать с множественными условиями Л.С. Понтрягина в линейном случае, то это соответствует соотношениям для опорных функций или для выпуклых оболочек множеств, что является более слабым требованием. Однако в методе маневра обхода преимущество убегающего в грубом случае требуется лишь на двумерном подпространстве, в то время как методы убегания по направлению требуют более высокой размерности, и в этом их недостаток.

Разработанный позднее метод переменных направлений [47] призван устранить этот недостаток, однако цель достигнута лишь частично, хотя существует уверенность (до сих пор формально не подтвержденная) в полной эффективности идеи. Оригинальный метод убегания в развитие идей Л.С. Понтрягина предложил М.С. Никольский [49].

Б.Н. Пшеничный [48] получил достаточные условия убегания в нелинейной ситуации способом, напоминающим маневр обхода. Позднее идеи Л.С. Понтрягина и Б.Н. Пшеничного развили П.Б. Гусятников [51] и В.В. Остапенко [15]. В 1974 г. на Одесской всесоюзной конференции по теории игр независимо П.Б. Гусятниковым и А.А. Чикрием была поставлена и решена задача об убегании от группы преследователей [23]. В частности, в [23] была введена числовая функция

$$\omega(n,\nu)=\min_{\|p_i\|=1}\max_{\|\upsilon\|=1}\min_{i=1,\ldots,\nu}|(p_i,\upsilon)|,\ \ p_i\in R^n,\ \upsilon\in R^n, \tag{1}$$

связанная с упомянутой задачей, которой было суждено сыграть важную роль. Заметим, что при $n,\nu\geq 2$ $\omega(2,\nu)=\sin\dfrac{\pi}{2\nu}$, $\omega(n,2)=\sin\dfrac{\pi}{2n}$, хотя в общем случае $0<\omega(n,\nu)<1$. Кроме того, Л.Т. Ореховой установлена связь значений функции $\omega(n,\nu)$ с платоновыми телами, в частности дана оценка снизу при $n\geq 3$, $\nu\geq 3$.

Задача убегания от группы преследователей активно изучалась польскими математиками W. Rzymovskii, P. Borowko, W. Chodun. Оригинальный метод убегания от группы преследователей в случае простых движений, основанный на обходе каждого из них по логарифмической спирали, предложил Ф.Л. Черноусько [33]. Эту идею впоследствии развил В. Зак. (В обзоре работ по теории убегания [23] имеются соответствующие ссылки.) Легко заметить, что для того чтобы убежать, нужно иметь определенное преимущество, скажем в скорости. Поэтому естественным представляется вопрос: каково минимальное преимущество, необходимое для убегания в общей ситуации. Вокруг этого вопроса и сосредоточены исследования теории убегания. Б.Н. Пшеничный и А.А. Чикрий [22] разработали метод инвариантных подпространств, согласно которому при дополнительном условии инвариантности для убегания достаточно преимущества по ресурсам в проекции лишь на одномерное подпространство ортогонального дополнения либо равенства по ресурсам в проекции на конечное число направлений, образующих набор Каратеодори. Этот метод перенесен на случай убегания от группы преследователей.

Отдельный предмет для исследований в развитие идей Б.Н. Пшеничного представляют задачи взаимодействия группировок управляемых объектов. Так, суть задачи убегания состоит в том, что хотя бы один из группы убегающих должен избежать поимки. А.А. Чикрий высказал следующую гипотезу: если в евклидовом пространстве $R^n$, $n\geq 2$, имеются $2n$ преследователей и два убегающих с простыми движениями и областями управления — единичными шарами, то хотя бы один убегающий убежит при любых начальных положениях игроков. В случае $n = 2, 3$ задача решена, а при $n > 3$ проблема остается открытой. Различные общие постановки задач об убегании при наличии группировок и их решение содержатся в монографиях [52, 53].

### 3. МЕТОД РАЗРЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЙ, СИТУАЦИЯ ОКРУЖЕНИЯ ПРИ ГРУППОВОМ ПРЕСЛЕДОВАНИИ, ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГРУППИРОВОК

В создание теории дифференциальных игр в последние 50 лет внесли свой вклад многие ученые, научные группы, возглавляемые авторитетными лидерами — впоследствии главами научных школ. Поэтому обнаружить какой-либо новый эффект было трудно. В такой ситуации помочь мог только случай. И он представился. Вспомним введенную ранее функцию $\omega(n,\nu)$, которая задается выражением (1) и определяет преимущество убегающего над каждым из преследователей в случае простых движений:

$$\begin{gathered} \dot{x}_i = u_i,\ \|u_i\| \le 1,\ i = 1,\dots,\nu,\ x_i(0) = x_i^0,\ x_i \in R^n, \\ \dot{y} = v,\ \|v\| \le a,\ y(0) = y^0,\ \ y \in R^n. \end{gathered} \tag{2}$$

Для убегания без маневра из любых положений достаточно, чтобы

$$\omega(n,\nu)\cdot a > 1.$$

Рассмотрим эту задачу с точки зрения преследователей. В выражении для функции $\omega(n,\nu)$ исключим внешний минимум и модуль, положив $p_i = \dfrac{x_i^0 - y^0}{\|x_i^0 - y^0\|}$, $i = 1,\dots,\nu$, $a = 1$. Тогда условие $\max\limits_{\|v\|=1} \min\limits_{i=1,\dots,\nu} (p_i, v) > 0$ означает, что $y^0 \in \operatorname{intco}\{x_i^0\}$, т.е. имеет место окружение преследователями убегающего в начальный момент. Справедливо утверждение: для того чтобы группа преследователей могла поймать убегающего $(a = 1)$, необходимо и достаточно, чтобы $y^0 \in \operatorname{intco}\{x_i^0\}$.

Это наблюдение над функцией $\omega(n,\nu)$ и результат принадлежат Б.Н. Пшеничному [15]. Дальнейшее развитие идеи его учениками и последователями привело к созданию одного из наиболее мощных методов теории динамических игр — методу разрешающих функций [26], который обосновывает, в частности, закон преследования по лучу, а также классическое правило параллельного сближения, хорошо известные проектировщикам ракетной и космической техники. При решении задач группового преследования метод разрешающих функций стал эффективным средством для изучения конфликтно-управляемых процессов.

В выпуклом анализе существуют два способа описания множеств с помощью функций с сохранением взаимно однозначного соответствия. Первый базируется на опорных функциях, с помощью которых определяются полупространства, в пересечении дающие (высекающие) исходное выпуклое замкнутое множество, элементы которого являются решением системы линейных неравенств (вообще говоря, бесконечной), содержащей опорные функции. Другой способ касается звездных замкнутых множеств и функционалов Минковского. Пусть множество звездно относительно, например, точки 0. Тогда расстояние от нуля до границы множества в заданном направлении определяет значение функционала Минковского. Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между звездными относительно нуля замкнутыми множествами и их функционалами Минковского.

Первое из упомянутых соответствий в определенном смысле лежит в основе принципа максимума Понтрягина для задачи быстродействия в случае линейных систем и соответственно в основе правила экстремального прицеливания Н.Н. Красовского, связанного со временем первого поглощения, которое полностью обосновывает классическое правило сближения по кривой погони Л. Эйлера, часто используемое на практике.

В основе метода разрешающих функций лежат обратные функционалы Минковского, в некотором смысле новый математический объект; определим их [26].

Пусть $X$ — замкнутое звездное относительно нуля множество в $R^n$. Тогда

$$\alpha_X(p) = \sup\{\alpha \ge 0 : \alpha p \in X\}$$

назовем обратным функционалом Минковского. Опишем кратко метод разрешающих функций в современном представлении [26, 53, 78], включив в описание процессы различной природы и задав лишь представление решения. Рассмотрим конфликтно-управляемый процесс, эволюция которого описывается равенством

$$z(t)=g(t)+\int_0^t \Omega(t,\tau)\varphi(u(\tau),v(\tau))d\tau, \ t\ge 0. \tag{3}$$

Здесь $z(t)\in R^n$, функция $g(t)$, $g:R_+\to R^n$, $R_+=\{t: t\ge 0\}$, измерима по Лебегу и ограничена при $t>0$, матричная функция $\Omega(t,\tau)$, $t\ge\tau\ge 0$, измерима по $t$ и локально суммируема по $\tau$ для каждого $t\in R_+$. Блок управления задается функцией $\varphi(u,v)$, $\varphi: U\times V\to R^n$, которая непрерывна по совокупности переменных, $U\in K(R^m)$, $V\in K(R^l)$, $m$, $l$, $n\in N$.

Кроме конфликтно-управляемого процесса, задано терминальное множество $M^*$, имеющее цилиндрический вид:

$$M^*=M_0+M, \tag{4}$$

здесь $M_0$ — линейное подпространство из $R^n$, а $M\in \operatorname{co} K(L)$, где $L$ — ортогональное дополнение к $M_0$ в $R^n$. Допустимые управления игроков — измеримые функции, причем $u(t)=u(g(T),v_t(\cdot))$, $v_t(\cdot)=\{v(s): s\in[0,t]\}$, $t\in[0,T]$, $T$ — конец игры. Как обычно, игра рассматривается с точки зрения первого игрока, и следует установить достаточные условия его выигрыша, т.е. попадания траектории (3) на множество (4) в конечный момент при любом противодействии второго игрока.

Обозначив $\pi$, $\pi: R^n\to L$, ортопроектор, введем многозначные отображения

$$W(t,\tau,v)=\pi\Omega(t,\tau)\varphi(U,v),\ W(t,\tau)=\bigcap_{v\in V} W(t,\tau,v).$$

Условие Понтрягина [13] означает, что $W(t,\tau)\ne\varnothing$, $t\ge\tau\ge 0$. Если оно выполнено, то в силу замкнутозначности и измеримости отображения из теоремы измеримого выбора [9, 11, 46] вытекает, что для любого $t\ge 0$ существует измеримый по $\tau$ селектор $\gamma(t,\tau)$ отображения $W(t,\tau)$. Зафиксируем его и положим

$$\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))=\pi g(t)+\int_0^t \gamma(t,\tau)d\tau.$$

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathfrak{A}(t,\tau,v)=\{\alpha\ge 0: [W(t,\tau,v)-\gamma(t,\tau)]\cap \alpha[M-\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))]\},$$
$$\mathfrak{A}: \Delta\times V\to 2^{R_+},\ \Delta=\{(t,\tau): 0\le\tau\le t<+\infty\}.$$

Разрешающей функцией в игре (3), (4) будем называть опорную функцию отображения $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ в направлении $+1$, она связана с обратным функционалом Минковского некоторых многозначных отображений

$$\alpha(t,\tau,v)=\sup\{\alpha:\ \alpha\in\mathfrak{A}(t,\tau,v)\}=\sup_{m\in M}\alpha_{W(t,\tau,v)-\gamma(t,\tau)}(m-\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))).$$

Как видим, отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ и разрешающая функция $\alpha(t,\tau,v)$ являются $(L\times B)$-измеримыми по совокупности $(\tau,v)$, а значит, последняя функция суперпозиционно измерима [78, 79, 82]. Поэтому, введя множество

$$T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\left\{t\ge 0: \inf_{v(\cdot)}\int_0^t \alpha(t,\tau,v(\tau))d\tau\ge 1\right\},$$

можно утверждать [78], что для любого $T\in T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ игра (3), (4) может быть закончена в момент $T$ с помощью квазистратегий: $u(t)=u(g(T),v_t(\cdot))$, $t\in[0,T]$, а если отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ является выпуклозначным, то игра может быть закончена и в классе стробоскопических стратегий (контруправлений Н.Н. Красовского). Обоснованием схемы метода и аналитическими свойствами $(L \times B)$-измеримых отображений занимается И.С. Раппопорт [82], применяя разработанный математический аппарат к динамическим играм с терминальным функционалом.

В настоящее время существует множество модификаций метода разрешающих функций, базирующихся на различных обобщениях условия Понтрягина, которые используют фиксированные и нефиксированные точки прицеливания на терминальном множестве, рассматривающих нефиксированное время окончания игры, колебательную в вращательную динамику конфликтно-управляемого процесса. Отметим лишь установленные связи метода с первым прямым методом Понтрягина и временем первого поглощения.

Так, случай обращения разрешающей функции в $+\infty$, случай вырождения, полностью соответствует первому прямому методу Понтрягина [13, 24]. Однако в случае полного выметания по Гусятникову–Никольскому в условии Понтрягина (разность Минковского совпадает с разностью Хукухары) время первого поглощения совпадает с гарантированным временем метода разрешающих функций [26]. Однако, учитывая связь с расстоянием до терминального множества в обеих схемах методов, возможна и более тонкая связь гарантированных времен.

Метод разрешающих функций применялся для исследования конфликтно-управляемых процессов, когда динамика задается нестационарными системами, а области управления игроков и терминальное множество зависят от времени. Исследованы дифференциально-разностные игры для систем запаздывающего и нейтрального типов, нелинейные дифференциальные игры, интегральные и интегро-дифференециальные игровые задачи. Изучены игровые задачи с терминальным функционалом, с интегральным блоком управления, сопряженные дифференциальные игры.

Отдельные исследования [53] коснулись вопроса о подходящем выборе селектора $\gamma(t,\tau)$, хотя в этой проблеме, по-видимому, осталось больше вопросов, чем ответов.

В цикле работ [58, 59] на основе метода разрешающих функций рассмотрена задача поочередного преследования (игровая задача «динамический комивояжер»), в которой критерием качества является суммарное время поимки всех убегающих. Задача состоит из двух неразрывно связанных частей: переборной — для определения порядка поимки и управленческой — непосредственного преследования при заданном порядке обслуживания.

Первая задача относится к проблеме целераспределения. Она хорошо известна представителям космической науки и является наиболее трудным звеном в решении исходной задачи. Когда порядок поимки убегающих определен, целесообразно применение упомянутого метода. Необходимо особо отметить, что ключевая трудность проблемы в том, что обе части исходной задачи (переборная и управленческая) неразрывны и решать их нужно только во взаимосвязи. В работе [58] рассмотрен случай простой динамики, когда преследователь использует алгоритм параллельного сближения при заданном порядке поимки убегающих, имея определенное преимущество по ресурсам над каждым из убегающих. Следует лишь определить оптимальный ответ убегающих как решение бесконечномерной оптимизационной проблемы. Задачу удалось свести к двум взаимно зависимым конечномерным задачам: непрерывной оптимизации суммарного времени поимки по постоянным управлениям убегающих и дискретной оптимизации по порядку поимки.

Сложные задачи группового преследования и взаимодействия группировок изучены в работах [18, 20, 25, 26, 52, 53]. Техника почти периодических функций позволила рассмотреть широкие классы задач с участием групп игроков с обеих сторон: задачи о многократной поимке, преследование группы жестко скоординированных убегающих, поимка заданного числа убегающих. В каждой из указанных задач важную роль играет ситуация окружения по Пшеничному по определенной части фазовых координат.

## 4. ПРАВИЛО ЭКСТРЕМАЛЬНОГО ПРИЦЕЛИВАНИЯ Н.Н. КРАСОВСКОГО, ВРЕМЯ ПЕРВОГО ПОГЛОЩЕНИЯ, ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ НА УПРАВЛЕНИЯ

Правило экстремального прицеливания Н.Н. Красовского [14] использовалось для случая интегральных ограничений на управления в игровых задачах динамики в работах Ю.М. Репина и В.Е. Третьякова. По-видимому, это был один из первых результатов в этом направлении. В дальнейшем исследования развивал В.Н. Ушаков. Практически в этот период появилась работа Б.Н. Пшеничного [16], посвященная завершению игры за время первого поглощения (регулярный случай). Позиционный способ сближения за время первого поглощения был перенесен на случай интегральных ограничений в работах Б.Н. Пшеничного и Ю.Н. Онопчука [19]. Эти основополагающие исследования развил И.С. Раппопорт [63] для игровых задач с интегро-геометрическими ограничениями в разных комбинациях, а также для задач группового преследования. Последние в позиционной постановке широко исследованы в работах С.И. Тарлинского, М.С. Габриэляна, а также А.А. Чикрия [18]. В то же время методика первого прямого метода Л.С. Понтрягина [13] переносилась на случай интегральных ограничений М.С. Никольским [60]. Впоследствии указанная задача в рамках упомянутой техники, но с использованием приема Д. Зонневенда [61], связанного с растягиванием времени, изучалась А.Я. Азимовым [62]. К этой же методике можно отнести исследования А.В. Мезенцева, Н.Л. Григоренко, А.Я. Азимова, Ф.В. Гусейнова. С появлением метода разрешающих функций [26, 53, 78, 81] встал естественный вопрос о его распространении на случай интегральных ограничений. Такая попытка была предпринята, в частности, в работе [64].

Остановимся на некоторых последних результатах в упомянутом выше направлении, связанных с исследованиями А.А. Белоусова [65, 66]. Пусть динамика игры задается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = Az + Bu + Cv, \ \ z(0) = z^0, \tag{5}$$

где $z \in R^n$, $u \in R^m$, $v \in R^l$, $A$, $B$, $C$ — постоянные матрицы размера $n \times n$, $n \times m$, $n \times l$ соответственно. Управление игрока-преследователя $u(\cdot)$ и убегающего $v(\cdot)$ — измеримы по Лебегу функции, удовлетворяющие интегральным ограничениям

$$\int_0^\infty \|u(\tau)\|^2 \, d\tau \le 1, \ \ \int_0^\infty \|v(\tau)\|^2 d\tau \le 1. \tag{6}$$

Эти управления назовем допустимыми.

Терминальное множество $M_0$ является линейным подпространством из $R^n$. Будем считать, что преследователь при построении своего управления $u(t)$ использует информацию о $z^0$ и $v(t)$, а также учитывает информацию о предыстории $v_t(\cdot)$.

Обозначим $\pi$ ортопроектор, действующий из $R$ на $L$, где $L$ — ортогональное дополнение к $M_0$ в $R^n$. Введем предположение на параметры конфликтно-управляемого процесса, которое можно назвать аналогом условия Л.С. Понтрягина [13] для случая интегральных ограничений.

**Условие 1.** Существует такое число $\lambda$, $0 \le \lambda < 1$, что выполнено включение

$$\pi e^{At} CV \subset \lambda \pi e^{At} BU \ \ \forall t > 0, \tag{7}$$

где $U = \{u \in R^m : \|u\| \le 1\}$, $V = \{v \in R^l : \|v\| \le 1\}$ — единичные шары в соответствующих пространствах.

Введем вспомогательное многозначное отображение

$$\Omega(t, \tau, v) = \{\gamma \in R : \gamma \pi e^{At} z^0 + \pi e^{A\tau} Cv \in \sqrt{(1-\lambda)\gamma + \lambda \|v\|^2} \, \pi e^{A\tau} BU\}, \tag{8}$$

где $(t, \tau, v) \in R_+ \times R_+ \times R^l$, $R_+ = [0, \infty)$, и рассмотрим вспомогательную функцию, так называемую разрешающую функцию [26]

$$\gamma(t, \tau, v) = \sup \Omega(t, \tau, v).$$

Зафиксируем ее аргументы $(t, \tau, v) \in R_+ \times R_+ \times R^l$, причем $\pi e^{At} z^0 \neq 0$. Заметим, что норма $\| \gamma \pi e^{At} z^0 + \pi e^{A\tau} Cv \|$ при достаточно больших $\gamma$ растет по $\gamma$ линейно, а норма векторов из правой части включения в (8) ограничена функцией

$$\sqrt{(1-\lambda)\gamma + \lambda \| v \|^2} \max_{\|u\| \leq 1} \| \pi e^{A\tau} BU \|,$$

которая, как и функция от $\gamma$, растет не быстрее корня квадратного. Поэтому для достаточно больших $\gamma$ включение в (8) не выполняется, т.е. $\gamma(t, \tau, v) < +\infty$. К тому же функция $\gamma(t, \tau, v)$ измерима по Борелю по совокупности переменных, а значит, суперпозиционно измерима по $v$.

**Теорема 1.** Пусть в дифференциальной игре (5), (6) выполнено условие 1. Тогда если существует момент $T = T(z^0)$ такой, что либо $\pi e^{AT} z^0 = 0$, либо $\pi e^{AT} z^0 \neq 0$ и для всех допустимых управлений $v(\cdot)$ выполнено неравенство

$$\int_0^T \gamma(T, T-\tau, v(\tau)) d\tau \geq 1,$$

то траектория системы (5) может быть приведена на множество $M$ в момент $T$.

Выбор управления первым игроком проводится на основе теоремы измеримого выбора Куратовского и Рыль–Нардзевского. Утверждение без особого труда переносится на случай более общих интегральных ограничений на управления

$$\int_0^\infty v^{\mathrm{T}}(\tau) Gu(\tau) d\tau \leq \mu^2, \quad \int_0^\infty v^{\mathrm{T}}(\tau) Hv(\tau) d\tau \leq \nu^2,$$

где $G$ и $H$ — симметричные положительно-определенные матрицы размера $m \times m$ и $l \times l$ соответственно, $u(\tau)$ и $v(\tau)$ — измеримые функции, $\mu$ и $\nu$ — положительные числа, а знак Т обозначает транспонирование.

Рассмотренные интегральные ограничения представляют собой ограничения на интеграл от квадрата нормы управления. На практике большое значение имеют и другие типы интегральных ограничений, например ограничения на полный импульс, т.е. вместо (6) рассматриваются ограничения

$$\int_0^\infty \| u(\tau) \| d\tau \leq 1, \quad \int_0^\infty \| v(\tau) \| d\tau \leq 1. \tag{9}$$

Следует отметить, что если допустимые управления первого игрока являются суммируемыми функциями и имеет место неравенство (9), то область достижимости системы (5) за конечное время при фиксированном управлении второго игрока может быть незамкнутой, хотя и является ограниченной. Это объясняется тем, что множество управлений, удовлетворяющих ограничениям (9), не ограничено по норме в обычном смысле и содержит функции, которые сколь угодно близки к управлениям типа $\delta$-функцией Дирака. Общим приемом для замыкания множества управлений в слабозвездной топологии является расширение исходной задачи с помощью функций ограниченной вариации или управлений мер.

В качестве управлений, удовлетворяющих (9), возьмем обобщенные функции

$$u(t) = u_0(t) + \sum_{i=1}^\infty b_i \delta(t - \eta_i), \quad v(t) = v_0(t) + \sum_{j=1}^\infty c_j \delta(t - \Theta_j), \tag{10}$$

где $u_0(t)$ и $v_0(t)$ — суммируемые функции, последовательности $\{\eta_i\}$ и $\{\Theta_j\}$ определяют моменты подачи импульсов, а векторы $b_i$ и $c_j$ — их величины, причем

$$0 \leq \eta_1 < \ldots < \eta_i < \ldots, \quad 0 \leq \Theta_1 < \ldots < \Theta_j < \ldots,$$

$$u_0(t) \in R^m, \quad v_0(t) \in R^l, \quad b_i \in R^m, \quad c_j \in R^l.$$

Предположим также, что последовательности $\{\eta_i\}$ и $\{\Theta_j\}$ не имеют конечных точек сгущения [71]. Тогда ограничения (9) примут вид

$$\int_0^\infty \| u_0(\tau) \| d\tau + \sum_{i=1}^\infty \| b_i \| \le 1, \quad \int_0^\infty \| v_0(\tau) \| d\tau + \sum_{j=1}^\infty \| c_j \| \le 1.$$

Справедливо утверждение.

**Теорема 2.** Пусть для игры (5), (9), (10) выполнено условие 1. Тогда если существует момент $T = T(z^0)$ такой, что $\pi e^{AT} z^0 \in (1-\lambda) \bigcup_{0 \le t \le T} \pi e^{At} BU$, то дифференциальная игра (5), (9), (10) может быть закончена в момент $T$.

### 5. ПРОЦЕССЫ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ: ИГРОВЫЕ ЗАДАЧИ, ОБОБЩЕННАЯ МАТРИЧНАЯ ФУНКЦИЯ МИТТАГ–ЛЕФФЛЕРА, ФОРМУЛА КОШИ

Дробное интегро-дифференцирование служит эффективным инструментом в различных направлениях прикладной математики. Не является исключением и математическая теория управления. На примере классических дробных производных Римана–Лиувилля [27, 28], регуляризованных дробных производных (независимо ввели и использовали Джрбашян–Нерсесян и Капуто), секвенциальных дробных производных Миллера–Росса [68] и дробных производных Хильфера [67] покажем использование этих производных при решении игровых задач динамики. Первые исследования в этом направлении проведены в работах А.А. Чикрия и С.Д. Эйдельмана [27, 28, 97, 98], А.А. Чикрия [56, 57], в настоящее время их продолжает И.И. Матичин [67–70, 80].

Рассмотрим линейные системы дифференциальных уравнений с дробными производными различных типов и получим представления решений таких систем через матричные функции Миттаг–Леффлера в виде аналогов формулы Коши в форме (3).

Пусть $n-1 < \alpha < n$, $n \in N$, дробная часть числа $\alpha$, как обычно, обозначается $\{\alpha\}$, его целая часть — $[\alpha]$. Таким образом, $\{\alpha\} = \alpha - n + 1$, $[\alpha] = n-1$.

Дробная производная Римана–Лиувилля произвольного порядка $\alpha$ $(n-1 < \alpha < n,\ n \in N)$ вводится следующим образом [83]:

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau,$$

где $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ — гамма-функция Эйлера, удовлетворяющая функциональному уравнению $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, а $D^\alpha f(t)$ — решение интегрального уравнения Абеля при $\alpha \in (0,1)$.

Регуляризованная дробная производная имеет вид

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau = D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0).$$

Как производные Римана–Лиувилля, так и регуляризованные производные не обладают ни полугрупповым свойством, ни свойством коммутативности. В этой связи Миллер и Росс ввели так называемые секвенциальные производные, определяемые следующим образом:

$$\mathbf{D}^{|\alpha|} f(t) = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \ldots D^{\alpha_m} f(t),$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$, а функция $f(t)$ предполагается достаточное число раз дифференцируемой. В качестве оператора $D^\alpha$ можно использовать оператор дробного интегродифференцирования по Риману–Лиувиллю, по Джрбашяну–Нерсесяну–Капуто или любую другую его разновидность.

Следует отметить, что классические дробные производные Римана–Лиувилля и регуляризованные дробные производные можно рассматривать как частные случаи секвенциальных производных.

Пусть $n-1<\alpha<n$ и $p=n-\alpha$, тогда по определению

$$D^{\alpha} f(t)=\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1} D^{\alpha-n+1} f(t)=\left(\frac{d}{dt}\right)^{n} D^{-p} f(t),$$

$$D^{(\alpha)} f(t)=D^{(\alpha-n+1)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1} f(t)=D^{-p}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n} f(t),$$

где $D^{-p}$ — оператор дробного интегрирования порядка $p=n-\alpha$:

$$D^{-p} f(t)=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-p}}\,d\tau.$$

Использование секвенциальных производных Миллера–Росса позволяет, в частности, понижать порядок дифференциальных уравнений по аналогии с уравнениями целого порядка.

Выберем некоторое $\nu$, $n-1<\nu<n$, $n\in N$. Рассмотрим подробно случай, когда $\alpha=(j,\nu-n+1,n-1-j)=(j,\{\nu\},[\nu]-j)$, $j=0,\dots,n-1$. Очевидно, что $|\alpha|=\nu$. Введем обозначения:

$$D_j^{\nu} f(t)=\left(\frac{d}{dt}\right)^{j} D^{\{\nu\}}\left(\frac{d}{dt}\right)^{[\nu]-j} f(t)=\left(\frac{d}{dt}\right)^{j} D^{\nu-n+1}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1-j} f(t),$$

$$D_j^{(\nu)} f(t)=\left(\frac{d}{dt}\right)^{j} D^{(\{\nu\})}\left(\frac{d}{dt}\right)^{[\nu]-j} f(t)=\left(\frac{d}{dt}\right)^{j} D^{(\nu-n+1)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1-j} f(t).$$

Следующие формулы устанавливают связь секвенциальных производных специального вида $D_j^{\nu} f(t)$, $D_j^{(\nu)} f(t)$ с классическими производными Римана–Лиувилля и регуляризованными производными, а также их взаимосвязь.

Пусть $n-1<\nu<n$, $n\in N$, а функция $f(t)$ имеет абсолютно непрерывные производные до порядка $(n-1)$ включительно. Тогда

$$D_0^{(\nu)} f(t)=D^{(\nu)} f(t)=D^{\nu} f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0),$$

$$D_1^{(\nu)} f(t)=D_0^{\nu} f(t)=D^{(\nu)} f(t)+\frac{t^{n-1-\nu}}{\Gamma(n-\nu)} f^{(n-1)}(0)=D^{\nu} f(t)-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0),$$

……………………………………………………………………

$$D_j^{(\nu)} f(t)=D_{j-1}^{\nu} f(t)=D^{(\nu)} f(t)+\sum_{k=n-j}^{n-1}\frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0)=$$

$$=D^{\nu} f(t)-\sum_{k=0}^{n-1-j}\frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0),$$

……………………………………………………………………

$$D_{n-1}^{(\nu)} f(t)=D_{n-2}^{\nu} f(t)=D^{(\nu)} f(t)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0)=D^{\nu} f(t)-\frac{t^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} f(0),$$

$$D_{n-1}^{\nu} f(t)=D^{(\nu)} f(t)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0)=D^{\nu} f(t).$$

Учитывая равенства

$$D_j^{(\nu)} f(t)=D_{j-1}^{\nu} f(t),\ D_n^{(\nu)} f(t)=D^{\nu} f(t),$$

положим

$$\mathbf{D}_j^{\nu} f(t)=D_j^{(\nu)} f(t)=D_{j-1}^{\nu} f(t).$$

В работе [27] определена обобщенная матричная функция Миттаг–Леффлера

$$E_\rho(B;\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B^k}{\Gamma(k\rho^{-1}+\mu)},$$

где $\rho>0$, $\mu\in C$ ($C$ — множество комплексных чисел), $B$ — произвольная квадратная матрица.

Правосторонний интеграл Римана–Лиувилля порядка $\alpha$, $0<\alpha\le 1$, от функции $f$ определяется следующим образом:

$$I^\alpha f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau.$$

Пусть теперь $m-1<\alpha<m$, $m\in N$, и функция $f$ имеет абсолютно непрерывные производные до порядка $m$. Положим производную порядка $\alpha$ типа $\mu$, $0\le\mu\le 1$, равной

$$D^{\alpha,\mu}f(t)=I^{\mu(m-\alpha)}\frac{d^m}{dt^m}I^{(1-\mu)(m-\alpha)}f(t).$$

Это аналог производной Хильфера [67, 83], введенной им для $\alpha\in(0,1]$. Очевидно, что при $\mu=0$ получим классическую производную Римана–Лиувилля порядка $\alpha$

$$D^{\alpha,0}f(t)=D^\alpha f(t)=\frac{d^m}{dt^m}I^{m-\alpha}f(t),$$

а при $\mu=1$ — регуляризованную производную

$$D^{\alpha,1}f(t)=D^{(\alpha)}f(t)=I^{m-\alpha}\frac{d^m}{dt^m}f(t).$$

Рассмотрим линейные процессы, функционирующие в конфликтной ситуации, с уже упомянутыми дробными производными. Наша цель — при заданных управлениях игроков получить представление решения в виде аналога формулы Коши вида (3).

Рассмотрим динамическую систему, эволюция которой описывается уравнением

$$D^\alpha z=Az+\varphi(u,v),\ n-1<\alpha<n,\ z\in R^l,$$

с начальными условиями

$$D^{\alpha-k}z(t)\big|_{t=0}=z_k^0,\ k=1,\dots,n,$$

где $D^\alpha$ — оператор дробного дифференцирования Римана–Лиувилля. Тогда

$$z(t)=\sum_{k=1}^{n}t^{\alpha-k}E_{1/\alpha}(At^\alpha;\alpha-k+1)z_k^0+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(A(t-\tau)^\alpha;\alpha)\varphi(u(\tau),v(\tau))d\tau.$$

Если рассмотреть конфликтно-управляемый процесс с регуляризованной производной

$$D^{(\alpha)}z=Az+\varphi(u,v),\ n-1<\alpha<n,\ z\in R^l,$$

и начальными условиями

$$z^{(k)}(0)=\hat z_k^0,\ k=0,\dots,n-1,$$

то получим представление решения в виде

$$z(t)=\sum_{k=0}^{n-1}t^kE_{1/\alpha}(At^\alpha;k+1)\hat z_k^0+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(A(t-\tau)^\alpha;\alpha)\varphi(u(\tau),v(\tau))d\tau.$$

Пусть в системе имеются секвенциальные производные специального вида $D_j^\alpha$, т.е. эволюция задана уравнением

$$\mathbf{D}_j^\alpha z=Az+\varphi(u,v),\ n-1<\alpha<n,\ j\in\{0,1,\dots,n\},\ z\in R^l,$$

с начальными условиями

$$\mathbf{D}_{j-k-1}^{\alpha-k-1} z(t)\Big|_{t=0} = \tilde{z}_k^0, \; k=0,\ldots,j-1, \; z^{(k)}(0) = z_k^0, \; k=0,\ldots,n-j-1.$$

Тогда

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n-j-1} t^k E_{1/\alpha}(At^\alpha; k+1) z_k^0 + \sum_{k=0}^{j-1} t^{\alpha-k-1} E_{1/\alpha}(At^\alpha; \alpha-k) \tilde{z}_k^0 +$$

$$+ \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(t-\tau)^\alpha; \alpha) g(\tau) d\tau.$$

И наконец, в случае с производной Хильфера

$$D^{\alpha,\mu} z = Az + \varphi(u,v), \; m-1 < \alpha < m, \; 0 \le \mu \le 1, \; z \in R^l,$$

с начальными условиями

$$\frac{d^i}{dt^i} I^{(i-\mu)(m-\alpha)} z(t)\Big|_{t=0} = z_i^0, \; i=0,\ldots,m-1,$$

решение имеет вид

$$z(t) = \sum_{i=0}^{m-1} t^{i-(1-\mu)(m-\alpha)} E_{1/\alpha}(At^\alpha; i-(1-\mu)(m-\alpha)+1)\, z_i^0 +$$

$$+ \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(t-\tau)^\alpha; \alpha) \varphi(u(\tau), v(\tau)) d\tau.$$

Таким образом, в случае рассмотренных дробных производных траектории соответствующих конфликтно-управляемых процессов представлены в виде (3) и объект готов к применению аппарата разрешающих функций [26, 53, 78] для получения достаточных условий сближения за гарантированное время в классе квази- или стробоскопических стратегий. Это отражено в работах [27, 28, 56, 57, 67–70, 80, 83, 97, 98] и проиллюстрировано примерами, в частности исследована классическая задача Багли–Торвика.

## 6. СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ. ИМПУЛЬСНЫЕ ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

Системы с переменной структурой и импульсные процессы управления являются примером динамических процессов, траектории которых — разрывные функции. Для линейных систем с переменной структурой в игровой ситуации [55] решение можно представить в виде (3). Импульсные процессы можно считать частным случаем систем переменной структуры, когда структура процесса остается неизменной, но присутствуют скачки (разрывы) траектории, порожденные импульсными воздействиями [71], которые можно представить как управление с помощью $\delta$-функций Дирака. Иногда в такой ситуации говорят о системах с толчками. На примере импульсных систем покажем, как игровую задачу привести к виду, подходящему для применения метода разрешающих функций [26, 53].

Рассмотрим нестационарный конфликтно-управляемый процесс

$$\dot{z} = A(t)z + \varphi(t,u,v), \; z \in R^n, \; t \ge t_0 \ge 0, \; z(t_0) = z_0, \; u \in U(t), \; v \in V(t), \quad (11)$$

где $A(t)$ — матричная функция с суммируемыми на любом конечном интервале элементами. Области управления игроков $U(t)$ и $V(t)$ являются измеримыми компактнозначными отображениями. Блок управления — функция $\varphi(t,u,v)$, удовлетворяет условиям Каратеодори, т.е. непрерывна по совокупности $u$ и $v$ и измерима по $t$. Кроме того, справедливо неравенство

$$\|\varphi(t,u,v)\| \le c(t) \quad \forall u \in U(t), \; v \in V(t), \; t_0 \le t < +\infty,$$

$c(t)$ — суммируемая на любом конечном интервале скалярная функция. При этом процесс (11) является импульсным, т.е. траектория системы имеет разрывы первого рода в заданных точках $\tau_i$, $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_i < \tau_{i+1} < \ldots < +\infty$, последовательность которых не имеет конечных точек сгущения. Величину скачка в момент $\tau_i$ запишем

$$\Delta z \big|_{t=\tau_i} = z(\tau_i + 0) - z(\tau_i) = B_i z_i + a_i, \ i = 1, 2, \ldots$$

Здесь $B_i$ — невырожденные постоянные матрицы, $z_i = z(\tau_i)$, а $a_i$ — заданные векторы из $R^n$. Кроме конфликтно-управляемого процесса (11) с импульсными воздействиями, задано терминальное множество

$$M^*(t) = M_0 + M(t), \ t_0 \le t < +\infty,$$

$M_0$ — линейное подпространство из $R^n$, а $M(t)$ — измеримое компактнозначное отображение, принимающее значение из $L = M_0^{\perp}$.

Если игроками выбраны измеримые управления $u(\tau)$ и $v(\tau)$, то согласно исследованиям А.М. Самойленко и Н.А. Перестюка [71] решение системы (11) имеет вид (аналог формулы Коши)

$$z(t) = \Phi(t, t_0) z_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau) \varphi(\tau, u(\tau), v(\tau)) d\tau + \sum_{t_0 < \tau_i < t} \Phi(t, \tau_i) a_i. \qquad (12)$$

В этом случае

$$\Phi(t, t_0) = X(t, \tau_{j+k})(\mathrm{E} + B_{j+k}) \prod_{v=k}^{1} X(\tau_{j+k}, \tau_{j+v-1}) \cdot (\mathrm{E} + B_{j+v-1}) X(\tau_j, t_0),$$

$$\tau_{j-1} < t_0 \le \tau_j < \tau_{j+k} < t \le \tau_{j+k+1},$$

$$\Phi(t, \tau) = X(t, \tau_{j+k}) \prod_{v=k}^{s+1} (\mathrm{E} + B_{j+v}) X(\tau_{j+v}, \tau_{j+v-1})(\mathrm{E} + B_{j+s}) X(\tau_{j+s}, \tau),$$

$$\tau_{j-1} < t_0 \le \tau_j \le \tau_{j+s-1} < \tau \le \tau_{j+s} < \tau_{j+k} < t \le \tau_{j+k+1}.$$

Здесь $X(t, \tau)$ — матрицант однородной системы, а Е — единичная матрица. Имея представление (12), где моменты $\{\tau_i\}$ и величины скачков $a_i$ фиксированы, по аналогии с разд. 3 можно сформулировать условие Понтрягина и применить схему метода разрешающих функций. Однако гораздо больший интерес представляет ситуация, когда наряду с «непрерывными» управлениями $u(\tau)$ и $v(\tau)$ каждый из игроков управляет частью моментов $\tau_i$, а также частью соответствующих величин скачков $a_i$. Подобными проблемами в Черновицком национальном университете занимаются профессор Я. Бигун и его ученик А. Ткачик.

Если движения игроков разделены и каждый кроме непрерывного управления управляет еще моментами и величинами скачков для своей траектории, то такая игровая задача представляет собой хорошую модель спортивного единоборства, например бокса. Более того, приняв позицию одного из игроков и пытаясь найти условия его выигрыша, нетрудно видеть, что обращение разрешающей функции в $+\infty$ автоматически означает конец игры, т.е. подобие нокаута.

В монографии [55] детально исследованы системы с толчками ($B_i = 0$), а именно, случаи геометрических ограничений на управления преследователя против импульсных управлений убегающего и наоборот, а также случай импульсных управлений обоих игроков.

### 7. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ И ЗАДАЧИ ПОИСКА ДВИЖУЩИХСЯ ОБЪЕКТОВ

В свое время Б.Н. Пшеничный поставил задачу о внесении в модель конфликтно-управляемого процесса стохастической неопределенности. Это соответствовало направлению, которое активно развивалось в 60–70-е годы прошлого века. Пути реализации могут быть разными. Так, в работах [72, 38] рассматривается ситуация, когда вместо начального состояния процесса известна лишь его функция распределения, что автоматически приводит к изучению уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, решением которого является функция распределения текущего состояния процесса. Примеры оптимизации таких непрерывных процессов содержатся в [72] и осуществляются с помощью получения соответствующих необходимых условий экстремума.

Поскольку нахождение решения уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова является довольно трудной проблемой, то часто прибегают к дискретизации процесса как по времени, так и по состоянию. Один из возможных вариантов предложен в работах [30, 73, 99], проведенных с участием Б.Н. Пшеничного — это билинейная модель поиска, где стохастическая переходная матрица представляет собой блок управления, число состояний конечно, а время дискретно. При этом критерий качества — вероятность обнаружения или среднее время обнаружения объекта. Дискретный принцип максимума или метод динамического программирования Беллмана позволяют оптимизировать процесс поиска, в том числе с участием группировок движущихся объектов при различных информационных предположениях. Привнесение неопределенности в модель может быть осуществлено и с помощью смешанных стратегий игроков. Существует широкий спектр исследований различного рода стохастических игр в разных постановках. Одним из наиболее естественных путей исследования стохастических конфликтно-управляемых процессов (стохастических дифференциальных игр), по-видимому, является рассмотрение в исходной постановке стохастического уравнения Ито с управляющими воздействиями игроков или введение в правую часть детерминированной динамической системы случайного возмущения. Для иллюстрации последней ситуации приведем некоторые результаты, полученные К.Г. Дзюбенко [74].

Пусть задан квазилинейный дискретный конфликтно-управляемый процесс

$$z(t+1)=Az(t)+\varphi(u(t),v(t))+\varepsilon(t),\ t=0,1,\dots,\ z\in R^n,\ z(0)=z_0,$$

$$u(t)\in U,\ v(t)\in V,\ \varphi: U\times V\to R^n,$$

где $\varepsilon(t)$ — случайная функция, принимающая в каждый момент конечное число значений, $M^*$ — цилиндрическое терминальное множество вида (4). Множество реализаций — последовательности, порожденные $\varepsilon(t)$, имеет мощность континуума.

Зафиксируем одну из реализаций $\varepsilon_*(\cdot)$ случайной последовательности $\varepsilon(\cdot)$. Тогда схема метода разрешающих функций при условии Понтрягина дает гарантированное время сближения траектории с терминальным множеством

$$t(z_0,\gamma(\cdot),\varepsilon_*(\cdot))=\min\left\{t\in N:\sum_{s=0}^{t-1}\inf_{v\in V}\alpha(t,s,v)\ge 1\right\},$$

где $\alpha(t,s,v)$ — разрешающая функция, а $\gamma(\cdot)$ — соответствующий фиксированный селектор. В случае простой матрицы $A=\lambda E$ (E — единичная матрица), $\varphi(u,v)=u-v$, $U=aS$, $V=S$, $M_0=0$, $M=\delta S$, $a>1$, $\delta>0$, $S$ — единичная сфера с центром в 0, $\gamma(t)\equiv 0$, имеем

$$t(z_0,0,\varepsilon_*(\cdot))=\min\left\{t\ge 1:\ \left\|\lambda^t z_0+\sum_{s=0}^{t-1}\lambda^{t-s-1}\varepsilon_*(s)\right\|\le (a-1)\sum_{i=0}^{t-1}|\lambda|^i+\delta\right\}.$$

Справедливы следующие утверждения.

**Утверждение 1.** Пусть выполнены условия:

1) $\lambda\in(-1,1)$;

2) $b\in(0,\delta(1-|\lambda|))+a-1$;

3) $\varepsilon(t)$, $t=0,1,\dots$, — случайные векторы в $R^n$ такие, что $\||\varepsilon(t)\|\le b$, $t=0,1,\dots$, почти наверное.

Тогда гарантированное время $t(z_0,0,\varepsilon(\cdot))$ выхода траектории на терминальное множество с вероятностью 1 конечно и не превышает

$$t^*=\max\left(0,\left[\frac{\ln(c+\delta)-\ln(c+\|z_0\|)}{\ln|\lambda|}\right]\right)+1,$$

где $c=\dfrac{a-b-1}{1-|\lambda|}$, а $[\cdot]$ — целая часть числа.

**Утверждение 2.** Пусть выполнены условия:

1) $\lambda \in (-1, 1)$;

2) $\varepsilon(t)$, $t = 0, 1, \ldots$, — независимые одинаково распределенные случайные векторы в $R^n$;

3) математическое ожидание $M \| \varepsilon(0) \| < +\infty$;

4) $P(\| \varepsilon(0) \| < \alpha) > 0$, $\alpha > 0$.

Тогда

$$\lim_{n \to \infty} P\left( \left\| \sum_{t=0}^{n} \lambda^t \varepsilon(t) \right\| < \alpha \right) = P\left( \left\| \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t \varepsilon(t) \right\| < \alpha \right) > 0, \ \alpha > 0,$$

$$P(t(z_0, 0, \varepsilon(\cdot)) < +\infty) \geq \lim_{n \to \infty} P\left( \left\| \sum_{t=0}^{n} \lambda^t \varepsilon(t) \right\| < \frac{a-1}{1-|\lambda|} + \delta \right) > 0.$$

## 8. ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Проблема нахождения инвариантных множеств динамических систем, подверженных воздействию ограниченных аддитивных возмущений, состоит в определении тех множеств в фазовом пространстве системы, которые обладают свойством удерживать в себе вектор состояния при всевозможных значениях возмущений. Первые исследованиям в этом направлении принадлежат Б.В. Булгакову, поэтому иногда говорят об этой проблеме как о задаче Булгакова.

Известен цикл работ В.М. Кунцевича и Б.Н. Пшеничного, посвященных решению упомянутой задачи для линейных стационарных дискретных систем (например, [5, 6]). В последнее время в связи с возросшим пониманием того, что при решении реальных задач управления для параметров объектов известны лишь их некоторые оценки, возрос интерес исследователей и практиков к обобщениям задачи Булгакова на семейства управляемых динамических линейных и нелинейных, непрерывных и дискретных систем, содержащих разного рода неопределенности.

В работах [40–42] развиты подходы для нахождения оценок или самих инвариантных множеств дискретных систем, использующие разностные включения. При этом в линейном случае эти множества могут быть аналитически описаны, а в нелинейной ситуации для определения инвариантного множества предложен итерационный процесс, сходящийся со скоростью геометрической прогрессии. При описании исследуемых множеств предполагается, что они являются интервальными, иначе говоря параллелепипедами.

В отличие от работ [5, 6], где определяется минимальное инвариантное множество, в [42] дается лишь его оценка сверху, причем в классе интервальных множеств. Однако предлагаемый метод имеет и преимущество по сравнению со способом определения минимального инвариантного множества в [42] в виде ряда (сумма бесконечного числа множеств), так как позволяет избежать бесконечного суммирования множеств со всеми вытекающими отсюда проблемами в вычислительном отношении.

Для нелинейных систем достаточно общего вида найдены условия, при которых последовательность множеств, определяемых некоторым нелинейным разностным включением, имеет инвариантное (стационарное) множество.

В отличие от робастно устойчивых линейных систем, для которых при ограниченных возмущениях ограниченное инвариантное множество всегда существует, для нелинейных систем в общем случае это не является справедливым.

Тем не менее получены конструктивно проверяемые условия существования инвариантных множеств для широкого класса нелинейных систем, а также предложен итерационный алгоритм его нахождения.

## 9. МЯГКАЯ ПОСАДКА ДВИЖУЩИХСЯ ОБЪЕКТОВ. ЗАДАЧА АЛЬБУСА–МЕЙСТЕЛА

На практике зачастую при выведении фазового вектора системы на заданное множество необходимо обеспечить вывод не только для геометрических координат объекта, но и для скоростей, и производных более высокого порядка. Проблему часто называют мягкой посадкой, или причаливанием. Ее актуальность продиктована, прежде всего, важными практическими приложениями. Такие задачи как посадка космического аппарата на Луну или другие планеты, стыковка космических аппаратов, посадка летательного аппарата на палубу корабля или в труднодоступных местах в аварийном режиме, посадка самолета в аэропорту при сильном боковом ветре предполагают проведение мягкой посадки. Однако задача о встрече не только по геометрическим координатам, с математической точки зрения, существенно более трудная, см., например, библиографию в работе [75].

Задаче о мягкой посадке в игровой постановке, по-видимому, впервые особое внимание уделялось в работах Д. Зонневенда [61] и М.С. Никольского. Они рассматривали игровую задачу для систем второго порядка с трением в пространствах одинаковой размерности и без фазовых ограничений. Для этой задачи получены достаточные условия разрешимости за конечное время. В этих работах показано, что прямое применение классических методов теории дифференциальных игр к задаче о мягкой посадке не дает результата. Одна из причин заключается в том, что для исследуемой задачи по существу не выполняется условие Понтрягина. Поэтому каждый из авторов предлагал специальные приемы, позволившие добиться эффективного результата.

Здесь в качестве иллюстрации предлагается задача, поставленная Д. Альбусом и А. Мейстелом в работе [76] как проблема «Eagle Snatch» (захват орла). Динамика преследователя и убегающего задается дифференциальными уравнениями

$$d\dot{x} = -\alpha\dot{x} + \rho u, \; x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3, \; x(0) = x^0, \; \dot{x}(0) = \dot{x}^0,$$

$$u \in R^3, \; \|u\| \le 1, \; \alpha > 0, \; \rho > 0,$$

$$\ddot{y} = -\beta\dot{y} + \sigma v, \; y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3, \; y(0) = y^0, \; \dot{y}(0) = \dot{y}^0,$$

$$v \in R^3, \; \|v\| \le 1, \; \beta > 0, \; \sigma > 0,$$

которые моделируют движение динамических объектов согласно закону Ньютона в среде с трением. Под мягкой посадкой понимается выполнение в некоторый момент времени $T$ равенств $x(T) = y(T)$, $\dot{x}(T) = \dot{y}(T)$, также необходимо выполнение фазовых ограничений для траекторий объектов $x_3(t) \ge 0$ и $y_3(t) \equiv 0$ при $t \ge 0$. Из этих условий непосредственно следует, что $v_3(t) \equiv 0$.

В силу различной размерности фазовых пространств игроков, а также наличия фазового ограничения на состояние преследователя такая задача более трудная. Один из способов решения задачи о мягкой посадке предложен в работе [77], в которой процесс разбивается на три стадии. На первой реализуется сближение по геометрическим координатам, на второй осуществляется переход из одной точки в другую с попаданием на след убегающего в плоскости. Заключительная стадия — преследование по следу в плоскости. В работе [75] используется несколько иная схема решения задачи о мягкой посадке, тоже состоящая из комбинации различных игровых методов. Сначала исходная задача сводится к задаче управления по переводу траектории из заданной точки в начало координат с учетом фазовых ограничений. При этом полученная область достижимости имеет негладкую границу, изучаются ее свойства, аналитически описана область достижимости эквивалентной задачи управления, находится ее опорная функция на основе правила множителей Лагранжа. Решается две вспомогательные задачи: задача оптимального быстродействия в случае нулевой начальной скорости и задача о выравнивании скоростей на основе правила экстремального прицеливания Н.Н. Красовского. Все это (мягкая посадка) возможно при выполнении двух условий:

1) $\rho/\sigma > 1 + |\alpha/\beta|$;

2) начальная точка $(x^0, \dot{x}^0) \in R^6$ такова, что

— $x_3^0 \ge 0$;

— либо $\dot{x}_3^0 \ge 0$, либо $x_3^0 + \dot{x}_3^0/\alpha + \rho/\alpha^2 \ln(1 - (\alpha/\rho)\dot{x}_3^0) \ge 0$, если $\dot{x}_3^0 < 0$.

Разумеется, комбинированный игровой метод мягкой посадки подтверждается обширным моделированием с соответствующей визуализацией.

### 10. ЗАПАЗДЫВАНИЕ ИНФОРМАЦИИ В ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ. ФУНКЦИЯ РАСТЯЖЕНИЯ ВРЕМЕНИ. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ИГРА

Еще Р. Айзекс указывал на важность и трудность решения игровых задач с запаздыванием информации, являющихся максимально приближенными к реальной ситуации конфликтного взаимодействия. Г.Ц. Чикрий показала эквивалентность линейной дифференциальной игры с переменным или постоянным запаздыванием информации игре с полной информацией, но другой динамикой и другим терминальным множеством [84, 85]. Опишем кратко процесс сведения к эквивалентной игре.

Пусть задана линейная дифференциальная игра преследования

$$z = Az + u - \upsilon, \tag{13}$$

где $z \in R^n$, $u \in U$, $\upsilon \in V$, $U \subset R^n$, $V \subset R^2$, а $U$ и $V$ — выпуклые компакты с терминальным множеством $M$, $M \subset R^2$, вида $M = M_0 + M_1$, где $M_0$ — линейное подпространство из $R^n$, а $M_1$ — выпуклый компакт из линейного подпространства $L$, являющегося ортогональным дополнениям к $M_0$, в $R^n$ — ортопроектор $\pi : R^n \to L$.

Пусть $\Omega_U$, и $\Omega_V$ — совокупности допустимых управлений игроков, являющихся измеримыми функциями, $z(0) = z_0$ — начальное состояние игры. Предполагается, что информация о текущем состоянии системы поступает к преследователю с запаздыванием во времени. Это запаздывание является функцией времени $\tau(t)$, $t \in [\tau_0, +\infty)$, $\tau_0 > 0$, $\tau(\tau_0) = \tau_0$, где $\tau(t)$ — неотрицательная дифференцируемая функция, причем $\dot{\tau}(t) \le 1$. Последнее условие обеспечивает обновление информации с течением времени и включает случай $\tau(t) = \mathrm{const}$.

Назовем позицией игры в текущий момент времени $t$, $t \ge \tau_0$, пару $(z(t - \tau(t)), u^t(\cdot))$, где $u^t(\cdot)$ — реализация управления преследователя на полуинтервале $[t - \tau(t), t)$. Пусть $Z(t)$ — множество возможных состояний системы (13) в момент времени $t$, $t \ge \tau_0$, при всевозможных управлениях $\upsilon(\cdot)$, $\upsilon(\cdot) \in \Omega_\upsilon$, на отрезке $[t - \tau(t), t]$. Будем считать, что игра преследования с запаздыванием информации может быть завершена в некоторый момент $T \ge \tau_0$, если преследователь так построит свое управление на основании доступной ему текущей информации, а именно позиции $(z(t - \tau(t)), u^t(\cdot))$, что будет выполнено включение $Z(T) \subset M$.

Обозначим

$$V(\tau) = -\int_0^\tau \pi e^{\Theta A} V d\Theta, \;\; M_1(t) = M_1 * V(\tau(t)), \;\; M(t) = M_0 + M_1(t).$$

**Теорема 3.** Пусть множество $M_1(t)$ не пусто при $t \in [\tau_0, +\infty)$. Линейная дифференциальная игра преследования (13) с запаздыванием информации $\tau(t)$ может быть завершена в некоторый момент времени $T$, исходя из начальной позиции $(z_0, u^{\tau_0}(\cdot))$, тогда и только тогда, когда соответствующая ей игра с полной информацией $\dot{\tilde{z}}(t) = A\tilde{z}(t) + u(t) - (1 - \tau'(t)) e^{\tau(t) A} \upsilon(t - \tau(t))$ и терминальным множеством $M(t)$ может быть завершена из начальной точки $\tilde{z}(\tau_0) = e^{\tau_0 A} z_0 + \int_0^{\tau_0} e^{(\tau_0 - \theta)} u^{\tau_0}(\theta) d\theta$ в тот же момент времени $T$.

Это утверждение имеет место и для линейных эволюционных игр [84] и при более слабых предположениях относительно функции $\tau(t)$.

С одной стороны, благодаря установленной эквивалентности стало возможным применение методов, разработанных для линейных дифференциальных игр преследования с полной информацией для решения игр с запаздыванием информации. С другой стороны, этот факт способствовал развитию иного подхода к решению сложных дифференциальных игр преследования с полной информацией, для которых не выполнено условие Понтрягина, лежащее в основе прямых методов преследования, в частности первого прямого метода Понтрягина [13, 24] и метода разрешающих функций [26, 53]. Примерами таких игр являются задачи о мягкой встрече объектов (для систем второго порядка это одновременное совпадение геометрических координат и скоростей), задачи преследования для колебательных процессов и процессов с различной инерционностью.

Суть подхода заключается в искусственном ухудшении информационных возможностей преследователя, а именно в переходе от исходной игры с полной информацией к игре с той же динамикой и тем же терминальным множеством, но с зависящим от времени запаздыванием информации, которое убывает по мере приближения траектории игры к терминальному множеству и обращается в нуль при попадании на него. Эта функция запаздывания явно выражается с помощью так называемой функции растяжения времени $J(t)$, которая предполагается положительно-определенной, кусочно-гладкой и такой, что $J(t) > t$ для $t > 0$ и $J(0) = 0$:

$$\tau(\tau_0 + t) = J(t_1 - t) - (t_1 - t), \tau_0 \le t \le \tau_0 + t_1.$$

Здесь $J(t_1)$ — предполагаемый момент окончания игры, $\tau_0 = J(t_1) - t_1$. Функция $J(t)$ находится из условия Понтрягина, записанного для игры с полной информацией, эквивалентной рассмотренной выше. Это условие совпадает с модификацией условия Понтрягина, предложенной ранее Д. Зонневендом [61], и опирается на идею построения управления преследователя по управлению убегающего в прошлом. Выяснение природы этого условия и связанной с ним модификации первого прямого метода Понтрягина позволило завершить начатое в [61] исследование задачи о мягкой встрече двух объектов второго порядка, описывающих ньютоновскую динамику при наличии трения [85]. Выведены достаточные условия на параметры игры, которые обеспечивают возможность осуществления за конечное время преследователем мягкой встречи с убегающим при любых их начальных положениях и скоростях. Получены условия на начальные данные, при которых преследование осуществляется строго по геометрической траектории («следу» противника). Исследованы задача о геометрической и мягкой встрече двух «математических маятников» [85] и задача о мягкой встрече двух «затухающих колебаний» [86]. В отличие от модели с ньютоновской динамикой, где функция растяжения времени непрерывно дифференцируемая, в последних случаях эти функции оказались негладкими.

Рассмотрена задача о мягкой встрече двух разнотипных управляемых дифференциальных систем второго порядка, одна из которых описывает движение согласно второму закону Ньютона при наличии трения, а вторая совершает затухающие колебания [87]. Подходящая функция растяжения времени оказалась разрывной в счетном числе точек, оставаясь дифференцируемой в точках своей непрерывности. Установлены условия на параметры игры, при которых за конечное время преследующий объект может осуществить мягкую встречу с убегающим, исходя из любых начальных положений.

## 11. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ, РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Из пяти ключевых монографий Б.Н. Пшеничного две [31, 32] посвящены численным методам. Они переведены на многие языки мира и являются источником многочисленных исследований и приложений в самых различных областях. Остановимся на некоторых работах его учеников, продолжающих развивать идеи ученого.

Метод линеаризации [32], используемый на протяжении многих лет, известен как один из самых эффективных методов решения общих задач математического программирования. Главным требованием к функциям, описывающим оптимизационную задачу, является их гладкость. Однако идеи, положенные в основу метода линеаризации, успешно использовались при решении многих других задач, которые не вкладываются в его первоначальную схему. Хотя метод был создан для решения гладких задач оптимизации, его сразу начали применять в решении некоторых минимаксных задач.

Для решения общей задачи выпуклого программирования разработан комбинированный метод (PNK-метод), основанный на идеях метода линеаризации и метода точных штрафных функций [88]. Этот метод сходится при общих предположениях и позволяет оценить множители Лагранжа. В работе [89] показано, как учет специфики квадратичной задачи, решаемой на каждой итерации в PNK-методе, позволяет значительно уменьшить объем вычислений. При модификации PNK-метода исключаются несущественные для решения задачи ограничения.

В работе [90] исследованы свойства матричных конусов в различных пространствах и предложен метод решения оптимизационных матричных задач с ограничениями на положительную определенность. С помощью этого метода можно решать экстремальные задачи на графах: нахождение оценки максимально взвешенного внутренне устойчивого множества вершин графа и построение оценки максимального разреза графа.

Одной из модификаций метода линеаризации и нестандартного его использования является модификация для решения общей задачи обратно-выпуклого программирования:

$$\max \{ f_0(x) \mid f_i(x) \geq 0,\ i = 1, \ldots, m,\ x \in R^n \},$$

где $f_i(x),\ i = 0, 1, \ldots, m,$ — выпуклые непрерывные функции [91].

Несмотря на то, что все функции, описывающие задачу, выпуклые, она не является выпуклой в обычном смысле и к тому же многоэкстремальной. В общую схему этой задачи вкладываются многие формализованные математические модели задач упаковки и размещения объектов в конечномерном пространстве. Хотя указанная модификация метода линеаризации может находить эффективно лишь локальный экстремум, на ее основе удалось осуществить нетрадиционный подход к решению геометрических задач упаковки и размещения шаров, параллелепипедов, эллипсоидов, круговых цилиндров [92].

Созданы графические программные средства, позволяющие визуализировать результаты решения и путем изменения начальных данных находить экстремум, близкий к глобальному, и даже глобальный. Это значительно расширяет возможности использования математических задач на практике, например, в производстве при оптимальном раскрое материала, при различных грузоперевозках, в том числе при перевозке грузов самолетом с сохранением устойчивости самолета за счет минимального отклонения его естественного центра тяжести [91].

В 1960-х годах Б.Н. Пшеничный предложил математический аппарат для анализа реальных энергетических сетей, что позволило оптимизировать процесс распределения потоков с точки зрения минимизации расходов на транспортировку. Основные соотношения математических моделей задач расчета сетей сознательно выбирались на основании достаточно общих соображений, чтобы охватить единым подходом различные распределительные системы.

Практическое значение предложенных результатов в последующие годы выразилось в возможности использования концептуальных подходов, моделей и методов при разработке оптимизационных алгоритмов для систем нефте-, газо- и водоснабжения, которые могли быть использованы для создания автоматизированных систем планирования и оперативного управления процессом транспортировки продуктов в распределительных сетях [93].

Поскольку, в отличие от классических транспортных задач, проблемы расчета энергетических сетей описываются с помощью сложных нелинейных функций, в дальнейшем исследовалась эффективность применения различных методов нелинейного программирования для расчета сетевых структур [94]. Также была изучена возможность применения известного метода линеаризации Б.Н. Пшеничного для решения оптимизационных задач на сетях. Преимущество данного метода заключается в том, что его можно рассматривать, не делая предположений о выпуклости целевых функций. Кроме того, он обеспечивает сходимость с широкой областью начальных приближений. Доказано, что в силу специфики сетевой задачи при решении сбалансированной нелинейной задачи распределения потоков методом линеаризации Б.Н. Пшеничного вспомогательные задачи квадратичного программирования всегда имеют ограниченное решение.

В дальнейшем желание улучшить обычную для методов градиентного типа скорость сходимости приводит к идее квадратичной аппроксимации целевой функции, как это делается в модифицированном методе линеаризации, и к построению алгоритма наилучшего распределения потоков, сочетающего преимущества методов первого и второго порядков. Исходя из особенностей структуры задачи распределения потоков, можно говорить о близости оценок эффективности построенного алгоритма и методов последовательного квадратичного программирования для этого класса задач [94].

Еще в ранних работах Б.Н. Пшеничного было отмечено, что часть узловых параметров сети можно рассматривать как неизвестные, тогда оптимизация происходит не только в результате минимизации стоимости доставки продукта потребителям, но и за счет перераспределения нагрузки источников. В дальнейшем было учтено, что если на свободные узловые параметры наложить определенные ограничения, то их можно рассматривать как модели резервуаров временного хранения продуктов. Так, неотъемлемой частью оптимизации функционирования газотранспортных сетей является разработка принципов оптимальной эксплуатации подземных хранилищ газа, что способствует решению проблем, связанных с неравномерностью газопотребления и повышением надежности газоснабжения. Также была сформулирована и исследована задача оптимизации функционирования подземных хранилищ газа по критерию достижения минимальных суммарных эксплуатационных затрат.

Требования устойчивого развития энергетики, сложная ситуация с использованием и распределением различных типов ресурсов делает актуальными вопросы, связанные с получением гарантированного допустимого решения в задаче управления распределительными системами. В [85] исследованы вопросы существования решения в задаче распределения потоков и предложена модель, включающая систему уравнений непрерывности, построенную таким образом, чтобы обеспечить существование допустимого решения при условии сведения к минимуму нарушений заказов потребителей.

Учет неопределенности информации в постановке задачи распределения потоков привел к обобщенному закону сохранения и трактовке управления потоками в терминах игрового подхода. Математическая формализация распределения потоков с обобщенным принципом сохранения возникла при решении задач управления движением воды в каналах оросительных систем. Позднее рассматривалась оптимизационная задача удержания уровня воды в оросительной системе в заданных пределах [96] и задача поставки потребителям смеси продуктов определенного качества, например воды из разных источников или газа из разных месторождений.

## 12. МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ В ФИЗИОЛОГИИ И МЕДИЦИНЕ

Б.Н. Пшеничный, будучи талантливым математиком-теоретиком, уделял достаточно много внимания решению прикладных задач в интересах народного хозяйства страны. Возможно, это связано с тем, что его кандидатская диссертация, посвященная построению вычислительных методов оптимизации на графах, была направлена на решение актуальной задачи выбора оптимальной газовой сети в городах и селах Украины и в дальнейшем эффективно использовалась в проектных организациях. В средине 60-х годов прошлого века Б.Н. Пшеничный поставил перед сотрудниками отдела Института кибернетики задачу разработать аппарат для моделирования логико-динамических систем с переменной структурой функционирования для имитации на ЭВМ работы двигательной установки подводной лодки (Ю.Н. Онопчук, Д.И. Марченко) и разработки вычислительного алгоритма управления ее движением в трехмерном пространстве (Ю.М. Данилин). Успешное использование разработанного программно-алгоритмического комплекса на стадии проектирования подводного объекта придало уверенность, что разработанные методы и средства окажутся полезными при моделировании функциональных систем дельфинов, ластоногих, которых в 70-х годах в СССР пытались использовать для решения оборонных задач: охраны рубежей, поиска подводных объектов и в других целях. Группа научных сотрудников отдела (Ю.Н. Онопчук, Д.И. Марченко, Л.В. Шевело, К.Б. Полинкевич) совместно с учеными Института физиологии им. А.А. Богомольца АН Украины (А.З. Колчинская, А.Ч. Мисюра) приступили к разработке математической модели транспорта респираторных газов в организме дельфина в целях прогнозирования динамики кислородных режимов во время выполнения им заданий на глубине и оценки кислородного ресурса.

Параллельно была создана математическая модель системы дыхания и кровообращения человека для исследования гипоксических состояний в различных условиях его жизнедеятельности. Компьютерный анализ модели позволил получить ответ на дискуссионный вопрос — может ли морское млекопитающее заболеть кессонной болезнью и как часто можно использовать его в работе на глубине во избежание заболевания. При участии Б.Н. Пшеничного была разработана модель самоорганизации основной функции систем дыхания и кровообращения человека на основе принятия компромиссных решений при урегулировании конфликтных ситуаций, которые возникают в организме между исполнительными органами регуляции (сердечная и дыхательные мышцы, гладкие мышцы сосудов) и другими органами и тканями при их обеспечении кислородом в условиях его дефицита. Результаты вычислительных экспериментов с математической моделью саморегуляции основной функции дыхания и кровообращения существенно дополнили систему экспериментальных данных. Были получены сведения о напряжении респираторных газов в тканях мозга, сердца, печени, желудочно-кишечного тракта, почек, скелетных мышц и других тканей в каждый момент времени, в том числе и в моменты получения экспериментальных данных способами, присущими современной физиологии. Это позволило объяснить ряд феноменов — о степени развития кислородной недостаточности при напряженной физиологической и умственной работе, при работе в напряженно ситуационной обстановке, при работе на равнине, в высокогорье и в гипербарических условиях.

При построении модели саморегуляции основной функции системы дыхания и кровоснабжения было поставлена цель регуляции — вывод системы организма из возмущенного состояния в равновесное и для регуляризации напряжений кислорода, и для напряжений углекислоты в каждом тканевом регионе и в крови, его омывающей. Благодаря этому установлено, что в условиях равнины реакция механизмов регуляции состояния и по кислородному, и углекислотному стимулах однонаправлена, а в горах — разнонаправлена. Существенное увеличение вентиляции легких, объемной скорости кровотока способствует установлению равновесия по кислороду, однако выводит систему из равновесия по углекислоте. В условиях гипербарии, когда человек вдыхает сжатую до определенного уровня дыхательную смесь, возрастает роль азота в регуляции основной функции — и вентиляция легких, и сердечный выброс крови существенно уменьшаются. Математическая модель систем дыхания и кровообращения способствовали постановке задачи о безопасной декомпрессии водолаза и акванавта. Задача безопасной декомпрессии была сформулирована как задача оптимального быстродействия с фазовыми ограничениями. Для ее решения предложен метод таймерного управления. Найдены решения как для случая погружения на глубину 60 м при дыхании воздухом (М.В. Бондаренко), так и для погружения акванавта на глубину более 60 м при добавлении в дыхательную смесь гелия (Г.Ю. Онопчук).

В дальнейшем проблемы математического моделирования функциональных систем организма человека и их использование для решения прикладных задач медицины и физиологии труда и спорта составили перечень основных научных задач созданного с помощью Б.Н. Пшеничного отдела моделирования информационно-функциональных систем (руководитель — ученик Б.Н. Пшеничного, доктор физико-мематических наук, профессор Ю.Н. Онопчук). Принципы построения математических моделей для систем дыхания и кровообращения организма, разработанные методы моделирования при содействии Б.Н. Пшеничного были распространены на системы теплообмена и терморегуляции (Н.Г. Лозийчук), иммунные системы (Т.А. Семчик), системы адаптации к условиям жизнедеятельности (А.В. Быць, Н.И. Грабова).

Последние работы коллектива Института кибернетики отражают медицинские проблемы — создание модели фармакологической коррекции кислородной недостаточности и химиотерапии опухоли (Н.И. Ляшко ), уточнение роли эритропоэза в компенсации гипоксии (Н.И. Грабова), формирование рекомендаций относительно выбора регуляторных усилий при искусственном сердце (М.В. Бондаренко), при гипертрофии левого желудочка сердца (Т.А. Семчик).

Следует отметить и направление, связанное с физиологией и спортивной медициной, — предложены математические модели оценки ресурса спортсмена в единоборствах (Н.И. Аралова), выбора стратегии поединка, междусоревновательный подход (Ю.И. Мастыкаш, Н.И. Ляшко, Н.И. Грабова), программные комплексы для оценки состояния альпинистов при подготовке в барокамере к восхождению на вершины (А.А. Аралова, Н.И. Аралова). Из публикаций, заслуживающих внимания, необходимо отметить научные работы Д.И. Марченко, Л.З. Фроловой, И.А. Бобряковой и других учеников Б.Н. Пшеничного и Ю.Н. Онопчука, создавших модели и методы решения многих теоретических и прикладных задач спортивной медицины и физиологии.

Подытоживая этот обзор, можно заключить, что исходные идеи Б.Н. Пшеничного в различных направлениях прикладной математики имеют продолжение в трудах его учеников и последователей, в том числе и за рубежом. У Бориса Николаевича всегда был свой исследовательский почерк: ясность и естественность мысли в сочетании с высочайшим аналитическим мастерством, что и принесло ему мировую известность.

Авторы выражают глубокую благодарность коллегам, ученикам и последователям Б.Н. Пшеничного, профессорам Ю.Н. Онопчуку, Ю.М. Данилину, доктору физико-мематических наук Э.И. Ненахову, кандидатам физико-мематических наук Г.Ц. Чикрий, Л.А. Соболенко, Е.Е. Кирик, И.А. Шубенковой, Н.Б. Шишкиной, А.А. Белоусову, К.Г. Дзюбенко, И.И. Матичину, Й.С. Раппопорту, В.М. Михалевичу, доверивших нам написание этой статьи и предоставивших материалы по соответствующим направлениям исследований.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Чикрий А.А. О научном наследии Б.Н. Пшеничного // Кибернетика и системный анализ. — 2002. — № 2. — С. 3–31.
2. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума. — М.: Наука, 1969. — 151 с.
3. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1980. — 320 с.
4. Пшеничный Б.Н. Выпуклые многозначные отображения и им сопряженные // Кибернетика. — 1972. — № 3. — С. 94–102.
5. Кунцевич В.М., Пшеничный Б.Н. Минимальные инвариантные множества динамических систем с ограниченными возмущениями // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 1. — С. 74–81.
6. Кунцевич В.М., Пшеничный Б.Н. Инвариантные и стационарные множества нелинейных дискретных систем при ограниченных возмущениях // Проблемы управления и информатики. — 1996. — № 1–2.— С. 35–45.
7. Пшеничный Б.Н., Кирик Е.Е. Методы нелинейного программирования и потоки в сетях // Кибернетика и системный анализ. — 1994.— № 6. — С. 67–77.
8. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Физматгиз, 1961. — 312 с.
9. Йоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
10. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума для дифференциальных включений // Кибернетика. — 1976. — № 6. — С. 60–73.
11. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. — М.: Мир, 1988. — 512 с.
12. Мордухович Б.Ш. Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука, 1988. — 360 с.
13. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. — М.: Наука, 1988. — Т. 2. — 576 с.
14. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. — М.: Наука, 1970. — 420 с.
15. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. — Киев: Наук. думка, 1992. — 260 с.
16. Пшеничный Б.Н. Линейные дифференциальные игры // Автоматика и телемеханика. — 1968. — № 1. — С. 65–78.
17. Pschenitchny B.N. $\varepsilon$-strategies in differential games // Topics in Differential Games. — New York; London; Amsterdam: North Holland Publ. Co, 1973. — P. 45–99.
18. Чикрий А.А. Дифференциальные игры с несколькими преследователями // Тр. Междунар. Мат. Центра им. С. Банаха (Варшава). Мат. теория управления. — 1985. — **14**. — С. 81–107.

19. Пшеничный Б.Н., Онопчук Ю.Н. Линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями // Техн. кибернетика. — 1968. — № 1. — С. 13–22.
20. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт Й.С. Групповое преследование в дифференциальных играх // Журн. высш. техн. шк. — Лейпциг, 1982. — № 1. — С. 13–27.
21. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А. Задача об уклонении от встречи в дифференциальных играх // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1974. — № 6. — С. 1416–1428.
22. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А. Дифференциальная игра уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1977. — № 1. — С. 3–10.
23. Chikrii A.A. The problem of avoidance for controlled dynamic objects // J. Mathematics, Game Theory and Algebra. — 1998. — **7**, N 2/3. — P. 81–94.
24. Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — 65 с.
25. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. — М.: Изд-во МГУ, 1990. — 198 с.
26. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. — Boston; London; Dordrecht: Kluwer Academ. Publ., 1997. — 424 p.
27. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Обобщенные матричные функции Миттаг–Леффлера в игровых задачах для эволюционных уравнений дробного порядка // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 3. — С. 3–32.
28. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Игровые задачи управления для квазилинейных систем с дробными производными Римана–Лиувилля // Там же. — 2001. — № 6. — С. 66–99.
29. Chikrii A.A. Quasilinear controlled processes under conflict, dynamical systems // J. Math. Sci. — 1996. — **80**, N 1. — P. 1489–1518.
30. Чикрий А.А., Дзюбенко К.Г. Билинейные марковские процессы поиска движущихся объектов // Проблемы управления и информатики. — 1997. — № 1. — С. 92–107.
31. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. — М.: Наука, 1975. — 320 с.
32. Пшеничный Б.Н. Метод линеаризации. — М.: Наука, 1983. — 153 с.
33. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. — М.: Наука, 1978. — 280 с.
34. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. — М.: Наука, 1981. — 288 с.
35. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. — М.: Наука, 1981. — 384 с.
36. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1977. — 390 с.
37. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез оптимальных и адаптивных систем управления. Игровой подход. — Киев: Наук. думка, 1985. — 245 с.
38. Чикрий Г.Ц. О поиске неподвижной цели движущимся объектом // ПММ. — 1984. — **48**, № 4. — С. 580–584.
39. Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — Киев: Наук. думка, 2006. — 264 с.
40. Кунцевич В.М., Поляк Б.Т. Инвариантные множества нелинейных дискретных систем с ограниченными возмущениями и задачи управления // Проблемы управления и информатики. — 2009. — № 6. — С. 6–21.
41. Кунцевич В.М., Кунцевич А.В. Синтез робастно устойчивых дискретных систем управления нелинейными объектами // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 12. — С. 15–118.
42. Кунцевич А.В., Кунцевич В.М. Инвариантные множества семейств линейных и нелинейных дискретных систем с ограниченными возмущениями // Там же. — 2011. — № 9. — С. 3–16.
43. Mordukhovich B.S. Variational analysis and generalized differentiation. — Berlin; Heidelberg; New York, Springer, 2006, Ser. Comprehensive Studies in Mathematics. — I. Basic Theory. — **330**. — 582 p.; II. Applications. — **331**. — 612 p.
44. Rockafellar R.T., Wets R.J.-B. Variational analysis. — Berlin: Springer, 1997. — 733 p.
45. Borwein J.M., Zhu Q.J. Techniques of variational analysis. — New York: Springer, 2005. — 366 p.
46. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. — Boston, Massachusetts: Birkhauser, 1990. — 461 p.
47. Chikrii A.A. Method of alternating directions in nonlinear differential games of evasion // Cybernetics. — 1984. — **20**, N 1.— P. 71–82.
48. Pshenichny B.N. On problem of avoidance // Kibernetika. — 1975. — N 4. — P. 120–127.

49. Nikolskii M.S. On a linear escape problem // Soviet. Math. Dokl. — 1974. — **15**, N 5. — P. 1462–1466.
50. Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф. Задача об уклонении от встречи в линейных дифференциальных играх // Дифференциальные уравнения. — 1971. — **7**, N 3. — P. 436–445.
51. Гусятников П.Б. Убегание одного линейного объекта от нескольких более инертных преследователей // Там же. — 1976. — **12**, N 2. — P. 213–226.
52. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. — Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009. — 266 с.
53. Чикрий А.А. Конфликтно-управляемые процессы. — Киев: Наук. думка, 1992. — 384 с.
54. Жуковский В.И., Чикрий А.А. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. — Киев: Наук. думка, 1994. — 320 с.
55. Кривонос Ю.Г., Матичин И.И., Чикрий А.А. Динамические игры с разрывными траекториями. — Киев: Наук. думка, 2005. — 220 с.
56. Chikrii A.A. Optimization of game interaction of fractional-order controlled systems // Int. J. Optimization Methods and Software. — 2008. — **23**, N 1. — P. 39–72.
57. Chikrii A.A. Game dynamic problems for systems with fractional derivatives // Pareto Optimality, Game Theory and Equilibria. — New York: Springer, 2008. — **17**. — P. 349–387.
58. Белоусов А.А., Бердышев Ю.И., Ченцов А.Г., Чикрий А.А. О решении игровой задачи динамического комивояжера // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 5. — С. 40–45.
59. Чикрий А.А., Калашникова С.Ф. Преследование управляемым объектом группы убегающих // Там же. — 1987. — № 4. — С. 1–8.
60. Никольский М.С. Прямой метод в линейных дифференциальных играх с общими интегральными ограничениями // Дифференциальные уравнения. — 1972. — **8**, № 6. — С. 964–971.
61. Зонневенд Д. Об одном методе преследования // ДАН СССР. — 1972. — **204**, № 6. — С. 1296–1299.
62. Азимов А.Я. Об одном способе преследования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1974. — № 2. — С. 31–35.
63. Раппопорт И.С. Об одной задаче преследования несколькими управляемыми обектами при наличии интегральных ограничений // ДАН УССР. Сер А. — 1979. — № 3. — С. 221–224.
64. Чикрий А.А., Безмагорычный В.В. Метод разрешающих функций в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Автоматика. — 1993. — № 4. — С. 26–36.
65. Чикрий А.А., Белоусов А.А. О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2009. — **15**, № 4. — С. 290–301.
66. Белоусов А.А. Дифференциальные игры с интегральными ограничениями на управления в норме $L_1$ // Теория оптимальных решений. — 2011. — № 10. — С. 10–15.
67. Матичин И.И. Управление системами с дробными производными в условиях конфликта // ДАН Украины. — 2011. — № 8. — С. 38–42.
68. Чикрий А.А., Матичин И.И. Представление решений линейных систем с дробными производными Римана–Лиувилля, Капуто и Миллера–Росса // Проблемы управления и информатики. — 2008. — № 3. — С. 133–142.
69. Chikrii A.A., Matychyn I.I. Game problems for fractional-order systems // New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications. — Dordrecht; Heidelberg; London; New York: Springer, 2010. — **11**. — P. 233–241.
70. Чикрий А.А., Матичин И.И. Игровые задачи для линейных систем дробного порядка // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2009. — **15**, № 3. — С. 262–278.
71. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 288 с.
72. Хеллман О. Введение в теорию оптимального поиска. — М.: Наука, 1985 — 248 с.
73. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А. Дискретная модель поиска. — Киев, 1984. — 30 с. (Препр. / АН УССР. Ин-т кибернетики; 84–12).
74. Dzyubenko K.G., Chikrii A.A. On one problem of approach for descrete system under random disturbances // Cybernetics and System Analysis. — 2010. — N 2. — P. 113–125.
75. Альбус Дж., Мейстел А., Чикрий А.А., Белоусов А.Н., Козлов А.И. Аналитический метод решения игровой задачи о «мягкой посадке» для движущихся объектов // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 1. — С. 97–115.
76. Albus J., Meystel A. The Eagle snatch // Proceedings Int. Conf. — National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, USA, 1996. — P. 129–136.
77. Albus J., Meystel A., Chikrii A. Soft landing of moving objects. — Rep., National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, USA. — 137 p.
78. Чикрий А.А. Об одном аналитическом методе в динамических играх сближения // Тр. Математического ин-та РАН им. В.А. Стеклова. — 2010.— **271**. — С. 76–92.

79. Chikrii A.A. Set-valued mapping in game dynamic problems // Proceedings 8th Congress ISAAC–2011. — Moscow, 2011. — 13 p.
80. Чикрий А.А., Матичин И.И. О линейных конфликтно управляемых процессах с дробными производными // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2011. — **17**, № 2. — С. 256–270.
81. Чикрий А.А. Гарантированный результат в игровых задачах управления движением // Там же. — 2010. — 16, № 5. — С. 223–232.
82. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. К теореме об обратном образе для -измеримых многозначных отображений // Докл. НАН Украины. — 2011. — № 11. — С. 54–58.
83. Chikrii A.A., Matychyn I.I., Gromaszek K., Smolarz A. Control of fractional-order dynamic systems under uncertainty // Modelling and Optimization / Ed. by J. Sikora. — Lublin: Publ. Lublin Univ. of Technology, Poland, 2011. — P. 3–56.
84. Chikrii G.Ts. One approach to solution of complex game problems for some quasilinear evolutionary systems // Int. J. of Mathematics, Game Theory and Algebra. — 2004. — **14**, N 4. — P. 307–314.
85. Чикрий Г.Ц. Использование эффекта запаздывания информации в дифференциальных играх преследования // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 2. — С. 90–105.
86. Чикрий Г.Ц. Об одной задаче сближения для затухающих колебаний // Проблемы управления и информатики. — 2009. — № 5. — С. 5–12.
87. Чикрий Г.Ц. Об одной игровой задаче мягкой встречи двух разнотипных объектов // Теория оптимальных решений. — 2011. — № 10. — С. 31–37.
88. Пшеничный Б.Н., Ненахов Э.И., Кузьменко В.Н. Комбинированный метод решения общей задачи выпуклого программирования // Кибернетика и системный анализ. — 1998. — № 4. — С. 121–133.
89. Кузьменко В.Н., Ненахов Э.И. Алгоритм решения квадратичной задачи в PNK-методе // Теория оптимальных решений. — Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2011. — С. 76–83.
90. Ненахов Э.И. О матричных задачах оптимизации // Теория оптимальных решений. — 2010. — С. 79–85.
91. Ненахов Э.И., Соболенко Л.А. Метод линеаризации и негладкая оптимизация // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2009. — № 3. — С. 90–104.
92. Остапенко В.В., Соболенко Л.А. Упаковки различных эллипсоидов в параллелепипед с минимальной суммой сторон // Материалы XI Междунар. науч.-техн. конф. «Системный анализ и информационные технологии» (26–30 мая 2009 г; Киев). — Киев: УНК «ИПСА» НТУУ «КПИ», 2009. — С. 168.
93. Кирик Е.Е., Пшеничный Б.Н. Теория и методы расчета сетей // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 1995. — **2**, вып. 1. — С. 46–69.
94. Кірік О.Є. Алгоритми ітераційного квадратичного програмування для задач оптимального розподілу потоків // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2008. — № 1. — С. 101–113.
95. Кірік О.Є. Проблема існування розв'язку в задачах розподілу потоків // Там же. — 2011. — № 4. — С. 119–128.
96. Кірік О.Є., Остапенко В.В. Оптимальній розподіл гідроресурсів у зрошувальних системах мережевої структури // Там же. — 2010. — № 4. — С. 79–90.
97. Эйдельман С.Д., Чикрий А.А. Динамические игровые задачи сближения для уравнений дробного порядка // Укр. мат. журн. — 2000. — № 11. — С. 1566–1583.
98. Chikrii A.A., Eidelman S.D. Game problems for fractional quasilinear systems // Int. J. Computers and Mathematics with Applications. — 2002. — **44**. — P. 835–851.
99. Klimenko He.V., Chikrii A.A. Search methods for moving evaders // Int. J. Facta universitatis. Jugoslavia: University of Nis. — 1994. — **1**, N 4 — P. 451–460.
100. Полинкевич К.Б., Онопчук Ю.Н. Конфликтные ситуации при регулировании основной функции системы дыхания организма и математические модели их разрешения // Кибернетика. — 1986. — № 3. — С. 100–104.
101. Колчинская А.З., Пшеничный Б.Н., Онопчук Ю.Н. и др. Моделирование динамики массопереноса газов в организме человека // Кибернетика и вычисл. техника. — 1978. — Вып. 40. — С. 54–61.
102. Онопчук Ю.Н., Мисюра А.Г. Методы математического моделирования и управления в теоретических исследованиях и решении прикладных задач спортивной медицины и физиологии // Спортивна медицина. — 2008. — № 1. — С. 181–189.

*Поступила 06.12.2011*