УДК 519.21

Б.В. БОНДАРЕВ, О.Е. СОСНИЦКИЙ

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ КЛАРКА. II. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ Р. МЕРТОНА[1]

Ключевые слова: *стохастический интеграл по пуассоновской мере, уравнение Беллмана, оптимальное управление.*

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе на основании рассмотренной в первой части настоящей статьи математической модели эволюции акций рассчитываются оптимальные управления в широко известной задаче инвестирования Нобелевского лауреата по экономике Р. Мертона. В качестве математической модели эволюции акций взята модель Кларка из первой части работы [20] (ссылки и нумерация сохранены).

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ Р. МЕРТОНА

Пусть $\xi(t)$ — капитал инвестора на момент времени $t \in [0, T]$, $\xi(0)$ — начальный его капитал. Инвестор управляет своим капиталом следующим образом:

— управление $u \in [0;1]$ — доля капитала, который вкладывается в акции;

— $1-u \in [0;1]$ — доля капитала, который вкладывается на банковский счет;

— $u_1(t, x)$ — скорость потребления на момент времени $t \in [0, T]$, если капитал инвестора на этот момент равен x.

Уравнение для эволюции цены акции $\bar{S}(t)$, $0 \le t \le T$, имеет вид [20]

$$d\bar{S}(t) = \bar{S}(t)\left\{ \mu dt + \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{\alpha} - 1]\, \tilde{\nu}(d\alpha, dt) \right\}. \tag{40}$$

Тогда приращение цены акции определится формулой

$$\bar{S}(t+\Delta t) \approx \bar{S}(t)\left\{ 1 + \mu\Delta t + \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{\alpha} - 1]\, \tilde{\nu}(d\alpha, \Delta t) \right\}.$$

В денежном исчислении доля средств $u \in [0;1]$ составит сумму $u\xi(t)$. На эту сумму можно купить $\dfrac{u\xi(t)}{\bar{S}(t)}$ штук акций, вклад в банк составит сумму $(1-u)\xi(t)$. Поскольку $u_1(t, x)$ — скорость расходования средств в момент времени t при капитале x, то расход средств за время $[t; t+\Delta t]$ составит приблизительно $u_1(t, \xi(t))\Delta t$. Тогда справедливо «приблизительное» равенство

$$\xi(t+\Delta t) - \xi(t) =$$

$$= u\xi(t)\left\{ \mu\Delta t + \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{\alpha} - 1]\, \tilde{\nu}(d\alpha, \Delta t) \right\} + (1-u)\xi(t) r\Delta t - u_1(t, \xi(t))\Delta t$$

и при $\Delta t \to 0$ получаем

$$d\xi(t) = u\xi(t)\left\{ \mu dt + \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{\alpha} - 1]\tilde{\nu}(d\alpha, dt) \right\} + (1-u)\xi(t) r dt - u_1(t, \xi(t)) dt. \tag{41}$$

---

[1] Продолжение. Начало см. в № 2, 2013.

Введем следующую совокупность условий:

$$\left.\begin{array}{l}
\bullet\ u_1(t,x): 0 \le u_1(t,x) \le C(t)x < +\infty; \\
\bullet\ \text{функция } u_1(t,x) \text{ непрерывна по } t; \\
\bullet\ \text{производные } \dfrac{\partial u_1}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \text{ непрерывны по совокупности} \\
\quad \text{аргументов и ограничены;} \\
\bullet\ \int\limits_t^T e^{-\rho s} C^{\gamma}(s) ds < \infty,\ 0 \le t < T,\ 0 < \gamma < +\infty; \\
\bullet\ 0 < C(s) < C(t) < +\infty,\ 0 < s < t < T.
\end{array}\right\} \quad (42)$$

Обозначим $\mathfrak{R}$ класс функций, удовлетворяющий условиям (42). Везде в дальнейшем будем предполагать, что скорость потребления $u_1(t,x)$ принадлежит этому классу функций.

Этих ограничений достаточно, чтобы процесс $\xi_{t,x}(s)$, $0 \le t \le s < T$, при начальном условии $\xi_{t,x}(t) = x > 0$ для всех $0 \le t \le s < T$, оставался положительным. Следует заметить (см. [18, лемма 2, с. 486]), что функция $u_1(t,x) = \mathrm{M}[u_1(s, \xi_{t,x}(s))]^{\gamma}$, $0 \le t \le s < T$, дважды непрерывно дифференцируема по x и дифференцируема по t.

4. РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЯ $0 < \gamma < 1$

Предполагаем, что выполняется совокупность условий (42). Случай $0 < \gamma < 1$ соответствует поведению инвестора, не склонного к риску.

Введем функционал качества

$$V(t,x,u,u_1) = \mathrm{M}\left[\int\limits_t^T e^{-\rho s}[u_1(s, \xi_{t,x}(s))]^{\gamma} ds\right], \quad 0 < \gamma < 1,$$

тогда цена управления имеет вид

$$\bar{V}(t,x) = \max_{0 \le u \le 1,\ u_1 \in \mathfrak{R}} V(t,x,u,u_1) = \max_{0 \le u \le 1,\ u_1 \in \mathfrak{R}} \mathrm{M}\int\limits_t^T e^{-\rho s}[u_1(s, \xi_{t,x}(s))]^{\gamma} ds, 0 < \gamma < 1.$$

Составим уравнение Беллмана [19] для этого функционала качества:

$$-\bar{V}_t' = \max_{u, u_1}\left\{\bar{V}_x'[x(u\mu + (1-u)r) - u_1] + e^{-\rho t} u_1^{\gamma} + \right.$$

$$\left. + \lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [\bar{V}(t, x + xu(e^{\alpha} - 1)) - \bar{V}(t,x) - \bar{V}_x' xu(e^{\alpha} - 1)] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha^2/2} d\alpha \right\},\ \bar{V}(T,x) = 0. \quad (43)$$

От правой части равенства (43) возьмем производную по u_1, получим

$$0 = -\bar{V}_x' + \gamma e^{-\rho t} u_1^{\gamma - 1},$$

отсюда оптимальное потребление определится равенством

$$u_1^* = \left(\bar{V}_x' \frac{e^{\rho t}}{\gamma}\right)^{1/(\gamma - 1)}. \quad (44)$$

Если функционал $\bar{V}(t,x)$ находится в виде

$$\bar{V}(t,x) = x^{\gamma} g(t), \quad g(T) = 0,$$

то имеем

$$u_1^* = \left(\bar{V}_x' \frac{e^{\rho t}}{\gamma}\right)^{1/(\gamma-1)} = \left(\gamma g(t) \frac{e^{\rho t}}{\gamma} x^{\gamma - 1}\right)^{1/(\gamma - 1)} = x\left(\gamma g(t) \frac{e^{\rho t}}{\gamma}\right)^{1/(\gamma - 1)}.$$

Однако поскольку

$$(-\bar{V}_x{}'+\gamma e^{-\rho\, t} u_1^{\gamma-1})'_{u_1} = \gamma e^{-\rho\, t}(\gamma-1)u_1^{\gamma-2} < 0\,,$$

то в точке

$$u_1^* = x(g(t)e^{\rho\, t})^{1/(\gamma-1)}$$

правая часть (43) будет иметь максимум для любого фиксированного значения $0 \le u \le 1$. Таким образом, имеем

$$f(u) = \max_{u_1}\left\{\gamma g(t)x^{\gamma}(u\mu + (1-u)r) + e^{-\rho t}u_1^{\gamma} - \gamma g(t)x^{\gamma-1}u_1 + \right.$$

$$\left. + \lambda x^{\gamma} g(t)\int_{-\infty}^{+\infty}[(1+u(e^{\alpha}-1))^{\gamma} - 1 - \gamma u(e^{\alpha}-1)]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\alpha^2/2}d\alpha\right\} =$$

$$= \left\{\gamma g(t)x^{\gamma}(u\mu + (1-u)r) + x^{\gamma}e^{\rho\, t/(\gamma-1)}(g(t))^{\gamma/(\gamma-1)}(1-\gamma) + \right.$$

$$\left. + \lambda x^{\gamma} g\big(t\big)\int_{-\infty}^{+\infty}[(1+u(e^{\alpha}-1))^{\gamma} - 1 - \gamma u(e^{\alpha}-1)]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\alpha^2/2}d\alpha\right\} = \tag{45}$$

$$= x^{\gamma} g(t)[\gamma u\mu + \gamma(1-u)r +$$

$$+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}[(1+u(e^{\alpha}-1))^{\gamma} - 1 - \gamma u(e^{\alpha}-1)]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\alpha^2/2}d\alpha] + x^{\gamma}e^{\rho\, t/\gamma-1}(g(t))^{\gamma/\gamma-1}(1-\gamma)\,.$$

Пусть

$$f(u) = \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}[(1+u(e^{\alpha}-1))^{\gamma} - 1 - \gamma u(e^{\alpha}-1)]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\alpha^2/2}d\alpha + \gamma u\mu + \gamma(1-u)r, \tag{46}$$

тогда для нахождения оптимального управления $\bar{u}$ имеем уравнение

$$f'(u) = \gamma(\mu - r) + \lambda\gamma\int_{-\infty}^{+\infty}[(1+u(e^{\alpha}-1))^{\gamma-1} - 1](e^{\alpha}-1)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\alpha^2/2}d\alpha = 0$$

или

$$f'(u) = \int_{-\infty}^{+\infty}(1+u(e^{\alpha}-1))^{\gamma-1}(e^{\alpha}-1)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\alpha^2/2}d\alpha + \frac{\mu - r}{\lambda} - \sqrt{e} + 1 = 0\,. \tag{47}$$

Рассмотрим вторую производную на промежутке $0 \le u \le 1$:

$$f''(u) = -(1-\gamma)\int_{-\infty}^{+\infty}(1+u(e^{\alpha}-1))^{\gamma-2}(e^{\alpha}-1)^2\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\alpha^2/2}d\alpha\,. \tag{48}$$

Так как

$$\min_{0\le u\le 1}(1+u(e^{\alpha}-1)) > 0, \quad 0 \le u \le 1,$$

$$\psi(u) = 1 + u(e^{\alpha}-1) \to \psi'(u) = (e^{\alpha}-1) > 0,\;\; \alpha > 0 \to \min_{0\le u\le 1}\psi(u) = \psi(0) = 1 > 0;$$

$$\psi'(u) = (e^{\alpha}-1) < 0,\;\; \alpha < 0 \to \min_{0\le u\le 1}\psi(u) = \psi(1) = 1 + (e^{\alpha}-1) = e^{\alpha} > 0,$$

то на промежутке $0 \le u \le 1$ вторая производная меньше нуля и, следовательно, на промежутке $0 \le u \le 1$ функция $f(u)$ выпукла вверх, поэтому имеет максимум.

Из (47) следует

$$f'(0) = \frac{\mu - r}{\lambda} > 0,$$

$$f'(1) = e^{\gamma^2/2} - e^{(\gamma-1)^2/2} + \frac{\mu - r}{\lambda} - \sqrt{e} + 1.$$

Тогда если $f'(1) < 0$, то корнем уравнения (47) есть $u^* \in (0,1)$; если $f'(1) > 0$, то функция на промежутке [0, 1] возрастает. И поскольку из (46) вытекает

$$f(0) = \gamma r, \tag{49}$$

$$f(1) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{\alpha\gamma} - 1 - \gamma(e^{\alpha} - 1)] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha^2/2} d\alpha + \gamma\mu = \lambda(e^{\gamma^2/2} - 1 - \gamma[\sqrt{e} - 1]) + \mu\gamma,$$

то при $0 < u^* < 1$ максимумом будет $f(u^*)$; если $u^* \le 0$, то в силу (49) максимумом будет $f(0) = \gamma r$; если $1 \le u^*$, то в силу (49) максимумом будет

$$f(1) = \lambda(e^{\gamma^2/2} - 1 - \gamma[\sqrt{e} - 1]) + \mu\gamma.$$

Подставляя оптимальные управления в уравнение Беллмана, получаем дифференциальное уравнение для $g(t)$:

$$-x^{\gamma} g'(t) = \gamma x^{\gamma-1} g(t)[x(u^*\mu + (1-u^*)r) - (x^{\gamma-1} g(t) e^{\rho t})^{1/(\gamma-1)}] +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} [x^{\gamma} g(t)(1 + u^*(e^{\alpha} - 1))^{\gamma} - x^{\gamma} g(t) - \gamma x^{\gamma-1} g(t) x u^*(e^{\alpha} - 1)]^{\gamma} \lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha^2/2} d\alpha +$$

$$+ e^{-\rho t}(x^{\gamma-1} g(t) e^{\rho t})^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

Сократив на x^{γ}, получим

$$-g'(t) = \gamma g(t)(u^*\mu + (1-u^*)r) -$$

$$-\gamma g(t)^{\gamma/(\gamma-1)} e^{\rho t/(\gamma-1)} + \int_{-\infty}^{+\infty} [g(t)(1 + u^*(e^{\alpha} - 1))^{\gamma} - g(t) -$$

$$-\gamma g(t) u^*(e^{\alpha} - 1)] \lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha^2/2} d\alpha + e^{-\rho t}(g(t) e^{\rho t})^{\gamma/(\gamma-1)}, \; g(T) = 0. \tag{50}$$

Так как u^* не зависит от t, то положим

$$(u^*\mu + (1-u^*)r) = B,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [(1 + u^*(e^{\alpha} - 1))^{\gamma} - 1 - \gamma u^*(e^{\alpha} - 1)] \lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha^2/2} d\alpha = C. \tag{51}$$

Тогда уравнение (50) примет вид

$$g'(t) = -g(t)(\gamma B + C) - (1-\gamma) g(t)^{\gamma/(\gamma-1)} e^{\rho t/(\gamma-1)}, \quad g(T) = 0.$$

Сделаем замену

$$h(t) = [g(t) e^{\rho t}]^{\gamma/(\gamma-1)}, \; g(t) = [h(t)]^{1-\gamma} e^{-\rho t} \to$$

$$\to g'(t) = (1-\gamma)[h(t)]^{-\gamma} h'(t) e^{-\rho t} - \rho [h(t)]^{1-\gamma} e^{-\rho t}.$$

В результате получим

$$(1-\gamma)[h(t)]^{-\gamma} h'(t)e^{-\rho t} - \rho[h(t)]^{1-\gamma} e^{-\rho t} +$$

$$+[h(t)]^{1-\gamma} e^{-\rho t}(\gamma B + C) + (1-\gamma)[h(t)]^{-\gamma} e^{-\rho t} = 0, \ h(T) = 0$$

или

$$h'(t) + h(t)\frac{\gamma B + C - \rho}{1-\gamma} + 1 = 0, \quad h(T) = 0. \tag{52}$$

Отсюда имеем

$$h(t) = C_1 e^{-At} - \frac{1}{A}, \quad \text{где } A = \frac{\gamma B + C - \rho}{1-\gamma}, \text{ при условии } \gamma B + C - \rho \neq 0,$$

$$h(T) = C_1 e^{-AT} - \frac{1}{A} = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{A} e^{AT},$$

$$h(t) = \frac{1}{A}(e^{A(T-t)} - 1) = \left[\frac{\gamma B + C - \rho}{1-\gamma}\right]^{-1}\left(e^{\frac{\gamma B + C - \rho}{1-\gamma}(T-t)} - 1\right)$$

и соответственно

$$g(t) = [h(t)]^{1-\gamma} e^{-\rho t} = \left[\frac{\gamma B + C - \rho}{1-\gamma}\right]^{\gamma-1}\left[e^{\frac{\gamma B + C - \rho}{1-\gamma}(T-t)} - 1\right]^{1-\gamma} e^{-\rho t}, \quad \gamma B + C - \rho \neq 0.$$

Тогда оптимальное управление имеет вид

$$u_1^* = x(g(t)e^{\rho t})^{1/(\gamma-1)} = x\frac{\gamma B + C - \rho}{1-\gamma}\left[e^{\frac{\gamma B + C - \rho}{1-\gamma}(T-t)} - 1\right]^{-1}, \quad \gamma B + C - \rho \neq 0,$$

а цена управления определяется уравнением

$$\overline{V}(t,x) = x^{\gamma}\left[\frac{\gamma B + C - \rho}{1-\gamma}\right]^{\gamma-1}\left[e^{\frac{\gamma B + C - \rho}{1-\gamma}(T-t)} - 1\right]^{1-\gamma} e^{-\rho t}, \quad \gamma B + C - \rho \neq 0. \tag{53}$$

Если в (52) $\gamma B + C - \rho = 0$, то

$$h'(t) + 1 = 0, \quad h(T) = 0,$$

$$h(t) = -t + C_2, \quad h(T) = -T + C_2 \Rightarrow C_2 = T, \quad h(t) = T - t.$$

Тогда

$$g(t) = [h(t)]^{1-\gamma} e^{-\rho t} = (T-t)^{1-\gamma} e^{-\rho t}, \ u_1^* = x(g(t)e^{\rho t})^{1/(\gamma-1)} = x(T-t)^{-1},$$

$$\overline{V}(t,x) = x^{\gamma}(T-t)^{1-\gamma} e^{-\rho t}.$$

Последний результат можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема 2. Предположим, что эволюция цены акции описывается процессом (40), u^* — корень уравнения (47). Тогда при $0 < u^* < 1$; $u^* \leq 0$; $1 \leq u^*$ максимум функционала качества будет соответственно достигаться при $\overline{u} = u^*$; $\overline{u} = 0$; $\overline{u} = 1$, здесь $\overline{u}$ — оптимальная доля вложений в акции, остаток (доля) $1 - \overline{u}$ вкладывается на банковский счет, при этом оптимальное потребление определится как

$$1)\ \bar{u}_1(t,x)=x\frac{\gamma B+C-\rho}{1-\gamma}\left[e^{\frac{\gamma B+C-\rho}{1-\gamma}(T-t)}-1\right]^{-1},\ \text{если } \gamma B+C-\rho\neq 0,$$

$$2)\ \bar{u}_1(t,x)=x(T-t)^{-1},\ \text{если } \gamma B+C-\rho=0,$$

а цена управления равна

$$1)\ \bar{V}(t,x)=x^{\gamma}\left[\frac{1-\gamma}{\gamma B+C-\rho}\right]^{1-\gamma}\left[e^{\frac{\gamma B+C-\rho}{1-\gamma}(T-t)}-1\right]^{1-\gamma}e^{-\rho t},$$

если $\gamma B+C-\rho\neq 0$,

$$2)\ \bar{V}(t,x)=x^{\gamma}(T-t)^{1-\gamma}e^{-\rho t},\ \text{если } \gamma B+C-\rho=0,\ \text{где}$$

$$B=(\bar{u}\mu+(1-\bar{u})r),$$

$$C=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}[(1+\bar{u}(e^{\alpha}-1))^{\gamma}-1-\gamma\bar{u}(e^{\alpha}-1)]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\alpha^2/2}d\alpha.$$

5. РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЯ $\gamma=1$

Предполагаем, что выполняется совокупность условий (42). Случай $\gamma=1$ соответствует поведению инвестора, нейтрального к риску. Функционал качества при $\gamma=1$ примет вид

$$V(t,x,u,u_1)=\mathrm{M}\left[\int_t^T e^{-\rho s}[u_1(s,\xi_{t,x}(s))]ds\right]. \qquad (54)$$

Цель управления — найти $\bar{u},\bar{u}_1(s,x)$, доставляющие максимум функционала качества

$$\bar{V}(t,x)=\max_{0\le u\le 1,\,u_1\in\Re}V(t,x,u,u_1)=\max_{0\le u\le 1,\,u_1\in\Re}\mathrm{M}[\int_t^T e^{-\rho s}[u_1(s,\xi_{t,x}(s))]ds]. \qquad (55)$$

Составим уравнение Беллмана [19] для этого функционала качества:

$$-\bar{V}_t'=\max_{u,u_1}\Bigg\{\bar{V}_x'x(u\mu+(1-u)r)]+u_1(e^{-\rho t}-\bar{V}'_x)+$$

$$+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}[\bar{V}(t,x+xu(e^{\alpha}-1))-\bar{V}(t,x)-\bar{V}_x'xu(e^{\alpha}-1)]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\alpha^2/2}d\alpha\Bigg\},$$

$$\bar{V}(T,x)=0. \qquad (56)$$

Рассмотрим выражение $u_1(e^{-\rho t}-\bar{V}_x')$. Выражение в скобках $(e^{-\rho t}-\bar{V}_x')$ называется управляющим. Заметим, что при $t=T-0$ выражение $u_1(e^{-\rho t}-\bar{V}_x')$ принимает максимальное значение при максимальном потреблении $u_1=C(t)x$. Действительно, так как $V(T,x)=0$, то $\bar{V}_x'|_{t=T}=0$ и в силу непрерывности $\bar{V}_x'|_{t=T-0}=0$.

При максимальном потреблении платежная функция (55) примет вид

$$\bar{V}(t,x)=\max_{0\le u\le 1}\mathrm{M}\int_t^T e^{-\rho s}C(s)\xi_{t,x}(s)ds=\max_{0\le u\le 1}\int_t^T e^{-\rho s}C(s)\mathrm{M}\xi_{t,x}(s)ds. \qquad (57)$$

Для нахождения $\mathrm{M}\xi_{t,x}(s)$ подставим в балансовое уравнение (41) максимальное потребление $u_1 = C(s)x$. Получим

$$d\xi_{t,x}(s) = \xi_{t,x}(s)((u\mu + (1-u)r - C(s))ds + u\int_{-\infty}^{+\infty}[e^{\alpha}-1]\,\tilde{\nu}(d\alpha, ds)),\ \ \xi_{t,x}(t) = x. \quad (58)$$

Отсюда

$$\mathrm{M}(d\xi_{t,x}(s)) = \mathrm{M}(\xi_{t,x}(s)((u\mu + (1-u)r - C(s))ds + u\int_{-\infty}^{+\infty}[e^{\alpha}-1]\tilde{\nu}(d\alpha, ds))),$$
$$\mathrm{M}\xi_{t,x}(t) = x. \quad (59)$$

В результате получаем

$$d\mathrm{M}\xi_{t,x}(s) = \mathrm{M}\xi_{t,x}(s)((u\mu + (1-u)r - C(s))ds),\ \ \mathrm{M}\xi_{t,x}(t) = x. \quad (60)$$

Решим это уравнение

$$\mathrm{M}\xi_{t,x}(s) = x\exp\left\{\int_t^s (u\mu + (1-u)r - C(\tau))d\tau\right\}. \quad (61)$$

Подставляя выражение (60) в (56), получаем

$$\bar{V}(t,x) = x\max_{0\le u\le 1}\int_t^T e^{-\rho s}C(s)\exp\left\{\int_t^s (u\mu + (1-u)r - C(\tau))d\tau\right\}ds. \quad (62)$$

Так как $\mu > r$, то для достижения максимума очевидно, что надо выбрать $\bar{u} = 1$; тогда значение функционала качества будет определяться выражением

$$\bar{V}(t,x) = x\int_t^T e^{-\rho s}C(s)\exp\left\{\int_t^s (\mu - C(\tau))d\tau\right\}ds =$$
$$= xe^{-\mu t}\int_t^T e^{(\mu-\rho)s}C(s)\exp\left\{-\int_t^s C(\tau)d\tau\right\}ds \quad (63)$$

при управлении $\bar{u} = 1$, $\bar{u}_1(s,x) = C(s)x$.

Получено значение функционала качества, когда управляющее выражение $e^{-\rho t} - \bar{V}_x'$ больше нуля. Рассмотрим случай, когда управляющая скобка меняет знак. Тогда очевидно, что при $e^{-\rho t} - \bar{V}_x' < 0$ выражение $u_1(e^{-\rho t} - \bar{V}_x')$ примет свое максимальное значение при минимальном потреблении, т.е. $\bar{u}_1(s,x) = 0$.

Пусть существует такая точка переключения $t_1 \in (t, T)$, что $e^{-\rho t_1} - \bar{V}_x' = 0$. Тогда на промежутке $[t, t_1]$ потребление составит $\bar{u}_1(s,x) = 0$, а на промежутке $[t_1, T]$ максимальное значение составит $\bar{u}_1(s,x) = C(s)x$, где $0 \le t \le t_1 \le T$.

Функционал качества (55) имеет вид

$$\bar{V}(t,x) = \max_{0\le u\le 1,\, u_1\in\Re}\mathrm{M}\int_t^T e^{-\rho s}[u_1(s, \xi_{t,x}(s))]ds =$$
$$= \mathrm{M}\int_t^{t_1} e^{-\rho s}\cdot 0ds + \int_{t_1}^T e^{-\rho s}C(s)\mathrm{M}\xi_{t_1,\xi_{t,x}(t_1)}(s) =$$
$$= \int_{t_1}^T e^{-\rho s}C(s)\mathrm{M}\xi_{t_1,\xi_{t,x}(t_1)}(s)ds, \quad (64)$$

где

$$\mathrm{M}\xi_{t_1,\xi_{t,x}(t_1)}(s) = \mathrm{M}\{\mathrm{M}\xi_{t_1,x_1}(s) / \xi_{t,x}(t_1) = x_1\} =$$

$$= \mathrm{M}\left\{ \xi_{t,x}(t_1) \exp\left\{ \int_{t_1}^{s} (u\mu + (1-u)r - C(\tau)) d\tau \right\} \right\} =$$

$$= \mathrm{M}\xi_{t,x}(t_1) \exp\left\{ \int_{t_1}^{s} (u\mu + (1-u)r - C(\tau)) d\tau \right\} . \qquad (65)$$

Найдем $\mathrm{M}\xi_{t,x}(t_1)$. Для этого решим балансовое уравнение (41) на промежутке $[t, t_1]$:

$$d\xi_{t,x}(s) = \xi_{t,x}(s)((u\mu + (1-u)r)ds + u \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{\alpha} - 1]\tilde{\nu}(d\alpha, ds)),\ \xi_{t,x}(t) = x . \qquad (66)$$

Отсюда аналогично (61) получаем

$$\mathrm{M}\xi_{t,x}(s) = x \exp\left\{ \int_{t}^{s} (u\mu + (1-u)r) d\tau \right\} = x \exp\{(u\mu + (1-u)r)(s-t)\} , \qquad (67)$$

тогда

$$\mathrm{M}\xi_{t,x}(t_1) = x \exp\{(u\mu + (1-u)r)(t_1 - t)\} . \qquad (68)$$

Подставляя найденные выражения в (64), получаем

$$\overline{V}(t,x) = \int_{t_1}^{T} e^{-\rho s} C(s) \mathrm{M}\xi_{t_1, \xi_{t,x}(t_1)}(s) ds =$$

$$= x \exp\{(u\mu + (1-u)r)(t_1 - t)\} \int_{t_1}^{T} e^{-\rho s} C(s) \exp\left\{ \int_{t_1}^{s} (u\mu + (1-u)r - C(\tau)) d\tau \right\} ds . \qquad (69)$$

Так как $\mu > r$, то для достижения максимума следует выбрать $\overline{u} = 1$; тогда значение функционала качества определится формулой

$$\overline{V}(t,x) = x \exp\{\mu(t_1 - t)\} \int_{t_1}^{T} e^{-\rho s} C(s) \exp\left\{ \int_{t_1}^{s} (\mu - C(\tau)) d\tau \right\} ds =$$

$$= x e^{-\mu t} \int_{t_1}^{T} e^{(\mu-\rho)s} C(s) \exp\left\{ -\int_{t_1}^{s} C(\tau) d\tau \right\} ds \qquad (70)$$

при управлении $\overline{u} = 1$, $\overline{u}(s,x) = 0$ при $s \in [t, t_1)$, $\overline{u}(s,x) = C(s)x$ при $s \in [t_1, T]$.

Исходя из того, что в точке t_1 управляющее выражение равно нулю, получаем

$$e^{-\rho t_1} = e^{-\mu t_1} \int_{t_1}^{T} e^{(\mu-\rho)s} C(s) \exp\left\{ -\int_{t_1}^{s} C(\tau) d\tau \right\} ds ,$$

$$e^{(\mu-\rho)t_1} = \int_{t_1}^{T} e^{(\mu-\rho)s} C(s) \exp\left\{ -\int_{t_1}^{s} C(\tau) d\tau \right\} ds . \qquad (71)$$

Тогда, подставляя (70) в (69), имеем

$$\overline{V}(t,x) = x e^{-\mu t} e^{(\mu-\rho)t_1} . \qquad (72)$$

Предположим, что таких точек переключения несколько, т.е. помимо t_1 существует точка $t_2 \in (t, t_1)$ такая, что $e^{-\rho t_2} - \overline{V}'_x = 0$. Тогда, определив производную $\bar{V}_x'$ из (72) и подставив ее, получим

$$e^{-\rho t_2} - e^{-\mu t_2} e^{(\mu-\rho)t_1} = 0;$$

$$e^{(\mu-\rho)t_2} = e^{(\mu-\rho)t_1} \Rightarrow t_2 = t_1, \tag{73}$$

что противоречит построению точки t_2. Следовательно, существует только одна точка переключения t_1.

Теорема 3. Предположим, что эволюция цены акции описывается процессом (40), $t_1 \in (t, T)$ — корень уравнения (71). Тогда оптимальная доля вложения в акции составляет $\bar{u} = 1$, остаток (доля) $1 - \bar{u}$ вкладывается на банковский счет, при этом оптимальное потребление составляет

1) $\bar{u}_1(s, x) = 0$ на промежутке $[t, t_1)$;

2) $\bar{u}_1(s, x) = C(s)x$ на промежутке $[t_1, T]$,

цена управления составляет

$$\bar{V}(t, x) = xe^{-\mu t} \int_{t_1}^{T} e^{(\mu-\rho)s} C(s) \exp\left\{ -\int_{t_1}^{s} C(\tau) d\tau \right\} ds.$$

6. РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЯ $\gamma > 1$

Предполагаем, что выполняется совокупность условий (42). Случай $\gamma > 1$ соответствует поведению инвестора, склонного к риску. Функционал качества при $\gamma > 1$ имеет вид

$$V(t, x, u, u_1) = \mathrm{M}[\int_{t}^{T} e^{-\rho s} [u_1(s, \xi_{t,x}(s))]^{\gamma} ds]. \tag{74}$$

Цель управления — найти $\bar{u}, \bar{u}_1(s, x)$, доставляющие максимум функционала качества

$$\bar{V}(t, x) = \max_{0 \le u \le 1,\, u_1 \in \Re} V(t, x, u, u_1) = \max_{0 \le u \le 1,\, u_1 \in \Re} \mathrm{M}\left[\int_{t}^{T} e^{-\rho s} [u_1(s, \xi_{t,x}(s)]^{\gamma} ds \right]. \tag{75}$$

Составим уравнение Беллмана [19] для этого функционала качества:

$$-\bar{V}_t' = \max_{u, u_1} \left\{ \bar{V}_x' [x(u\mu + (1-u)r)] + u_1^{\gamma} e^{-\rho s} - u_1 \bar{V}_x' + \right.$$

$$\left. + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} [\bar{V}(t, x + xu(e^{\alpha} - 1)) - \bar{V}(t, x) - \bar{V}_x' xu(e^{\alpha} - 1)] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha^2/2} d\alpha \right\}, \tag{76}$$

$$\bar{V}(T, x) = 0.$$

Рассмотрим выражение $u_1^{\gamma}(e^{-\rho t} - u_1^{1-\gamma} \bar{V}'_x)$. Легко увидеть, что при $t = T - 0$ выражение $u_1^{\gamma}(e^{-\rho t} - u_1^{1-\gamma} \bar{V}'_x)$ принимает максимальное значение в случае максимального потребления $u_1 = C(t)x$. Действительно, так как $V(T, x) = 0$, то $\bar{V}'_x|_{t=T} = 0$ и в силу непрерывности $\bar{V}_x'|_{t=T-0} = 0$.

При максимальном потреблении платежная функция (75) примет вид

$$\bar{V}(t, x) = \max_{0 \le u \le 1} \mathrm{M} \int_{t}^{T} e^{-\rho s} C^{\gamma}(s) \xi_{t,x}^{\gamma}(s) ds = \max_{0 \le u \le 1} \int_{t}^{T} e^{-\rho s} C^{\gamma}(s) \mathrm{M} \xi_{t,x}^{\gamma}(s) ds. \tag{77}$$

Найдем $M\xi^{\gamma}_{t,x}(s)$. Для этого подставим в балансовое уравнение (41) максимальное потребление $u_1 = C(s)x$. Получим

$$d\xi_{t,x}(s) = \xi_{t,x}(s)((u\mu + (1-u)r - C(s))ds + u\int_{-\infty}^{+\infty}[e^{\alpha} - 1]\tilde{\nu}(d\alpha, ds)),\ \xi_{t,x}(t) = x. \quad (78)$$

Из (78) с использованием обобщенной формулы Ито [14] получим

$$d\xi^{\gamma}_{t,x}(s) = \gamma\xi^{\gamma}_{t,x}(u\mu + (1-u)r - C(s))ds +$$

$$+\lambda\xi^{\gamma}_{t,x}(s)\int_{-\infty}^{+\infty}((1+u(e^{\alpha}-1))^{\gamma} - 1 - \gamma u(e^{\alpha}-1))\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\alpha^2/2}d\alpha ds +$$

$$+\xi^{\gamma}_{t,x}\int_{-\infty}^{+\infty}((1+u(e^{\alpha}-1))^{\gamma} - 1)\tilde{\nu}(d\alpha, ds),\ \xi^{\gamma}_{t,x}(t) = x^{\gamma}. \quad (79)$$

Отсюда

$$d\mathrm{M}\xi^{\gamma}_{t,x}(s) = \mathrm{M}\xi^{\gamma}_{t,x}(s)\Bigg((u\mu + (1-u)r - C(s))ds +$$

$$+\lambda\left(\int_{-\infty}^{+\infty}((1+u(e^{\alpha}-1))^{\gamma} - 1 - \gamma u(e^{\alpha}-1))\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\alpha^2/2}d\alpha ds)\right)\Bigg),\ \mathrm{M}\xi^{\gamma}_{t,x}(t) = x^{\gamma}. \quad (80)$$

В результате решения этого уравнения имеем

$$\mathrm{M}\xi^{\gamma}_{t,x}(s) = x^{\gamma}\exp\left\{\int_t^s (u\mu + (1-u)r - C(\tau) + b(u))d\tau\right\}, \quad (81)$$

где $b(u) = \lambda\left(\int_{-\infty}^{+\infty}((1+u(e^{\alpha}-1))^{\gamma} - 1 - \gamma u(e^{\alpha}-1))\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\alpha^2/2}d\alpha\right)$.

Подставляя полученное выражение (81) в (77), получаем

$$\bar{V}(t,x) = x^{\gamma}\max_{0\le u\le 1}\int_t^T e^{-\rho s}C^{\gamma}(s)\exp\left\{\int_t^s (u\mu + (1-u)r - C(\tau) + b(u))d\tau\right\}ds. \quad (82)$$

Рассмотрим функцию $f(u) = (1+u(e^{\alpha}-1))^{\gamma} - 1 - \gamma u(e^{\alpha}-1)$. Продифференцируем по u и получим

$$(e^{\alpha}-1)\gamma((1+(e^{\alpha}-1)u)^{\gamma-1} - 1) \ge 0. \quad (83)$$

Следовательно, $b(u)$ возрастает по u.

Далее, с учетом $\mu > r$ получаем, что для достижения максимума надо выбрать $\bar{u} = 1$, тогда функционал качества определится уравнением

$$\bar{V}(t,x) = x^{\gamma}\int_t^T e^{-\rho s}C^{\gamma}(s)\exp\left\{\int_t^s (\mu - C(\tau) + b(1))d\tau\right\}ds =$$

$$= x\exp\{-(\mu + b(1))t\}\int_t^T e^{(\mu + b(1) - \rho)s}C^{\gamma}(s)\exp\left\{-\int_t^s C(\tau)d\tau\right\}ds, \quad (84)$$

где

$$b(1) = \lambda\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{\alpha\gamma} - 1 - \gamma(e^{\alpha}-1))\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\alpha^2/2}d\alpha\right) = \lambda\left(e^{\gamma^2/2} - 1 - \gamma(\sqrt{e} - 1)\right) > 0$$

при управлении $\bar{u}_1(s,x) = C(s)x$.

Рассмотрим выражение $u_1(u_1^{\gamma-1}e^{-\rho t}-\overline{V_x'})$. Очевидно, что если управляющее выражение $(\overline{u}_1^{\gamma-1}e^{-\rho s}-\overline{V}_x')$ для всех $s\in[t,t_1)$ меньше нуля, то нужно выбрать минимальное потребление $\overline{u}_1(s,x)=0$. Тогда существует точка переключения $t_1\in(t,T)$ такая, что $u_1^{\gamma-1}e^{-\rho t_1}-\overline{V}_x'=0$, и на промежутке $[t,t_1]$ потребление $\overline{u}_1(s,x)$ равно нулю, а на $[t_1,T]$ потребление максимальное: $\overline{u}_1(s,x)=C(s)x$, где $0\le t\le t_1\le T$. Ввиду того, что в точке t_1 управляющее выражение равна нулю, получаем

$$C^{\gamma-1}(t_1)x^{\gamma-1}e^{-\rho t_1}-$$

$$-\gamma x^{\gamma-1}\exp\{-(\mu+b(1))t_1\}\int_{t_1}^{T}e^{(\mu+b(1)-\rho)s}C^{\gamma}(s)\exp\left\{-\int_{t_1}^{s}C(\tau)d\tau\right\}ds=0;$$

$$\frac{1}{\gamma}C^{\gamma-1}(t_1)\,e^{(\mu+b(1)-\rho)t_1}=\int_{t_1}^{T}e^{(\mu+b(1)-\rho)s}C^{\gamma}(s)\exp\left\{-\int_{t_1}^{s}C(\tau)d\tau\right\}ds. \qquad (85)$$

Рассмотрим функционал качества (75):

$$\overline{V}(t,x)=\max_{0\le u\le 1,\,u_1\in\Re}\mathrm{M}\int_{t}^{T}e^{-\rho s}[u_1(s,\xi_{t,x}(s))]^{\gamma}ds=$$

$$=\max_{0\le u\le 1}\mathrm{M}\int_{t}^{t_1}e^{-\rho s}\cdot 0^{\gamma}ds+\max_{0\le u\le 1}\mathrm{M}\int_{t_1}^{T}e^{-\rho s}C^{\gamma}(s)\xi^{\gamma}_{t_1,\xi_{t,x}(t_1)}(s)ds=$$

$$=\max_{0\le u\le 1}\int_{t_1}^{T}e^{-\rho s}C^{\gamma}(s)\mathrm{M}\xi^{\gamma}_{t_1,\xi_{t,x}(t_1)}(s)ds, \qquad (86)$$

где

$$\mathrm{M}\xi^{\gamma}_{t_1,\xi_{t,x}(t_1)}(s)=\mathrm{M}\{\mathrm{M}\xi^{\gamma}_{t_1,x_1}(s)/\xi^{\gamma}_{t,x}(t_1)=x_1^{\gamma}\}=$$

$$=\mathrm{M}\left\{\xi^{\gamma}_{t,x}(t_1)\,\exp\left\{\int_{t_1}^{s}(u\mu+(1-u)r+b(u)-C(\tau))d\tau\right\}\right\}=$$

$$=\mathrm{M}\xi^{\gamma}_{t,x}(t_1)\exp\left\{\int_{t_1}^{s}(u\mu+(1-u)r+b(u)-C(\tau))d\tau\right\}. \qquad (87)$$

Балансовое уравнение (41) примет вид

$$d\xi_{t,x}(s)=\xi_{t,x}(s)((u\mu+(1-u)r)ds+u\int_{-\infty}^{+\infty}[e^{\alpha}-1]\tilde{\nu}(d\alpha,ds)),\quad \xi_{t,x}(t)=x. \qquad (88)$$

Аналогично (78) получим $\mathrm{M}\xi^{\gamma}_{t,x}(t_1)$:

$$\mathrm{M}\xi^{\gamma}_{t,x}(s)=x^{\gamma}\exp\left\{\int_{t}^{s}(u\mu+(1-u)r+b(u))d\tau\right\},$$

$$\mathrm{M}\xi^{\gamma}_{t,x}(t_1)=x^{\gamma}\exp\{(u\mu+(1-u)r+b(u))(t_1-t)\}. \qquad (89)$$

Теперь, подставляя найденные выражения (89) и (87) в (86), получаем

$$\bar{V}(t,x)=\max_{0\le u\le 1}\int_{t_1}^{T} e^{-\rho s}C^{\gamma}(s)\mathrm{M}\xi^{\gamma}_{t_1,\,\xi_{t,x}(t_1)}(s)ds= \tag{90}$$

$$=\max_{0\le u\le 1} x^{\gamma}e^{(u\mu+(1-u)r+b(u))(t_1-t)}\int_{t_1}^{T}C^{\gamma}(s)e^{-\rho s}\exp\left\{\int_{t_1}^{s}(u\mu+(1-u)r+b(u)-C(\tau))d\tau\right\}ds.$$

Легко заметить, что максимальное значение достигается при $\bar{u}=1$. Тогда получаем

$$\bar{V}(t,x)=x^{\gamma}e^{(\mu+b(1))(t_1-t)}\int_{t_1}^{T}C^{\gamma}(s)e^{-\rho s}\exp\left\{\int_{t_1}^{s}(\mu+b(1)-C(\tau))d\tau\right\}ds=$$

$$=x^{\gamma}e^{-(\mu+b(1))t}\int_{t_1}^{T}C^{\gamma}(s)e^{(\mu+b(1)-\rho)s}\exp\left\{-\int_{t_1}^{s}C(\tau)d\tau\right\}ds \tag{91}$$

при управлении $\bar{u}=1$; $\bar{u}(s,x)=0$ при $s\in[t,t_1)$; $\bar{u}(s,x)=C(s)x$ при $s\in[t_1,T]$. Далее, подставляя (85) в (91), получаем

$$\bar{V}(t,x)=\frac{1}{\gamma}x^{\gamma}e^{-(\mu+b(1))t}C^{\gamma-1}(t_1)e^{(\mu+b(1)-\rho)t_1}\,. \tag{92}$$

Пусть таких точек переключения несколько, т.е. помимо t_1 существует точка $t_2\in(t,t_1)$ такая, что $u_1^{\gamma-1}e^{-\rho t_2}-\bar{V}_x'=0$. Тогда, найдя производную $\bar{V}_x'$ из (92) и подставив ее, получим

$$C^{\gamma-1}(t_2)x^{\gamma-1}e^{-\rho t_2}-x^{\gamma-1}e^{-(\mu+b(1))t_2}C^{\gamma-1}(t_1)e^{(\mu+b(1)-\rho)t_1}=0\,,$$

$$C^{\gamma-1}(t_2)e^{(\mu+b(1)-\rho)t_2}=C^{\gamma-1}(t_1)e^{(\mu+b(1)-\rho)t_1}\,. \tag{93}$$

Поскольку $\mu+b(1)>\rho$, то при возрастающей функции $C(s)$ второй точки переключения существовать не может.

Теорема 4. Предположим, что эволюция цены акции описывается процессом (40) и $C(s)$ — возрастающая функция; $t_1\in(t,T)$ — корень уравнения (85). Тогда оптимальная доля вложения в акции будет составлять $\bar{u}=1$, остаток (доля) $1-\bar{u}$ вкладывается на банковский счет, при этом оптимальное потребление определяется как

1) $\bar{u}_1(s,x)=0$ на промежутке $[t,t_1)$;

2) $\bar{u}_1(s,x)=C(s)x$ на промежутке $[t_1,T]$,

цена управления равна

$$\bar{V}(t,x)=x^{\gamma}e^{-(\mu+b(1))t}\int_{t_1}^{T}C^{\gamma}(s)e^{(\mu+b(1)-\rho)s}\exp\left\{-\int_{t_1}^{s}C(\tau)d\tau\right\}ds\,,$$

где $b(1)=\lambda(e^{\gamma^2/2}-1-\gamma(\sqrt{e}-1))$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В качестве математической модели эволюции рискового актива был взят один из вариантов модели Кларка, приведена аргументация в пользу выбора такой модели, доказана ее безарбитражность. Была получена оценка снизу для вероятности неразорения страховой компании, работающей на (B, S)-рынке, т.е. в том случае, когда компания имеет возможность вкладывать имеющиеся средства как в рисковые, так и в безрисковые активы. Рассмотрена известная задача Р. Мертона — нахождение оптимальных управлений потреблением и портфелем инвестора, работающего на (B, S)-рынке с данными активами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Samuelson P.A. Rational theory of warrant pricing // Industrial Management Review. — 1965. — **6.** — P. 13–31.
2. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1, 2. — М.: Фазис, 1998. — 1056 с.
3. Мельников А.В., Волков С.Н., Нечаев М.Л. Математика финансовых обязательств. — М.: ГУ ВШЭ, 2001. — 260 с.
4. Королев В.Ю. Построение моделей распределений биржевых цен при помощи методов асимптотической теории случайного суммирования // Обозрение прикладной и промышлен. математики. — 1997. — **4**, вып. 1. — С. 86–100.
5. Kendal M.G. The analysis of economic time-series. Part 1: Prices // J. Royal Statistical Society. — 1953. — **96.** — P. 11–25.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник математика (для научных работников и инженеров). — М.: Наука, 1968. — 720 с.
7. Clark P.K. A Subordinated stochastic process model of cotton futures prices: Ph.D. Thesis. — Cambridge, Ma.: Harvard Univ., 1970.
8. Clark P.K. A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices // Econometrica. — 1973. — **41.** — P. 135–155.
9. Ross S.A. The arbitrage theory of capital asset pricing // J. Economic Theory. — 1976. — P. 341–360.
10. Бондарев Б.В, Смоляков А.И.,Степанов Е.В. Об одной модели эволюции акции и соответствующей задаче Р. Мертона // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. — 2004. — № 2. — С. 11–21
11. Бондарєв Б.В., Баєв А.В. Про ймовірність банкрутства страхової компанії, що функціонує на (B, S)-ринку // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2006. — № 74. — С. 10–22
12. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів: Навч. посібник. — К.: Либідь, 1990. — 168 с.
13. Бондарев Б.В. Математические модели в страховании. — Донецк.: Апекс, 2002. — 114 с.
14. Гихман И.И. Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. — Киев: Наук. думка, 1968. — 354 с.
15. Merton R.C. Optimum consumption and portfolio rules in continuous-time model // J. Economic Theory. — 1971. — **3.** — P.373–413.
16. Стохастическое исчисление. Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики / С.В. Анулова, А.Ю. Веретенников, Н.В. Крылов, Р.Ш. Липцер, А.Н. Ширяев. — М.: 1989. — **45**. — С. 5–257.
17. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. — М.: Мир, 1978. — 316 с
18. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977. — 568 с.
19. Гихман И.И. Скороход А.В. Управляемые случайные процессы. — К.: Наук. думка, 1977. — 250 с.
20. Бондарев Б.В., Сосницкий О.Е. Некоторые задачи для модели Кларка. 1. Оценка вероятности неразорения страховой компании // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 2. — С. 139–149.

Поступила 23.02.2012