УДК 519.872

Е.В. КОБА, С.В. ПУСТОВАЯ

СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ ТИПА ЛАКАТОША, ИХ ОБОБЩЕНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ

Ключевые слова: *СМО, системы очередей с возвращением, орбита, системы типа Лакатоша, системы очередей с циклическим временем возвращения.*

ВВЕДЕНИЕ

Венгерский математик, профессор Будапештского университета им. Й. Лоранда, Л. Лакатош впервые рассмотрел особый тип систем массового обслуживания (СМО) с возвращением заявок [1], так называемые СМО с циклическим временем возвращения (cyclic waiting time).

Модель Лакатоша [1] представляет собой одноканальную СМО с постоянным временем T цикла орбиты, без потерь, без мест ожидания (без классической очереди), с неограниченной орбитой и дисциплиной обслуживания в порядке очереди FCFS (First Come, First Served). Автор рассматривал такую систему как модель, которая возникла при исследовании процесса посадки воздушных судов (ВС) в связи с тестированием имитационной модели. Дисциплина FCFS для систем с циклическим ожиданием состоит в следующем: если канал свободен и на орбите отсутствуют заявки, поступившая заявка обслуживается немедленно, в противном случае (канал занят и/или на орбите находятся заявки) она отправится на орбиту и будет обслужена через время, кратное циклу орбиты.

В [2] классифицированы системы с повторением заявок, и подобного вида СМО названы СМО типа L или системы типа Лакатоша.

Поскольку источником математических моделей авторов настоящей статьи были работы Лакатоша, ниже приведен детальный обзор этих работ.

ОБЗОР РАБОТ ЛАКАТОША

Система Лакатоша $M / M / 1$. В [1] рассмотрена СМО, в которой входящий поток — пуассоновский с параметром λ; время обслуживания распределено по экспоненциальному закону с параметром μ; обслуживание заявки начинается сразу в момент ее появления в системе или в моменты, отличающиеся на время, кратное некоторому T, в соответствии с дисциплиной FCFS. Изучено поведение такой СМО методом вложенных цепей Маркова, состояния которой соответствовали количеству заявок в системе в моменты $t_k - 0$, где t_k — момент начала обслуживания k-й заявки. Были найдены (как в рассматриваемой системе, так и во всех исследуемых) матрица переходных вероятностей состояний цепи, производящие функции ее элементов и эргодического распределения вероятностей, а также условие существования эргодического распределения, которое имеет вид

$$\frac{\lambda}{\mu} < \frac{e^{-\lambda T}(1-e^{-\mu T})}{1-e^{-\lambda T}}.$$

Система Лакатоша $Geom / Geom / 1$. В [3, 4] Лакатош модифицирует систему из [1] и доказывает соответствующую теорему эргодичности, а также рассматривает системы с T-возвращением, в которых заявки поступают в интервалах, кратных T / n, где n — целое число. В каждом из этих интервалов может появиться новая заявка с вероятностью r или не появиться с вероятностью $1-r$. Если заявку начали обслуживать, то в произвольном T / n-м интервале обслуживание может закончиться с вероятнотью q и не закончиться с вероятностью $1-q$.

Следовательно, если ξ — интервал между поступлениями заявок и Y — время обслуживания, то

$$P\left\{\xi = k\frac{T}{n}\right\} = q(1-q)^{k-1},\ k \geq 1;\ P\left\{Y = k\frac{T}{n}\right\} = r(1-r)^{k-1},\ k \geq 1.$$

Лакатош называет случайные величины ξ и Y геометрично распределенными, однако, строго говоря, геометрично распределенными являются величины $\xi / \frac{T}{n}$ и $Y / \frac{T}{n}$.

Таким образом, рассмотрена дискретная СМО с циклическим временем ожидания, в которой как входящий поток, так и время обслуживания распределены по геометрическому закону с параметрами r и q соответственно. Вложенная цепь Маркова системы определяется аналогично системе $M / M / 1$.

Условием существования эргодического распределения является неравенство

$$\left(\frac{rq}{1-q^n}\right)\left(\frac{1-q^n(1-r)^n}{1-q(1-r)}\right) < (1-r)^n.$$

Система Лакатоша M / $Unif$ / 1. Эта модель [5, 6] возникла в связи с верификацией результатов моделирования процесса посадки ВС. По мнению Лакатоша, аналитическая модель $M / M / 1$ с циклическим временем ожидания не описывает всех деталей реальной системы, однако дает точные аналитические результаты.

Обобщив задачу, Лакатош описал модель реальной системы следующим образом: СМО имеет входящий поток Пуассона с параметром λ; время обслуживания заявки — равномерно распределенная величина на отрезке $[c, d]$; значения c и d кратны времени цикла орбиты T; обслуживание заявки начинается сразу в момент t поступления в систему или в моменты, кратные величине T, в соответствии с дисциплиной FCFS.

В [5, 6] данная СМО исследована методом вложенных цепей Маркова, найдены производящие функции элементов матрицы переходных вероятностей и установлено условие существования эргодического распределения, которое имеет вид

$$\frac{\lambda(c+d+T)}{2} < 1.$$

Предельные распределения для систем Лакатоша $M / M / 1$ и M / $Unif$ / 1. В [7] Лакатош заметил, что в процессе циклического ожидания может создаться ситуация, когда канал обслуживания уже свободен, а заявка еще не готова повторно обслуживаться. Таким образом, процесс обслуживания последовательности заявок не является непрерывным, возникают периоды простоя канала, которые не превышают величины T (цикла очереди). Понятно, что влияние простоя канала на функционирование системы становится меньшим при $T \to 0$ и в предельном случае процесс обслуживания становится непрерывным.

В [7] были выведены аналитические выражения для предельных распределений. Производящая функция предельного распределения для системы с циклическим ожиданием в случае экспоненциального распределения времени обслуживания при $T \to 0$ имеет вид

$$P^*(z) = \frac{1-\rho}{1-\rho z},\ \rho = \frac{\lambda}{\mu},$$

если $\rho < 1$, а в случае равномерного распределения времени обслуживания при $T \to 0$ имеет вид

$$P^*(z) = (1 - \frac{\lambda(c+d)}{2}) \frac{(1-z)[e^{-\lambda(1-z)c} - e^{-\lambda(1-z)d}]}{e^{-\lambda(1-z)c} - e^{-\lambda(1-z)d} - \lambda z(d-c)(1-z)}.$$

Обобщенная система Лакатоша M / M / 1 — система с отказами. Для модели с повторением $M / M / 1$ из [1] были сделаны обобщения, а именно: система с повторением трактуется как система, принимающая на обслуживание заявки двух типов. На вход такой системы обслуживания [8] поступают два потока Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2, время обслуживания обоих типов заявок распределено по экспоненциальному закону с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно. На заявки второго типа ограничений нет, заявки первого типа могут поступать на обслуживание только в свободную систему, если же в ней находится одна заявка первого типа, то всем другим заявкам этого типа будет отказано в обслуживании и они покинут систему.

Условие существования эргодического распределения сводится к неравенству

$$\frac{\lambda_2}{\mu_2} < \frac{e^{-\lambda_2 T}(1 - e^{-\mu_2 T})}{1 - e^{-\lambda_2 T}}.$$

ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ЛАКАТОША, СИСТЕМА $GI / G / 1$ С T-ВОЗВРАЩЕНИЕМ

Рассмотрим одноканальную СМО с рекуррентным входящим потоком и непрерывной функцией распределения $A(x)$ времени между поступлением заявок, общей функцией распределения $B(x)$ времени обслуживания, постоянным временем T пребывания заявки на орбите и дисциплиной FCFS. Таким образом, модель Лакатоша $M / M / 1$ из [1] можно обобщить по входящему потоку и времени обслуживания [9].

Пусть t_n — момент поступления n-й заявки, $t_n + Tk_n$ — момент начала ее обслуживания. Отметим, что k_n — всегда целое неотрицательное число, которое равно числу циклов n-й заявки на орбите. Пусть также $\xi_n = t_{n+1} - t_n$, Y_n — время обслуживания n-й заявки.

Найдем соотношение между k_n и k_{n+1}. Пусть $k_n = i$. Если $(k-1)T < Ti + Y_n - \xi_n < kT$, где $k \geq 1$ — целое число, то $k_{n+1} = k$; если $Ti + Y_n - \xi_n < 0$, то $k_{n+1} = 0$. Таким образом, k_n является однородной цепью Маркова с вероятностями перехода p_{ik}, где

$$p_{ik} = P\{(k-i-1)T < Y_n - \xi_n < (k-i)T\}$$

при $k \geq 1$;

$$p_{i0} = P\{Y_n - \xi_n < -Ti\}.$$

Обозначим $f_j = P\{(j-1)T < Y_n - \xi_n < jT\}$. Имеем

$$f_j = \int_0^\infty [B(x+jT) - B(x+(j-1)T)]\, dA(x). \qquad (1)$$

Тогда вероятности перехода можно выразить

$$p_{ik} = f_{k-i}, \text{ если } k \geq 1; \qquad (2)$$

$$p_{i0} = \sum_{j=-\infty}^{-i} f_j. \qquad (3)$$

Теорема 1. Если ряд $\sum_{j=-\infty}^{\infty} jf_j$ абсолютно сходится, причем $\sum_{j=-\infty}^{\infty} jf_j < 0$, то цепь Маркова (k_n) эргодична.

Мажорирование общего процесса обслуживания. Система типа Лакатоша может применяться для оценки более сложных систем, в которых не обязательно обслуживание в порядке очереди. Во многих ситуациях модели с дисциплиной обслуживания FCFS не адекватны реальным системам. В частности, это может иметь место в системе посадки ВС, когда во время пребывания в воздухе самолета, отправленного на круг, осуществляется посадка другого самолета. Если, однако, рассмотреть время W_n от момента t_n до начала посадки последнего из прибывших самолетов, то всегда будет $W_n \le Tk_n$, а следовательно, условие теоремы 1 гарантирует эргодичность W_n-последовательности более сложной структуры.

Уравнения для стационарного распределения. Примем $\pi_k = \lim_{n\to\infty} P\{k_n = k\}$, предполагая, что выполнено условие теоремы 1. Имеем систему уравнений

$$\pi_k = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ik}, \ j \ge 0;$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1. \tag{4}$$

Из равенств (2), (3) следует

$$\pi_k = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i f_{k-i}, \ k \ge 1;$$

$$\pi_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \sum_{j=-\infty}^{-i} f_j. \tag{5}$$

Данную систему можно решить рекуррентным способом. Примем условие, что время обслуживания заявки всегда меньше или равно T, т.е. $B(T) = 1$. Предположим также, что $f_{-1} > 0$. В этом случае из формулы (1) вытекает, что $f_j = 0$ при всех $j \ge 2$. Имеем

$$\pi_k = \sum_{j=0}^{k+1} \pi_i f_{k-i}, \ k \ge 1.$$

В описанной выше системе уравнений все неизвестные $\pi_2, \pi_3, \ldots$ можно обозначить π_0 и π_1, например $\pi_2 = \frac{1}{f_{-1}}(\pi_1(1-f_0) - \pi_0 f_1)$. Таким образом, имеем

$$\pi_k = a_k \pi_0 + b_k \pi_1, \ k \ge 0, \tag{6}$$

где a_k, b_k — известные константы ($a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $a_1 = 0$, $b_1 = 1$). Подставив (6) в (5), получим линейное соотношение между π_0 и π_1, что позволит все π_k обозначать π_0. Для определения последнего достаточно использовать условие нормировки (4).

ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ЛАКАТОША $GI/G/1$ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОРБИТОЙ

Рассмотрим одноканальную СМО. Обозначим t_n n-й момент появления заявки, $n \ge 0$; $\xi_n = t_n - t_{n-1}$, $n \ge 1$. Предположим, что ξ_n — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $A(x) = P\{\xi_n \le x\}$.

Обозначим Y_n время обслуживания n-й заявки и примем $U_n = Y_{n-1} - \xi_n$, $n \ge 1$. Предположим, что U_n — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $C(x) = P\{U_n \le x\}$, $-\infty < x < \infty$.

Если n-я заявка поступает в свободную систему (т.е. заявки отсутствуют как в канале обслуживания, так и на орбите), то она направляется к каналу обслуживания немедленно; в противном случае n-я заявка направляется на орбиту и возвращается, пытаясь обслужиться. Если канал занят, то заявка идет на орбиту. Таким образом, заявки могут поступать на обслуживание в моменты $t_n+\gamma_{n1}$, $t_n+\gamma_{n1}+\gamma_{n2}$, ..., где γ_{nk} — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $D(x)=P\{\gamma_{nk}\le x\}$. При этом n-я заявка поступает в канал обслуживания сразу же по возвращении с орбиты, однако не раньше чем $(n-1)$-я заявка обслужится. Предположим, что случайные последовательности (ξ_n), (U_n), (γ_{nk}) статистически независимые.

Итак, обобщение модели Лакатоша $GI/G/1$ осуществляется по входящему потоку, времени обслуживания и времени пребывания на орбите [10].

Для исследования описанной СМО рассмотрим цепь Маркова $(W_n, n\ge 0)$, где W_n — время ожидания n-й заявки к началу обслуживания. В общем случае величина W_n может принимать любое неотрицательное значение. Если γ_{nk} представляют собой дискретные случайные величины, то и W_n является дискретной. Если система начинает функционировать в момент времени t_0, то $W_0=0$.

Для получения основного стохастического соотношения введем случайную величину

$$Z_n(y)=\begin{cases}\min\{\gamma_{n1}+\ldots+\gamma_{nk}\ \ge\ y\}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

Таким образом, $Z_n(y)$ является первым значением случайного блуждания, которое достигает или превышает уровень y (рис. 1).

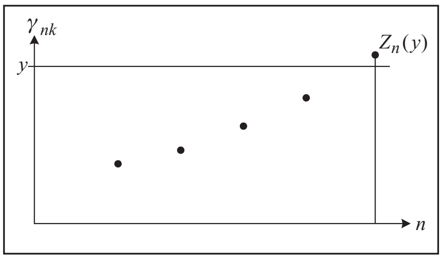

Рис. 1. Построение величины $Z_n(y)$ по зависимости γ_{nk} от n

В случае, когда зависимость от n не существенна, вместо $Z_n(y)$, γ_{nk} будем использовать $Z(y)$, γ_k.

Таким образом, основное стохастическое соотношение будет иметь вид

$$W_n=Z_n(W_{n-1}+U_n),\ \ n\ge 1. \tag{7}$$

Действительно, $(n-1)$-я заявка поступит в канал обслуживания в момент $t_{n-1}+W_{n-1}$; ее обслуживание продлится до момента времени $t_{n-1}+W_{n-1}+Y_{n-1}$. Если $t_{n-1}+W_{n-1}+Y_{n-1}\le t_n$, то имеем $W_n=0$ или, что эквивалентно, $W_{n-1}+U_n\le 0$, поскольку $U_n=Y_{n-1}-(t_n-t_{n-1})$. Если $W_{n-1}+U_n=y>0$, то $(n-1)$-я заявка будет обслужена в момент времени t_n+y, откуда следует, что время ожидания n-й заявки равно $Z_n(y)$, что является первой суммой циклов орбиты, которая не меньше y.

Предположим, что цепь Маркова (W_n) имеет стационарную функцию распределения $F(w)$. Учитывая соотношение (7), можем записать для этой функции уравнения

$$F(w)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty C(-x)\,dF(x), & w\le 0,\\ \displaystyle\iint\limits_{0<x+u\le w}\Phi(w,x+u)\,dF(x)\,dC(u), & w>0,\end{cases}$$

где $\Phi(w,y)=P\{Z(y)\le w\}$. Уравнение нормировки в этом случае также выполняется и имеет вид $F(\infty)=1$.

Таким образом, для цепи Маркова (W_n) можно получить условие устойчивости. Здесь, как обычно в теории СМО, устойчивость понимается как статистическая ограниченность $\lim\limits_n \inf F_n(w)\to 1$ при $w\to\infty$.

Условие эргодичности при решетчатой функции распределения времени на орбите. Предположим, что случайные величины γ_{nk} являются решетчатыми случайными величинами с максимальным шагом $\Delta > 0$, т.е. γ_{nk} / Δ — целые числа и вместе с тем при любом $\delta > \Delta$ величины γ_{nk} / δ не являются целыми с положительной вероятностью.

Примем $d(j) = P\{\gamma_{nk} = j\Delta\}$, $j \ge 0$, предполагая, что $d(0) = 0$, т.е. время на орбите — положительная величина, а также будем считать, что

$$d_1 = \mathrm{E}\{\gamma_{nk}\} = \Delta \sum_{j=0}^{\infty} j d(j), \qquad d_2 = \mathrm{E}\{\gamma_{nk}^2\} = \Delta^2 \sum_{j=0}^{\infty} j^2 d(j)$$

при условии, что d_2 является ограниченной величиной.

Теорема 2. Если выполняется неравенство

$$\Delta \sum_{j=-\infty}^{\infty} jP\{j\Delta < U_n \le (j+1)\Delta\} + \frac{d_2 + \Delta d_1}{2d_1} < 0, \tag{8}$$

то цепь Маркова (W_n) стохастически ограничена.

Условие эргодичности при нерешетчатой функции распределения времени на орбите. Пусть $D(x)$ — нерешетчатая функция распределения; $D(0) = P\{\gamma_{nk} = 0\} = 0$; d_1 и $d_2 < \infty$ — первый и второй моменты этого распределения.

Теорема 3. Если выполняется неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dC(x) + \frac{d_2}{2d_1} < 0, \tag{9}$$

то последовательность (W_n) стохастически ограничена.

Доказательства теорем 2 и 3 приведены в [10].

Рассмотрим частные случаи и замечания.

Случай 1. Рассмотрим систему типа Лакатоша [1], в которой время на орбите $T > 0$. В этом случае

$$\frac{d_2 + \Delta d_1}{2d_1} = T.$$

Случай 2. При доказательстве теоремы 3 строится цепь Маркова (V_n), члены которой кратны некоторому $\Delta > 0$ и удовлетворяют свойству $W_n \le V_n$, $n \ge 0$.

Очевидно, что если доказана стохастическая ограниченность (V_n), то это же можно сказать и о последовательности (W_n).

Построим цепь Маркова (V_n). Выберем $\Delta > 0$ и рассмотрим функцию $\psi(x) = \min\{n\Delta \ge x,\ n \in \{1, 2, \dots\}\}$. Имеем $x \le \psi(x) \le x + \Delta$.

Положим $V_0 = \psi(W_0)$ и определим рекурсивно V_n как

$$V_n = \psi(Z_n(V_{n-1} + U_n)), \; n \ge 1.$$

Очевидно, обе функции $\psi(x)$ и Z_n — неубывающие, откуда и следует, что

$$\{V_{n-1} \ge W_{n-1}\} \Rightarrow \{V_n \ge W_n\}.$$

Пусть $D(x) = 1 - e^{-\nu x}$, $x \ge 0$; $\dfrac{d_2}{2d_1} = \dfrac{1}{\nu}$. Если $\nu \to \infty$, то условие $W_n \le V_n$, $n \ge 0$, преобразуется в известное условие стационарности $\int_{-\infty}^{\infty} x dC(x) < 0$ для системы массового обслуживания $GI / G / 1$.

Замечание 1. Условия стационарности (8) и (9) нельзя существенно улучшить: если знак < в каждом из этих условий заменить на >, то система не будет статистически ограниченной.

Замечание 2. Как условие (8), так и условие (9) сами по себе не являются достаточными для эргодичности цепи Маркова (W_n). Однако эта последовательность эргодична, если выполняется дополнительное условие $C(x)>0$ для всех отрицательных значений x.

СТАЦИОНАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ ЛАКАТОША $GI/G/1$ С T-ВОЗВРАЩЕНИЕМ

Рассмотрим одноканальную СМО Лакатоша с общим распределением времени между моментами поступления заявок входящего потока, с общим распределением времени обслуживания заявки и постоянным временем одного цикла пребывания заявки на орбите [11].

Пусть $A(t)$ — функция распределения времени между моментами поступления заявок, $B(t)$ — функция распределения времени обслуживания Y_n n-й заявки, t_n — момент поступления n-й заявки, t_n+V_n — момент окончания ее обслуживания, T — время пребывания заявки на одном цикле орбиты.

Цепь Маркова. Учитывая порядок формирования очереди и дисциплину обслуживания в системе, имеем: если $t_n \ge t_{n-1}+V_{n-1}$, то n-я заявка поступает на обслуживание в момент t_n и тогда $V_n=Y_n$; если для некоторого целого $k\ge 1$ выполняется неравенство $(k-1)T < t_{n-1}-t_n+V_{n-1}\le kT$, то n-я заявка поступает на обслуживание в момент t_n+kT, т.е. $V_n=kT+Y_n$.

Таким образом, обслуживание n-й заявки начинается в момент t_n+k_nT, где k_n — минимальное целое число, при котором в данный момент система свободна от всех предыдущих заявок (k_nT — время пребывания заявки на орбите).

Случайная последовательность (k_n) представляет собой однородную цепь Маркова. В общем случае разность k_n-k_{n-1} может быть сколь угодно большой. Однако в известных авторам данной статьи задачах (например, в некоторых системах аэродромного обслуживания) естественно принять условие, при котором всегда время обслуживания $Y_n\le T$, или

$$B(T)=1. \tag{10}$$

Условие (10) обеспечивает неравенство $k_{n+1}-k_n\le 1$. Действительно, если $k_{n-1}=k$, то n-я заявка будет принята на обслуживание не позднее чем $t_{n-1}+(k+1)T$, т.е. $k_n\le k+1$.

Примем

$$f_k=P\{(k-1)T<Y_{n-1}-(t_n-t_{n-1})\le kT\}=$$
$$=\int_0^T (A(y-(k-1)T)-A(y-kT))dB(y).$$

Тогда при условии (10) $\sum_{k=-\infty}^{1} f_k=1$.

Пусть p_{ij} — вероятности перехода цепи Маркова (k_n), тогда

$$p_{ij}=f_{j-i} \text{ при } 1\le j\le i+1; \tag{11}$$

$$p_{i0}=\sum_{k=-\infty}^{-i} f_k. \tag{12}$$

Цепь Маркова (k_n) представляет собой дискретное случайное блуждание с ограниченным справа скачком. Условие ее эргодичности известно в теории массового обслуживания [12]. Благодаря условию (10) оно перепишется так:

$$\sum_{k=-\infty}^{1} k f_k < 0. \tag{13}$$

Стационарное распределение цепи Маркова. Предположим, что условие (13) выполняется, и обозначим $\upsilon = (\upsilon_j)$ стационарное распределение цепи Маркова (k_n). Из уравнений (11), (12) имеем систему уравнений

$$\upsilon_j = \sum_{i=j-1}^{\infty} \upsilon_i f_{j-i} \quad \text{при} \quad j \ge 1; \tag{14}$$

$$\upsilon_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \upsilon_i \sum_{k=-\infty}^{-i} f_k. \tag{15}$$

К уравнениям (14), (15) добавляется условие нормировки

$$\sum_{j=0}^{\infty} \upsilon_j = 1.$$

Используя прямую подстановку, можно убедиться, что при условии (13) система (14), (15) имеет вероятностное решение

$$\upsilon_j = (1-z) z^j, \ \ j \ge 1,$$

где z — корень уравнения

$$\sum_{k=-\infty}^{1} f_k z^{-k} = 1, \tag{16}$$

который лежит в интервале (0, 1).

Левая часть уравнения (16) представляет собой выпуклую в полуинтервале (0, 1] функцию, которая стремится к бесконечности при $z \to 0$, поскольку $f_1 > 0$, и равна единице при $z = 1$. Кроме того, левая производная этой функции в точке $z = 1$ положительна благодаря условию (13).

Таким образом, в интервале $(0, 1)$ существует единственный корень уравнения (16). Это также следует из теории непрерывных справа случайных блужданий [12].

Рассмотрим случай, когда время обслуживания $Y_n = \tau$, $t_n - t_{n-1}$ распределено экспоненциально с параметром λ. Тогда $f_1 = 1 - e^{-\lambda\tau}$; $f_k = e^{-\lambda\tau + \lambda k T}(1 - e^{-\lambda T})$ при $k \le 0$. Условие эргодичности (13) приобретает вид $z < 1$, где $z = e^{\lambda T}(1 - e^{-\lambda\tau})$.

Пусть поток заявок, которые поступают в систему, является групповым пуассоновским, причем число ζ заявок в одной группе — геометрически распределенная случайная величина $P\{\zeta = k\} = (1-\theta)\theta^{k-1}$, $k \ge 1$, а интервалы между группами — экспоненциально распределенные случайные величины с параметром λ. Тогда имеем $f_k = \theta 1_{\{k=1]} + (1-\theta) f_k^0$, где f_k^0 — значение f_k при ординарном (негрупповом) потоке Пуассона с параметром λ; $1_{\{k=1]}$ — величина, равная единице при $k = 1$ и нулю — в противном случае; $f_k^0 = e^{-\lambda(\tau - kT)}(1 - e^{-\lambda T})$ при $k \le 0$; $f_1^0 = 1 - e^{-\lambda\tau}$.

Для параметра z существует уравнение

$$\frac{\theta}{z}+(1-\theta)\left(\frac{1-a}{z}+\frac{a(1-b)}{1-bz}\right)=1$$

или

$$\theta+(1-\theta)\left(1-a+az\frac{1-b}{1-bz}\right)=z,$$

где для упрощения примем $a=e^{-\lambda\tau}$; $b=e^{-\lambda T}$. Решив данное уравнение, получим формулу для z при условии, что $z<1$:

$$z=\frac{1-a+a\theta}{b}=\frac{1-e^{-\lambda\tau}+e^{-\lambda\tau}\theta}{e^{-\lambda T}}\quad.$$

Если $\theta\to 0$, то $z\to\frac{1-a}{b}$, что соответствует случаю пуассоновского потока заявок.

Среднее число заявок на орбите. Пусть $N(t)$ — число заявок на орбите в момент t. Тогда интеграл $\int_0^T N(t)\,dt$ — суммарное время пребывания на орбите заявок, поступивших в систему в интервале $(0,T)$, за исключением остаточного времени ожидания заявок, которые не были приняты на обслуживание в момент T. Из эргодических соображений при больших значениях s

$$\int_0^s \mathrm{E}[N(t)]\,dt\ \sim\ \lambda s\mathrm{E}[KT],\ \ \lambda=\frac{1}{\int_0^\infty x\,dA(x)},$$

где K — стационарная версия k_n.

Отсюда эргодическое среднее число заявок на орбите

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}\int_0^s \mathrm{E}[N(t)]=\lambda T\sum_{k=0}^{\infty}k(1-z)z^k=\frac{\lambda Tz}{1-z}.$$

Стационарное среднее число $\overline{K}$ циклов пребывания заявки на орбите определяется формулой $\overline{K}=\frac{z}{1-z}$.

УСЛОВИЕ ЭРГОДИЧНОСТИ СИСТЕМЫ ЛАКАТОША $SM/SM/1$

В [13] обобщены условия эргодичности, когда величины ξ_n, Y_n, γ_{nk} могут быть зависимыми и имеют такой же смысл, что и ранее, а W_n будет обозначать остаточное время до выхода из системы $(n-1)$-й заявки в момент поступления n-й заявки.

Предположим, что зависимость указанных выше величин моделируется с помощью эргодичной цепи Маркова $(\omega_n, n\ge 0)$ с состояниями $1,2,\ldots,\ r$ матрицей переходов $G=(g_{ij})$ и эргодическим распределением $\pi=(\pi_1,\ldots,\pi_r)$. Примем следующие предположения:

• если известны значения $\omega_0,\ldots,\omega_n$, то случайные величины $\xi_1,\ldots,\xi_{n+1}$; $Y_0,\ldots,Y_n$; $0\le j\le n$ и $k>0$ в совокупности независимы;

• выполняются соотношения

$$P\{\xi_{n+1} \le x \big| \omega_n = i\} = A_i(x),$$

$$P\{Y_n \le x \big| \omega_n = i\} = B_i(x),$$

$$P\{\gamma_{nk} \le x \big| \omega_n = i\} = D_i(x)$$

независимо от значений ω_s, $s \ne n$.

Далее примем

$$a_i = \int_0^\infty x dA_i(x),\ b_i = \int_0^\infty x dB_i(x),\ d_{is} = \int_0^\infty x^s dD_i(x);\quad a = \sum_{i=1}^r a_i \pi_i,\ b = \sum_{i=1}^r b_i \pi_i$$

(используются только значения $s = 1, 2$).

Теорема 4. Если $A_i(x) < 1\ \forall x > 0$, $D_i(x)$ — нерешетчатые функции распределения и выполняется неравенство

$$b - a + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \frac{d_{i2} \pi_i}{d_{i1}} < 0,$$

то цепь Маркова (ω_n, W_n) эргодична.

Доказательство теоремы 4 приведено в [13].

Замечание 3. Получение приведенных результатов требует особой техники вероятностных оценок в конкретных случаях; тем не менее все доказательства основаны на некоторых общих идеях. Во всех случаях рассматривается цепь Маркова (X_n, Z_n), где $X_n \ge 0$, Z_n — вектор дополнительных переменных. Тем или иным способом устанавливаются неравенства $E\{X_n - X_0 \mid X_0 = x, Z_0 = z\} \le -\varepsilon$, $x > x_0$, при некоторых n и $\varepsilon > 0$ и $E\{X_1 \mid X_0 = x, Z_0 = z\} \le c$, $x \le x_0$. Наконец, используется существование моментов очистки и обновления [14].

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ ЛАКАТОША

Как уже отмечалось, модели Лакатоша легли в основу математических моделей процесса посадки ВС, в которых входящий поток — поток ВС, прибывающих в аэропорт, цикл орбиты — повторный круг или прямоугольный маршрут ВС в зоне ожидания, канал обслуживания — взлетно-посадочная полоса (ВПП). Отметим, что зона ожидания представляет собой несколько кругов, расположенных один над другим; организация зоны ожидания и движение в ней осуществляются при соблюдении всех норм эшелонирования. Причинами отправления ВС на второй круг (в зону ожидания) могут быть метеоусловия, неготовность ВПП, некорректная позиция ВС при заходе на посадку, нарушение норм эшелонирования и др. При этом использование дисциплины FCFS оправдано тем, что маневр обгона как на круге, так и в зоне ожидания не допускается. В общем случае прежде чем сесть, ВС может повторить круг несколько раз. Таким образом, ВС по прибытии в зону аэродрома может быть обслуженным (посаженным) сразу или через время, кратное некоторой величине T.

Нельзя сказать, что модель Лакатоша полностью адекватна реальной системе посадки. При готовности полосы диспетчер может посадить вновь прибывший самолет, когда на круге или в зоне ожидания находятся другие ВС. Решение об очередности посадки принимается диспетчером в каждом конкретном случае отдельно: здесь учитываются и состояние полосы, и запас топлива, и местонахождение ВС на круге, и многие другие факторы. При этом следует отметить, что не всегда перестройка очереди дает более оптимальное обслуживание [15], что на каждом аэродроме свои размеры зоны ожидания и круга (прямоугольного маршрута), а также свои схемы маршрутов подхода. Поэтому нельзя делать общих выводов относительно очередности обслуживания с заполненными зонами ожидания.

Однако модель Лакатоша пока единственная, которая аналитически описывает систему посадки при заполненной зоне ожидания и при этом дает точные аналитические выражения, позволяющие оценить пропускную способность аэродрома (в данном случае с одной ВПП).

Отметим также, что в некоторых аэропортах имеются несколько зон ожидания (например, в Хитроу) и несколько ВПП (например, в Борисполе), что обусловливает рассмотрение новых моделей типа Лакатоша, а именно многоорбитных и многоканальных.

Системы Лакатоша с повторениями можно также использовать при моделировании функционирования таких телекоммуникационных систем, как простые call-центры [16–20] типа служб телефонной справки.

Рассмотрим процесс функционирования простого call-центра, предоставляющего услуги по консультированию клиентов. На вход call-центра с некоторой интенсивностью поступают вызовы от абонентов телефонной сети. Если в момент вызова в call-центре есть свободный оператор, абонент обслуживается и завершает разговор. Если же в момент поступления первичного вызова все каналы заняты, абонент будет помещен в виртуальную очередь, ему сообщат его порядковый номер, а также будет включено музыкальное сопровождение. Абоненты помещаются в виртуальную очередь и обслуживаются из нее по дисциплине FCFS. В качестве модели такой системы можно рассматривать многоканальную систему очереди с повторениями вызовов типа Лакатоша: многоканальная система обслуживания, на орбите которой находятся звонки, пребывающие в виртуальной очереди call-центра.

Системы Лакатоша с повторениями вызовов с орбитой также применимы в компьютерных системах и сетях [21]. В частности, в оптических буферах с кольцевыми резонаторами (IBM, 2006) [22], используемых в межкристальных соединениях, применяется принцип задержки светового сигнала следующим образом. Когда световод имеет форму кольца, свет вынужден многократно двигаться по кругу на резонансных частотах, таким образом увеличивая задержку прохождения сигнала. Оптический буфер с кольцевым резонатором состоит из множества последовательных световодных колец, по которым проходят световые сигналы. Можно рассматривать систему Лакатоша с повторениями вызовов как модель данного устройства, поскольку световые сигналы не могут «обгонять» друг друга и всегда следуют один за другим. В качестве обслуживающего прибора, к которому нужно пройти сигналу, в данном случае выступает оперативная память какого-либо устройства (процессора, RAM и т.п.).

Другой тип оптических буферов используется в оптических компьютерных сетях, предназначенных для задержки световых импульсов при преобразовании оптического сигнала в электрический. Современные оптические сети функционируют по технологии плотного волнового мультиплексирования DWDM (Dense Wavelength Division Multiplexing) — передача и уплотнение в одном оптоволокне нескольких оптических сигналов с различными длинами волн, которая позволяет передавать данные со скоростью более 10 Тбит/с. Пакетная коммутация по этим оптическим линиям тем не менее требует преобразования скоростей по линиям, чтобы они соответствовали эквивалентным коммутационным свойствам узлов сети. Поскольку пакетные коммутаторы выполняют обработку более медленных электронных сигналов, коммутация становится проблематичной в терминах сетевых скоростей. Использование новых пакетно-ориентированных технологий таких, как оптическая пакетная коммутация OPS (Optical Packet Switching) и OBS (Optical Burst Switching) поможет решить эту проблему, выполняя коммутацию оптических сигналов. Оптические буферы обеспечивают решение для внешнего блокирования сигнала, которое возникает каждый раз, когда два или более пакетов данных поступают по одному и тому же адресу в одно и то же время. Поскольку свет нельзя хранить «на месте», данные буферизуются путем их пересылки по оптической линии задержки FDL (Fiber Delay Line) соответствующей длины, которая выбирается из набора FDL-линий с помощью переключающей матрицы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дан обзор работ профессора Лакатоша, посвященных СМО с циклическим ожиданием. Представлены аналитические результаты для разных модификаций таких СМО. Лакатошем были выведены условия существования эргодического распределения для систем $M/M/1$, $Geom/Geom/1$ и $M/Unif/1$; для СМО $M/M/1$ и $M/Unif/1$ найдены производящие функции предельных распределений; для систем с отказами $M/M/1$ получено условие существования эргодического распределения и предельное распределение производящих функций.

Обобщая модели Лакатоша, изучена СМО $GI/G/1$ с постоянной орбитой и дисциплиной обслуживания FCFS. Для такой системы найдено условие существования эргодического распределения и эргодическое среднее количество заявок на орбите. Для случая, когда время обслуживания не превышает постоянного времени пребывания T на орбите, найдено стационарное распределение соответствующей цепи Маркова.

Для СМО с возвращением $GI/G/1$, с общей функцией распределения пребывания заявки на орбите и дисциплиной обслуживания FCFS выведено условие существования эргодического распределения соответствующей цепи Маркова для двух случаев, а именно: когда функция распределения времени пребывания на орбите решетчатая и когда она непрерывная.

Исследовано условие эргодичности вложенной цепи Маркова для СМО Лакатоша $SM/SM/1$ при общем нерешетчатом распределении времени возвращения заявок с орбиты.

Таким образом, модель Лакатоша значительно обобщена, а именно: все три распределения $A(x)$, $B(x)$, $D(x)$ могут быть произвольными; рассмотрена также система $SM/SM/1$. Найдены условия эргодичности вложенной цепи Маркова и некоторые стационарные характеристики обобщенных систем.

Указаны сферы применения модели Лакатоша, поставлены новые задачи.

Авторы выражают профессору Лакатошу благодарность за поддержку и обсуждение новых постановок задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lakatos L. On a simple continuous cyclic-waiting problem // Annales Univ. Sci. — 1994. — N 14. — P. 105–113.
2. Коба Е.В., Коваленко И.Н. Об условии эргодичности системы с диспетчеризацией и обслуживанием объектов сложной структуры // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 5. — С. 8–12.
3. Lakatos L. A discrete cycle-waiting queueing problem // Теория вероятностей и ее применение. — 1997. — **42**, № 2. — С. 405–406.

4. L a k a t o s L . On a simple discrete cycling-waiting queueing problem // J. Math. Sci. — 1999. — **92**, N 4. — P. 4031–4034.

5. L a k a t o s L . On a cyclic-waiting queueing system // Theory of Stochastic processes. — 1996. — **18**, N 2. — P. 177–181.

6. L a k a t o s L . A probability model connected with landing of airplanes // Safety and Reliability. — Rotterdam: Brookfielld, 1999. — P. 151–154.

7. L a k a t o s L . Limit distribution for some cyclic-waiting systems // Proc. Ukrainian Math. Congress, 2001. — Kiev, 2002. — P. 102–106.

8. L a k a t o s L . A special cycling-waiting queueing system with refusals // J. Math. Sci. — 2002. — **111**, N 3. — P. 3541–3544.

9. К о б а Е . В . О системе обслуживания *GI*/*G*/1 с повторением заявок при обслуживании в порядке очереди // Доп. НАН України. — 2000. — № 6. — С. 101–103.

10. K o b a E . V . On a *GI*/*G*/1 retrial queueing system with a FIFO queueing discipline // Theory of stochastic processes. — 2002. — **24**, N 8. — P. 201–207.

11. К о б а О . В . Стаціонарні характеристики системи масового обслуговування *GI*/*G*/1 із *T*-поверненням при обслуговуванні в порядку черги // Вісник НАУ. — 2003. — № 1. — С. 122–125.

12. К о р о л ю к В . С . , Б о р о в с к и х Ю . В. Аналитические асимптотики вероятностных распределений. — К.: Наук. думка, 1981. — 248 с.

13. К о б а Е . В . Условие эргодичности обобщенной модели обслуживания типа Л. Лакатоша // Доп. НАН України. — 2004. — № 11. — С. 70–74.

14. Б о р о в к о в А . А . Вероятностные процессы в теории массового обслуживания — М.: Наука, 1972. — 381 с.

15. К о б а О . В . , М и х а л е в и ч К . В . Порівняння систем типу *M*/*M*/1 з швидким поверненням заявок при різних дисциплінах обслуговування // Системні дослідження та інформ. технології. — 2003, № 2. — С. 59–68.

16. П у с т о в а я С . В . Исследование call-центров как систем массового обслуживания с повторными вызовами // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 3. — С. 162–168.

17. П у с т о в а я С . В . Зависимость показателей функционирования call-центра от распределения времени пребывания вызовов на орбите // Там же. — 2009. — № 2. — С. 170–183.

18. P u s t o v a S . Modeling call center operation with taking into account repeated attempts of subscribers // Вісник НАУ. — 2006. — № 3. — С. 21–24.

19. К о б а О . В . , П у с т о в а С . В . Аналітична модель функціонування call-центру // Доп. НАН України — 2007. — № 2. — С. 17–25.

20. К о б а Е . В . , П у с т о в а я С . В . Центр обработки вызовов как система массового обслуживания с возвращениями // Проблемы управления и информатики. — 2007. — № 3. — С. 103–112.

21. A n a l y s i s of a Lakatos-type queueing system with general service times / W. Rogiest, K. Laevens, D. Fiems, H. Bruneel // Abstracts of the Twentieth Conf. on Quantitative Methods for Decision Making, ORBEL 20. — Ghent, 2006. — P. 95–97.

22. C o m p a c t optical buffer with ring resonators, IBM, 2006. — http://domino.research.ibm.com/comm/research_projects.nsf/pages/photonics.ringbuffer.html.

Поступила 07.11.2011