УДК 519.63; 004.75

С.В. СИРИК

ТОЧНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДА ПЕТРОВА–ГАЛЕРКИНА ПРИ ИНТЕГРИРОВАНИИ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ

Аннотация. Проанализированы вопросы точности и устойчивости численного решения стационарного уравнения конвекции–диффузии конечноэлементным методом Петрова–Галеркина с использованием весовых функций с неодинаковыми настроечными параметрами, получены оценки точности метода в зависимости от выбора набора настроечных параметров. Показана сходимость метода в нескольких нормах.

Ключевые слова: метод конечных элементов, метод Петрова–Галеркина, уравнение конвекции–диффузии, логарифмическая норма.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время метод Петрова–Галеркина в виде метода конечных элементов (МКЭ) [1–4] является одним из наиболее успешных подходов к построению численных аппроксимаций в задачах исследования процессов конвекции–диффузии. В работах, посвященных численному решению задач конвекции–диффузии [2, 4–11], в методе Петрова–Галеркина применялись весовые (поверочные) функции вида

$$W_i(x) = N_i(x) + \alpha_i W_i^*(x), \tag{1}$$

где $N_i(x)$ — базисная (пробная) функция [1–4], соответствующая *i*-у узлу сетки, α_i — некоторый настроечный параметр (коэффициент), а функция $W_i^*(x)$ выбирается таким образом, чтобы обеспечить стабилизирующий эффект (избавиться от ложных, не имеющих физического смысла осцилляций) в получаемых численных аппроксимациях. Отметим, что стабилизация необходима, поскольку классический метод Галеркина, в котором $W_i(x) \equiv N_i(x)\ \forall i$, приводит в задачах с доминирующей конвекцией к серьезным погрешностям (если шаг сетки не очень мал) [1].

Теоретический анализ метода Петрова–Галеркина даже в случае стационарных уравнений конвекции–диффузии вызывает определенные трудности математического характера, связанные преимущественно с несамосопряженностью дифференциальных операторов рассматриваемых уравнений и с использованием различных пространств базисных и весовых функций [2–4]. В большинстве публикаций (особенно ранних [12, 13], а также [2, гл. 2]), посвященных теоретическому анализу метода Петрова–Галеркина, использовались совокупности весовых функций, в которых соответствующие коэффициенты α_i были фиксированными и одинаковыми для всех весовых функций $W_i(x)$, т.е. $\alpha_i = \alpha = \text{const}$. Данный случай подробно рассмотрели Griffiths и Lorenz в [12], где исследована сходимость решения, полученного методом Петрова–Галеркина, к аналитическому решению одномерного стационарного уравнения конвекции–диффузии и получены оценки точности численного решения в зависимости от α в нескольких нормах. Исследование не вызвало особых затруднений, поскольку было связано с анализом выражений, содержащих симметричные матрицы специального вида, свойства которых хорошо изучены. Случай с неодинаковыми коэффициентами α_i (зависящими от индекса *i*) в (1) сложнее для исследования и, возможно, поэтому менее изучен [2, 3]. Однако именно этот случай часто используется на практике, так как предоставляет большую свободу в настройке вида весовых функций. Это позволяет более гибко учитывать особенности решения описываемого физического процесса, например обеспечивать стабилизацию получаемой разностной схемы путем выбора α_i, соответствующего величине и знаку локальной скорости переноса в каждой точке x_i сетки. Отметим, что в некоторых задачах использование весовых функций вида (1) с неодинаковыми α_i является необходимым для получения численного решения, адекватно аппроксимирующего поведение точного решения (см. [11] и приведенные там примеры), поэтому данный случай представляет практический интерес.

В настоящей статье проанализированы вопросы точности и устойчивости численного решения стационарного уравнения конвекции–диффузии конечноэлементным методом Петрова–Галеркина с весовыми функциями типа (1). Получены оценки точности в зависимости от выбора коэффициентов $\{\alpha_i\}$, обобщающие и уточняющие известные в данном направлении результаты (они следуют из результатов данной работы как частные случаи), и исследована сходимость метода в нескольких нормах.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ СЛАБОЙ ФОРМЫ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим краевую задачу для стационарного уравнения конвекции–диффузии

$$k(x)\frac{du}{dx}-\frac{d^2u}{dx^2}=f(x) \qquad (2)$$

на отрезке $x\in[d_1;d_2]$. Здесь $u(x)$ является искомой неизвестной функцией, а $k(x)$ и $f(x)$ — заданы. В качестве граничных условий используем однородные условия первого рода $u(d_1)=u(d_2)=0$ (задачу с неоднородными граничными условиями всегда можно привести к задаче с однородными [14]). Далее линейной заменой независимой переменной x отрезок $[d_1;d_2]$ приведем к каноническому отрезку $[0;1]$, поэтому ограничимся рассмотрением задачи при $x\in[0;1]$. Также считаем, что правая часть (2) $f\in L_2[0;1]$, а коэффициент k для упрощения выкладок полагаем равным положительной константе, поскольку случай с переменным k при исследовании МКЭ аппроксимаций является лишь технически более сложным [2, 13], и развиваемый в данной работе подход, основанный на применении операторных неравенств и логарифмических норм, можно без принципиальных затруднений применять к его исследованию.

Используем обозначения $(\cdot,\cdot)_0$ и $\|\cdot\|_0$ соответственно для скалярного произведения и нормы в $L_2[0;1]$ [14–16]. В дальнейшем будем использовать пространства Соболева [15, 16] $H^m[0;1]$ и $H_0^m[0;1]$ — пополнения пространств бесконечно дифференцируемых функций $C^{(\infty)}[0;1]$ и $C_0^{(\infty)}[0;1]$, где нижний индекс 0 означает, что носитель функции принадлежит интервалу $(0;1)$, по норме $\|u\|_m\equiv\left(\int\limits_0^1\sum\limits_{0\le i\le m}(d^iu/dx^i)^2dx\right)^{1/2}$. Отметим, что для функций из $H_0^1[0;1]$ норма $\|\cdot\|_1$ эквивалентна полунорме $|u|_1\equiv\left(\int\limits_0^1(du/dx)^2dx\right)^{1/2}$ [15, 16].

Для записи слабой формы [2–4] рассматриваемой краевой задачи введем билинейную форму $a(u,v)\equiv(u',v'+kv)_0$, где $u'\equiv du/dx$. Тогда слабую форму краевой задачи можно представить в виде [2, 12, 17]:

$$\text{найти } u\in H_0^1[0;1], \text{ что } \forall v\in H_0^1[0;1] \text{ выполняется } a(u,v)=(f,v)_0. \qquad (3)$$

Существование и единственность решения задачи (3) определяется обобщенной теоремой Лакса–Мильграма (см. [17], теорема 5.2.1, с. 112, а также [12], где обоснована применимость данной теоремы к задаче (3)).

АППРОКСИМАЦИЯ МКЭ ПЕТРОВА–ГАЛЕРКИНА

Считаем, что на отрезке $[0;1]$ задана система равномерно распределенных точек (узлов) x_i, $i=\overline{0,\ldots,N+1}$, с шагом $h=x_{i+1}-x_i$, $x_0=0$, $x_{N+1}=1$. С каждым узлом x_i свяжем непрерывную кусочно-линейную финитную базисную функцию $N_i(x)$, которая отлична от нуля только на отрезке $[x_{i-1};x_{i+1}]$, равна нулю на концах отрезка, линейна на элементах $[x_{i-1};x_i]$ и $[x_i;x_{i+1}]$, а также равна единице в точке x_i.

В качестве весовой функции $W_i(x)$ (соответствующей узлу x_i сетки) используем квадратичные функции вида (1), где функция $W_i^*(x)$ определяется следующим образом [2, 10]:

$$W_i^*(x)=\begin{cases} {}^2W((x_i-x)/h), & x\in[x_{i-1};x_i],\\ -{}^2W((x_{i+1}-x)/h), & x\in[x_i;x_{i+1}],\\ 0, & x\notin[x_{i-1};x_{i+1}],\end{cases}$$

${}^2W(\lambda)\equiv 3\lambda(1-\lambda)$. Особенности построения различных весовых функций и требования к ним приведены в [2, 10].

Обозначим Φ_h и Ψ_h конечномерные пространства, являющиеся линейными оболочками совокупностей базисных $\{N_i(x)\}_{i=1}^N$ и весовых $\{W_i(x)\}_{i=1}^N$ функций соответственно. В силу определения функций $N_i(x)$ и $W_i(x)$ пространства Φ_h и Ψ_h являются конечномерными подпространствами пространства $H_0^1[0;1]$. Конечноэлементная аппроксимация Петрова–Галеркина решения задачи (3) представляется следующим образом:

$$\text{найти } u_h\in\Phi_h,\ \text{что } \forall v_h\in\Psi_h \text{ выполняется } a(u_h,v_h)=(f,v_h)_0. \qquad (4)$$

Основным средством при оценивании погрешности аппроксимации решения задачи (3) с помощью решения приближенной задачи (4) является приведенная далее теорема [2, 12, 17].

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия: пространства Φ_h и Ψ_h являются конечномерными подпространствами $H_0^1[0;1]$ такими, что $\inf\limits_{u\in\Phi_h}\sup\limits_{v\in\Psi_h}\dfrac{|a(u,v)|}{|u|_1\,|v|_1}\equiv c_2(h)>0$ и $\forall v\in\Psi_h$, $v\neq 0$ $\sup\limits_{u\in\Phi_h}|a(u,v)|>0$; единственным решением задачи (3) есть $u\in H_0^1[0;1]$. Тогда задача (4) имеет единственное решение u_h, которое удовлетворяет оценке

$$|u-u_h|_1\le\left(1+\frac{C_1}{c_2(h)}\right)\inf_{w_h\in\Phi_h}|u-w_h|_1, \qquad (5)$$

где C_1 — константа непрерывности для формы $a(u,v)$, т.е. $\forall u\in H_0^1[0;1]$ и $\forall v\in H_0^1[0;1]$ справедливо $|a(u,v)|\le C_1|u|_1\,|v|_1$.

Доказательство теоремы 1 приведено в [12, теорема 3.1, с. 43], где показано, что $C_1=\sqrt{1+k^2/(4\pi^2)}$, причем данное значение нельзя уменьшить (см. замечания в [18] относительно множителя $1+C_1/c_2(h)$ в правой части выражения (5)).

Определение 1. Будем считать, что величина $c_2(h)$ равномерно отделена от нуля некоторой константой $C_0 > 0$, если $\forall h > 0$ (по крайней мере достаточно малых h, не превышающих некоторого фиксированного h_0) справедливо $c_2(h) \ge C_0$.

Из оценки (5) следует, что если величина $c_2(h)$ равномерно отделена от нуля, то характер сходимости при $h \to 0$ зависит лишь от величины $\inf\limits_{w_h \in \Phi_h} |u - w_h|_1$, а также видно, что при фиксированном h чем больше величина $c_2(h)$, тем меньше погрешность аппроксимации $|u - u_h|_1$. Поэтому при исследовании точности и сходимости метода Петрова–Галеркина важным является получение для величины $c_2(h)$ равномерно отделенных от нуля оценок снизу. Имея для этих оценок общие выражения, путем надлежащего выбора входящих в них параметров можно попытаться сделать их как можно большими, что, в свою очередь, приведет к увеличению точности оценки аппроксимации. Для случая с неодинаковыми α_i (т.е. зависимыми от индекса i) при использовании линейных базисных функций и квадратичных весовых (и некоторых дополнительных соглашений о весовых функциях и выборе норм в теореме 1) справедлива оценка [2, 3]

$$c_2(h) \ge (1 + 6 \max \alpha_i^2)^{-1/2}. \tag{6}$$

В [12] показано, что для случая $\alpha_i = \alpha = \text{const} \ge 0$ справедлива оценка

$$c_2(h) \ge (1 + kh\alpha / 2)(1 + 3\alpha^2)^{-1/2}, \tag{7}$$

причем она квазиоптимальна: в некоторых случаях ее невозможно улучшить, например, при нечетном N имеем $c_2(h) = (1 + kh\alpha / 2)(1 + 3\alpha^2)^{-1/2}$. В настоящей статье данные результаты обобщены и приведенные выше оценки для $c_2(h)$ следуют из результатов работы как частные случаи (см. далее теорему 2).

Используем обозначение $(\vec{x}, \vec{y})$ для скалярного (стандартного) произведения [19] векторов-столбцов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ из N-мерного евклидового вещественного пространства R^N. Индексом Т обозначим операцию транспонирования, тогда $(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^{\mathrm{T}} \vec{y}$.

Лемма 1. Пусть $u(x) = \sum_{j=1}^{N} u_j N_j(x) \in \Phi_h$, $v(x) = \sum_{i=1}^{N} v_i W_i(x) \in \Psi_h$. Тогда $a(u, v) = \vec{v}^{\mathrm{T}} A_h \vec{u}$, $|u|_1^2 = \vec{u}^{\mathrm{T}} B_h \vec{u}$, $|v|_1^2 = \vec{v}^{\mathrm{T}} C_h \vec{v}$, где $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_N)^{\mathrm{T}}$, $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_N)^{\mathrm{T}}$,

$$A_h = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 + kh\alpha_1 & -1 + kh(1 - \alpha_1)/2 & \ddots & \\ -1 - kh(1 + \alpha_2)/2 & 2 + kh\alpha_2 & -1 + kh(1 - \alpha_2)/2 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & -1 - kh(1 + \alpha_N)/2 & 2 + kh\alpha_N \end{pmatrix} \tag{8}$$

или поэлементно

$$(A_h)_{i,j} = \begin{cases} -1/h - (1 + \alpha_i)k/2, & j = i - 1, \\ 2/h + k\alpha_i, & j = i, \\ -1/h + (1 - \alpha_i)k/2, & j = i + 1, \\ 0, & |i - j| > 1, \end{cases}$$

$$B_h = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & \ddots & \\ -1 & 2 & -1 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (B_h)_{i,j} = \begin{cases} -1/h, & |i - j| = 1, \\ 2/h, & j = i, \\ 0, & |i - j| > 1, \end{cases} \tag{9}$$

$$C_h = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2+6\alpha_1^2 & -1-3\alpha_1\alpha_2 & \ddots & \\ -1-3\alpha_2\alpha_1 & 2+6\alpha_2^2 & -1-3\alpha_2\alpha_3 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & -1-3\alpha_N\alpha_{N-1} & 2+6\alpha_N^2 \end{pmatrix},$$

$$(C_h)_{i,j} = \begin{cases} -(1+3\alpha_i\alpha_j)/h, & |i-j|=1, \\ (2+6\alpha_i^2)/h, & j=i, \\ 0, & |i-j|>1. \end{cases} \qquad (10)$$

Доказательство данной леммы можно получить непосредственным вычислением интегралов, входящих в выражения $a(u,v)$, $|u|_1^2$ и $|v|_1^2$.

Следствие. Задача (4) сводится к решению системы линейных уравнений с матрицей A_h и правой частью $\vec{f} \equiv (f_1, f_2, \ldots, f_N)^{\mathrm{T}}$, где $f_i \equiv (f, W_i)_0$.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ НОРМА МАТРИЦЫ

Пусть $\|\cdot\|$ — стандартная евклидова векторная норма на R^N (т.е. $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x},\vec{x})}$ при $\vec{x} \in R^N$) и соответствующая подчиненная матричная (операторная) [19] норма произвольной матрицы A размера $N \times N$: $\|A\| \equiv \sup\limits_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|$. Единичную матрицу обозначим E. Тогда логарифмической нормой матрицы A называют число $\mu(A) = \lim\limits_{t\to 0+} (\|E+tA\|-1)/t$ [20–22]. В дальнейшем будем пользоваться следующей оценкой [20, 21]: $\forall \vec{x} \in R^N$ справедливо неравенство $-\mu(-A)\|\vec{x}\|^2 \le \vec{x}^{\mathrm{T}} A\vec{x} = (A\vec{x},\vec{x}) \le \mu(A)\|\vec{x}\|^2$ (причем верхняя и нижняя границы неравенства достигаются на некоторых векторах). Подробный обзор оценок для логарифмических норм приведен в [22]. Докажем следующую вспомогательную лемму, позволяющую оценивать $\mu(A)$ сверху.

Лемма 2. Для логарифмической нормы $\mu(A)$ матрицы $A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1}^N$ справедлива оценка $\mu(A) \le \max\limits_{1\le i\le N} (a_{i,i} + \frac{1}{2}\sum\limits_{j\ne i} |a_{i,j} + a_{j,i}|)$.

Доказательство. Пусть $G = (A + A^{\mathrm{T}})/2$. Матрица G симметрична, поэтому все ее собственные числа $\lambda_i(G)$ лежат на действительной оси. Оценим правую часть равенства $\mu(A) = \max\limits_i \lambda_i(G)$ [20, 21], используя теорему Гершгорина о локализации собственных чисел [19], в силу которой все собственные числа G лежат в объединении множеств (кругов Гершгорина) $\bigcup\limits_{i=1}^N \{z : |z - G_{i,i}| \le \sum\limits_{j\ne i} |G_{i,j}|\}$, откуда сразу получаем нужное соотношение

$$\mu(A) = \max_{1\le i\le N} \lambda_i(G) \le \max_{1\le i\le N} (G_{i,i} + \sum_{j\ne i} |G_{i,j}|) = \max_{1\le i\le N} (a_{i,i} + \frac{1}{2}\sum_{j\ne i} |a_{i,j} + a_{j,i}|).$$

Лемма доказана.

Замечание 1. Доказанная лемма дает более точную оценку для $\mu(A)$ по сравнению с соответствующими оценками, приведенными в [22].

В дальнейшем при нахождении оценок для величины $c_2(h)$ будем использовать вспомогательные матрицы D, B и A_0 размера $N \times N$:

$$D \equiv \begin{pmatrix} 2\alpha_1^2 & -\alpha_1\alpha_2 & \ddots & \\ -\alpha_2\alpha_1 & 2\alpha_2^2 & -\alpha_2\alpha_3 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ \ddots & -\alpha_N\alpha_{N-1} & 2\alpha_N^2 & \end{pmatrix}, \quad D_{i,j} = \begin{cases} -\alpha_i\alpha_j, \ |i-j|=1, \\ 2\alpha_i^2, \ j=i, \\ 0, \ |i-j|>1; \end{cases}$$

B — это матрица B_h без множителя $1/h$, $B \equiv hB_h$ (см. (9));

$$A_0 \equiv \begin{pmatrix} 2\alpha_1 & -\alpha_1 & \ddots & \\ -\alpha_2 & 2\alpha_2 & -\alpha_2 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ \ddots & -\alpha_N & 2\alpha_N & \end{pmatrix}, \quad (A_0)_{i,j} = \begin{cases} -\alpha_i, \ |i-j|=1, \\ 2\alpha_i, \ j=i, \\ 0, \ |i-j|>1. \end{cases}$$

Известно [23], что $\forall \vec{x} \in R^N$ $\vec{x}^{\mathrm{T}} B\vec{x} = (B\vec{x}, \vec{x}) > 0$ при $\vec{x} \neq 0$, т.е. квадратичная форма $(B\vec{x}, \vec{x})$ положительно определена. Докажем теперь лемму, касающуюся свойств квадратичной формы $\vec{x}^{\mathrm{T}} D\vec{x} = (D\vec{x}, \vec{x})$ с матрицей D.

Лемма 3. Для произвольного набора чисел $\{\alpha_i\}_{i=1}^N$ справедливо $\vec{x}^{\mathrm{T}} D\vec{x} \geq 0$ $\forall \vec{x} \in R^N$. Если, кроме того, выполняются условия $\chi - 2\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 \geq 0$ и $2\alpha_i^2 - \alpha_i(\alpha_{i-1} + \alpha_{i+1}) \leq 0$ при $2 \leq i \leq N-1$, а также $\chi - 2\alpha_N^2 + \alpha_{N-1}\alpha_N \geq 0$, где произвольное число $\chi \geq \max\limits_{1 \leq i \leq N} \alpha_i^2$, то $\forall \vec{x} \in R^N$ справедливо неравенство $\vec{x}^{\mathrm{T}} (\chi B)\vec{x} \geq \vec{x}^{\mathrm{T}} D\vec{x}$.

Доказательство. Вначале докажем первую часть леммы. В результате подсчета, используя справедливое для произвольных чисел неравенство $ab \leq (a^2 + b^2)/2$, получаем, что

$$\vec{x}^{\mathrm{T}} D\vec{x} = \sum_{i=1}^{N} (-\alpha_i\alpha_{i-1}x_{i-1} + 2\alpha_i^2 x_i - \alpha_i\alpha_{i+1}x_{i+1})x_i = 2(\alpha_1^2 x_1^2 + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_N^2 x_N^2 - \alpha_1\alpha_2 x_1 x_2 - \alpha_2\alpha_3 x_2 x_3 - \ldots$$
$$\ldots - \alpha_{N-1}\alpha_N x_{N-1} x_N) \geq 2(\alpha_1^2 x_1^2 + \ldots + \alpha_N^2 x_N^2 -$$
$$-\alpha_1^2 x_1^2/2 - \alpha_2^2 x_2^2/2 - \alpha_2^2 x_2^2/2 - \alpha_3^2 x_3^2/2 - \ldots$$
$$\ldots - \alpha_{N-1}^2 x_{N-1}^2/2 - \alpha_N^2 x_N^2/2) = 2(\alpha_1^2 x_1^2/2 + \alpha_N^2 x_N^2/2) = \alpha_1^2 x_1^2 + \alpha_N^2 x_N^2 \geq 0$$

(в первой сумме полагаем формально $\alpha_0 = \alpha_{N+1} = 0$). Докажем теперь справедливость неравенства $\vec{x}^{\mathrm{T}} (\chi B)\vec{x} \geq \vec{x}^{\mathrm{T}} D\vec{x}$ $\forall \vec{x} \in R^N$ или в эквивалентной записи неравенства $((\chi B - D)\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$. Для его выполнения достаточна справедливость $-\mu(-(\chi B - D)) \geq 0$.

В силу леммы 2 имеем оценки

$$\mu(-(\chi B - D)) \leq \max\left\{-2\chi + 2\alpha_1^2 + \frac{1}{2}|2(-\chi + \alpha_1\alpha_2)|,\right.$$
$$-2\chi + 2\alpha_N^2 + \frac{1}{2}|2(-\chi + \alpha_{N-1}\alpha_N)|,$$

$$\max_{2\le i\le N-1}\left(-2\chi+2\alpha_1^2+\frac{1}{2}|2(-\chi+\alpha_{i-1}\alpha_i)|+\frac{1}{2}|2(-\chi+\alpha_i\alpha_{i+1})|\right)\Bigg\}=$$

$$=\max\Bigg\{-2\chi+2\alpha_1^2+|\chi-\alpha_1\alpha_2|,\ -2\chi+2\alpha_N^2+|\chi-\alpha_{N-1}\alpha_N|\,,$$

$$\max_{2\le i\le N-1}(-2\chi+2\alpha_i^2+|\chi-\alpha_{i-1}\alpha_i|+|\chi-\alpha_i\alpha_{i+1}|)\Bigg\}=$$

$$=\max\Bigg\{-\chi+2\alpha_1^2-\alpha_1\alpha_2\,,\ \max_{2\le i\le N-1}(2\alpha_i^2-\alpha_{i-1}\alpha_i-\alpha_i\alpha_{i+1})\,,$$

$$-\chi+2\alpha_N^2-\alpha_{N-1}\alpha_N\Bigg\}.$$

Из этого неравенства и условий доказываемой леммы получаем неравенство

$$-\mu(-(\chi B-D))\ge-\max\{-\chi+2\alpha_1^2-\alpha_1\alpha_2\,,\ \max_{2\le i\le N-1}(2\alpha_i^2-\alpha_{i-1}\alpha_i-\alpha_i\alpha_{i+1}),$$

$$-\chi+2\alpha_N^2-\alpha_{N-1}\alpha_N\}=$$

$$=\min\{\chi-2\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2\,,\ \min_{2\le i\le N-1}(\alpha_{i-1}\alpha_i+\alpha_i\alpha_{i+1}-2\alpha_i^2),\ \chi-2\alpha_N^2+\alpha_{N-1}\alpha_N\}\ge 0\,.$$

Лемма доказана.

Замечание 2. Число χ в неравенстве $\vec{x}^{\mathrm{T}}(\chi B)\vec{x}\ge\vec{x}^{\mathrm{T}}D\vec{x}$ не может быть меньше $\max\limits_{1\le i\le N}\alpha_i^2$, что сразу следует из критерия неотрицательности квадратичной формы [19, 24], примененного к форме $\vec{x}^{\mathrm{T}}(\chi B-D)\vec{x}$, и согласно которому для выполнения $\vec{x}^{\mathrm{T}}(\chi B-D)\vec{x}\ge 0\ \ \forall\,\vec{x}\in R^N$ необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы $\chi B-D$ были неотрицательны; если $\chi<\max\limits_{1\le i\le N}\alpha_i^2$, то один из элементов на главной диагонали матрицы $\chi B-D$ будет отрицательным, что приведет к нарушению условий критерия.

Замечание 3. Рассмотрим подробнее случай, когда α_i неодинаковы (т.е. существуют такие i и j, $i\ne j$, что $\alpha_i\ne\alpha_j$). Покажем, что для выполнения $\vec{x}^{\mathrm{T}}(\chi B)\vec{x}\ge\vec{x}^{\mathrm{T}}D\vec{x}$ необходимо, чтобы $\chi>\max\limits_{1\le i\le N}\alpha_i^2$. Действительно, пусть величина $\max\limits_{1\le i\le N}\alpha_i^2$ достигается на каком-нибудь индексе k. Тогда для одного из соседних индексов $j=k+1$ либо $j=k-1$ будет $\alpha_k\ne\alpha_j$. Если окажется, что $\alpha_k=\alpha_{k-1}=\alpha_{k+1}$, то индексу k можно присвоить значение $k-1$ или $k+1$ и снова повторить данное рассуждение, в результате получим, что либо все значения α_i совпадают, чего быть не может, либо действительно существуют искомые k и j с заданными свойствами. Положим для определенности $j=k-1$. Тогда если $\chi=\max\limits_{1\le i\le N}\alpha_i^2=\alpha_k^2$, то главный минор

$$\begin{vmatrix}2\chi-2\alpha_j^2 & -\chi+\alpha_j\alpha_k\\ -\chi+\alpha_k\alpha_j & 2\chi-2\alpha_k^2\end{vmatrix}=3(\chi-\alpha_k^2)(\chi-\alpha_j^2)-\chi(\alpha_k-\alpha_j)^2=0-\chi(\alpha_k-\alpha_j)^2<0\,,$$

что свидетельствует о нарушении условий критерия неотрицательности квадратичной формы $\vec{x}^{\mathrm{T}}(\chi B-D)\vec{x}$.

Лемма 4. Пусть выполняются условия $3\alpha_1 - \alpha_2 - 2\delta \ge 0$ и $2\alpha_i - (\alpha_{i-1} + \alpha_{i+1}) \ge 0$ при $2 \le i \le N-1$, а также $3\alpha_N - \alpha_{N-1} - 2\delta \ge 0$ и $\alpha_i + \alpha_{i+1} - 2\delta \ge 0$ при $1 \le i \le N-1$, тогда $\forall \vec{x} \in R^N$ справедливо неравенство $\vec{x}^{\mathrm{T}} A_0 \vec{x} \ge \vec{x}^{\mathrm{T}} (\delta B)\vec{x}$. Здесь $\delta \in R$ — число, удовлетворяющее неравенствам.

Доказательство. Для доказательства неравенства $\vec{x}^{\mathrm{T}} A_0 \vec{x} \ge \vec{x}^{\mathrm{T}} (\delta B)\vec{x}$ (или $(A_0\vec{x}, \vec{x}) \ge \delta(B\vec{x}, \vec{x})$ в эквивалентной записи) достаточно показать, что $-\mu(-(A_0 - \delta B)) \ge 0$. В силу леммы 2 имеем оценки

$$\mu(-(A_0 - \delta B)) \le \max\left\{ -2\alpha_1 + 2\delta + \frac{1}{2}|\alpha_1 - \delta + \alpha_2 - \delta|, \right.$$

$$-2\alpha_N + 2\delta + \frac{1}{2}|\alpha_{N-1} - \delta + \alpha_N - \delta|,$$

$$\left. \max_{2 \le i \le N-1}\left(-2\alpha_i + 2\delta + \frac{1}{2}|\alpha_{i-1} - \delta + \alpha_i - \delta| + \frac{1}{2}|\alpha_i - \delta + \alpha_{i+1} - \delta| \right) \right\} =$$

$$= \max\left\{ -\frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \delta,\ -\frac{3}{2}\alpha_N + \frac{1}{2}\alpha_{N-1} + \delta,\ \max_{2\le i\le N-1}\left(\frac{\alpha_{i-1} + \alpha_{i+1}}{2} - \alpha_i \right) \right\}.$$

Отсюда, используя условия доказываемой леммы, сразу получаем неравенство

$$-\mu(-(A_0 - \delta B)) \ge \min\left\{ \frac{3}{2}\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 - \delta, \right.$$

$$\left. \frac{3}{2}\alpha_N - \frac{1}{2}\alpha_{N-1} - \delta,\ \min_{2 \le i \le N-1}\left(\alpha_i - \frac{\alpha_{i-1} + \alpha_{i+1}}{2} \right) \right\} \ge 0.$$

Лемма доказана.

Докажем лемму, из которой будут вытекать важные следствия о качественном поведении численной аппроксимации Петрова–Галеркина.

Лемма 5. При выполнении неравенств

$$\alpha_i \ge 1 - \frac{2}{kh},\ 1 \le i \le N, \tag{11}$$

матрица A_h, определяемая выражением (8), является M-матрицей [2, 25].

Доказательство. Неравенство (11) эквивалентно неравенству $-1 + \frac{kh}{2} - \frac{kh\alpha_i}{2} \le 0$, из которого также следует, что $-1 - \frac{kh}{2} - \frac{kh\alpha_i}{2} \le -kh < 0$, поэтому все $(A_h)_{i,j} \le 0$ при $i \ne j$, и таким образом выполнены необходимые условия, чтобы A_h была M-матрицей. Далее воспользуемся следующим критерием для M-матриц (см. [2, с. 279]): некоторая матрица $A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1}^N$, $a_{i,j} \le 0$, $i \ne j$, является M-матрицей тогда и только тогда, когда существует вектор $\vec{e}$ с неотрицательными компонентами, для которого вектор $A\vec{e}$ также имеет неотрицательные компоненты, причем для тех $i \in \overline{1,\ldots,N}$, для которых $(A\vec{e})_i = 0$, существует такая цепочка чисел $i_0 = i, i_1, \ldots, i_k \in \overline{1,\ldots,N}$, что $a_{i_{\nu-1}, i_\nu} < 0$ для $1 \le \nu \le k$ и $(A\vec{e})_{i_k} > 0$. Легко видеть, что в данном случае в качестве такого вектора $\vec{e}$ можно использовать вектор $\vec{e} = (1,\ldots,1)^{\mathrm{T}}$. Действительно, $(A_h\vec{e})_1 = 1 + \frac{kh}{2} + \frac{kh\alpha_1}{2} =$ $= \left(1 - \frac{kh}{2} + \frac{kh\alpha_1}{2}\right) + kh \ge 0 + kh > 0$, $(A_h\vec{e})_i = 0$ при $2 \le i \le N-1$ и $(A_h\vec{e})_N =$

$=1-\dfrac{kh}{2}+\dfrac{kh\alpha_N}{2}\geq 0$. Теперь для произвольного $i\in\overline{2,\ldots,N}$, для которого $(A_h\vec{e})_i=0$, в качестве цепочки чисел $i_0=i, i_1,\ldots,i_k\in\overline{1,\ldots,N}$ можно использовать цепочку $i, i-1, i-2,\ldots,1$ (т.е. осуществляется обход нижней поддиагонали).

Лемма доказана.

Следствие. При выполнении условий (11) справедливо $\forall \upsilon\in\Psi_h$, $\upsilon\neq 0$ $\sup\limits_{u\in\Phi_h}|a(u,\upsilon)|>0$ (данное утверждение имеется в теореме 1 и применяется в дальнейшем). Действительно, используя лемму 1 и свойство обратимости матрицы A_h, имеем $\sup\limits_{u\in\Phi_h}|a(u,\upsilon)|=\sup\limits_{\vec{u}\in R^N}|\vec{\upsilon}^{\,\mathrm{T}}A_h\vec{u}|\geq\vec{\upsilon}^{\,\mathrm{T}}A_hA_h^{-1}\vec{\upsilon}=\|\vec{\upsilon}\|^2>0$.

Замечание 4. Аппроксимация Петрова–Галеркина сводится к системе уравнений

$$(-1-kh(1+\alpha_i)/2)\,y_{i-1}+(2+kh\alpha_i)\,y_i+(-1+kh(1-\alpha_i)/2)\,y_{i+1}=h\cdot(f,W_i)_0,\quad(12)$$

$1\leq i\leq N$, $y_0=y_{N+1}=0$ (см. следствие из леммы 1). Условия (11) гарантируют устойчивость решения схемы (12) в смысле отсутствия осцилляций (элементы A_h^{-1} неотрицательны, для разностной схемы (12) выполняется разностный принцип максимума и она будет монотонной [2, 23]). Нарушение условий (11) может привести к большим погрешностям и ложным (нефизическим) осцилляциям в численном решении. Например, для случая $\alpha_i=\alpha=\mathrm{const}\geq 0$ нарушение условий (11) приводит к тому, что распределение знаков элементов матрицы A_h^{-1} имеет вид

$$\operatorname{sign}(A_h^{-1})_{i,j}=\begin{cases}(-1)^{i+j}, & i\leq j,\\ 1, & i>j\end{cases}$$

(это следует из результатов [24], см. также описание для данного простейшего случая в [12]). Схема (12) линейная, поэтому погрешность решения $z_i\equiv y_i-u(x_i)$ удовлетворяет аналогичной линейной системе уравнений с матрицей A_h (но с другой правой частью [23], являющейся погрешностью аппроксимации схемой (12) уравнения (2)). Отсюда следует, что элементы $(A_h^{-1})_{j,N}$, $1\leq j\leq N$, имеют чередующиеся знаки, поэтому если погрешность аппроксимации схемой (12) уравнения (2) при $i=N$ превышает погрешность аппроксимации при остальных i (наример, это произойдет, если возле точки x_{N+1} образуется приграничный слой), то численное решение может оказаться осциллирующим. Например, при $\alpha_i=0$ условие (11) переходит в известное условие $kh\leq 2$ устойчивости (в смысле отсутствия осцилляций) метода Галеркина (см. [1, гл. 7]). Поэтому при расчетах с помощью МКЭ Петрова–Галеркина естественно требование выполнения условий (11).

Заметим, что условия неравенств (11) накладывают ограничения на количественные (абсолютные) значения коэффициентов α_i, в то время, как неравенства из лемм 3 и 4 — на расположение чисел α_i одно относительно другого, поэтому данные условия непротиворечивы. Докажем следующую теорему, дающую оценку величины $c_2(h)$ в теореме 1.

Теорема 2. Пусть выполняются условия лемм 3 и 4, причем $1+kh\delta/2>0$. Тогда справедлива оценка

$$c_2(h)=\inf_{u\in\Phi_h}\sup_{\upsilon\in\Psi_h}\frac{|a(u,\upsilon)|}{|u|_1\,|\upsilon|_1}\geq\frac{1+kh\delta/2}{\sqrt{1+3\chi}}\equiv C_0(h)>0.\qquad(13)$$

Доказательство. В силу леммы 1 имеем $c_2(h) = \min\limits_{\vec{u}\in R^N} \max\limits_{\vec{v}\in R^N} \dfrac{|\vec{v}^{\,\mathrm{T}} A_h \vec{u}|}{\sqrt{\vec{u}^{\,\mathrm{T}} B_h \vec{u}}\sqrt{\vec{v}^{\,\mathrm{T}} C_h \vec{v}}}$.

Далее $c_2(h) \ge \min\limits_{\vec{u}\in R^N} \dfrac{\vec{u}^{\,\mathrm{T}} A_h \vec{u}}{\sqrt{\vec{u}^{\,\mathrm{T}} B_h \vec{u}}\sqrt{\vec{u}^{\,\mathrm{T}} C_h \vec{u}}}$. Заметим, что множители h^{-1} перед матрицами A_h, B_h и C_h в приведенных выражениях взаимно сокращаются, поэтому в пределах данного доказательства будем считать, что множители перед матрицами A_h, B_h, C_h отсутствуют. С учетом изложенного представим матрицу A_h в виде $A_h = B + A_1 + \dfrac{kh}{2} A_0$, причем матрица A_1 определяется данным представлением (на главной диагонали у нее имеем нули, на верхней и нижней поддиагоналях — величины $\pm kh/2$ соответственно). Матрица A_1 кососимметрична ($A_1 = -A_1^{\mathrm{T}}$), поэтому $\vec{u}^{\,\mathrm{T}} A_1 \vec{u} = (A_1\vec{u}, \vec{u}) = 0 \quad \forall \vec{u} \in R^N$. Матрицу C_h представим в виде $C_h = B + 3D$. В результате получим следующие соотношения:

$$c_2(h) \ge \min_{\vec{u}\in R^N} \frac{\vec{u}^{\,\mathrm{T}} A_h \vec{u}}{\sqrt{\vec{u}^{\,\mathrm{T}} B_h \vec{u}}\sqrt{\vec{u}^{\,\mathrm{T}} C_h \vec{u}}} = \min_{\vec{u}\in R^N} \frac{\vec{u}^{\,\mathrm{T}} (B + A_1 + (kh/2)A_0)\vec{u}}{\sqrt{\vec{u}^{\,\mathrm{T}} B \vec{u}}\sqrt{\vec{u}^{\,\mathrm{T}} (B+3D) \vec{u}}} =$$

$$= \min_{\vec{u}\in R^N} \frac{\vec{u}^{\,\mathrm{T}} B\vec{u} + (kh/2)\vec{u}^{\,\mathrm{T}} A_0 \vec{u}}{\sqrt{\vec{u}^{\,\mathrm{T}} B \vec{u}}\sqrt{\vec{u}^{\,\mathrm{T}} B\vec{u} + 3\vec{u}^{\,\mathrm{T}} D \vec{u}}}.$$

Используя леммы 3 и 4, получаем

$$c_2(h) \ge \min_{\vec{u}\in R^N} \frac{\vec{u}^{\,\mathrm{T}} B\vec{u} + (kh/2)\vec{u}^{\,\mathrm{T}} A_0 \vec{u}}{\sqrt{\vec{u}^{\,\mathrm{T}} B \vec{u}}\sqrt{\vec{u}^{\,\mathrm{T}} B\vec{u} + 3\vec{u}^{\,\mathrm{T}} D \vec{u}}} \ge \min_{\vec{u}\in R^N} \frac{\vec{u}^{\,\mathrm{T}} B\vec{u} + (kh\delta/2)\vec{u}^{\,\mathrm{T}} B \vec{u}}{\sqrt{\vec{u}^{\,\mathrm{T}} B \vec{u}}\sqrt{\vec{u}^{\,\mathrm{T}} B\vec{u} + 3\vec{u}^{\,\mathrm{T}} D \vec{u}}} \ge$$

$$\ge \min_{\vec{u}\in R^N} \frac{(1 + kh\delta/2)\vec{u}^{\,\mathrm{T}} B\vec{u}}{\sqrt{\vec{u}^{\,\mathrm{T}} B \vec{u}}\sqrt{\vec{u}^{\,\mathrm{T}} B\vec{u} + 3\chi\vec{u}^{\,\mathrm{T}} B \vec{u}}} = \min_{\vec{u}\in R^N} \frac{(1 + kh\delta/2)\vec{u}^{\,\mathrm{T}} B\vec{u}}{\vec{u}^{\,\mathrm{T}} B \vec{u}\sqrt{1+3\chi}} = \frac{1 + kh\delta/2}{\sqrt{1+3\chi}} = C_0(h) > 0.$$

Теорема доказана.

Следствие. Из теоремы 2 можно заключить, что при независимых от h числах δ и χ величина $c_2(h)$ в выражении (13) равномерно отделена от нуля. Действительно, если $\delta \ge 0$, то для $\forall h \ge 0$ имеем $c_2(h) \ge C_0(h) \ge C_0(0) = (1+3\chi)^{-1/2} > 0$. Если $\delta < 0$, то зафиксировав некоторое $h_0 > 0$, для которого выполняются условия теоремы (в частности, неравенство $1 + kh_0\delta/2 > 0$), получим, что $c_2(h) \ge C_0(h) \ge$ $\ge C_0(h_0) > 0 \quad \forall h \le h_0$.

Замечание 5. Рассмотрим случай, когда $\alpha_i = \alpha = \mathrm{const} \ge 0$ [12]. В качестве χ из леммы 3 возьмем $\chi = \alpha^2$, а в качестве δ из леммы 4 примем $\delta = \alpha$. Условия лемм 3 и 4 при таком выборе, очевидно, выполнены (все неравенства превращаются в тождества). Тогда из теоремы 2 получаем оценку $c_2(h) \ge \dfrac{1 + kh\alpha/2}{\sqrt{1+3\alpha^2}}$, которая совпадает с оценкой (7) из [12]. Оценка (6) находится из выражения (13), если в последнем положить $\delta = 0$ и $\chi = 2\max \alpha_i^2$ (отсюда также видно, что оценка (13) является более точной). Докажем теорему, дающую оценку точности метода Петрова–Галеркина, и из которой следует его сходимость.

Теорема 3. Пусть $u \in H_0^1[0;1] \cap H^2[0;1]$ является решением задачи (3), а $u_h \in \Phi_h$ — решением задачи (4), и выполняются условия теоремы 2 и леммы 5. Тогда справедливы оценки

$$|u - u_h|_1 \le \left(1 + \frac{C_1}{c_2(h)}\right) h \| u'' \|_0 \le \left(1 + \frac{C_1}{C_0(h)}\right) h \| u'' \|_0. \qquad (14)$$

Доказательство. Из теоремы 2 и следствия к лемме 5 получаем, что условия теоремы 1 выполнены, поэтому справедлива оценка (5): $|u-u_h|_1 \le \le \left(1+\dfrac{C_1}{c_2(h)}\right)\inf\limits_{w_h\in\Phi_h}|u-w_h|_1$. Для оценки величины $\inf\limits_{w_h\in\Phi_h}|u-w_h|_1$ воспользуемся тем, что Φ_h является пространством интерполяционных сплайнов первой степени [23], свойства которых хорошо известны. В частности, можно показать [23], что $\inf\limits_{w_h\in\Phi_h}|u-w_h|_1 \le h\|u''\|_0$. Отсюда непосредственно получаем оценку (14).

Теорема доказана.

Следствие. Пусть величина $c_2(h)$ (или величина $C_0(h)$) равномерно отделена от нуля (см. следствие из теоремы 2). Тогда из (14) получаем $|u-u_h|_1 = O(h)$ при $h\to 0$. Использовав теоремы вложения С.Л. Соболева [15, 16], получим сходимость u_h к u со скоростью $O(h)$ также и в пространствах $L_2[0;1]$ и $C[0;1]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрены вопросы точности и устойчивости численного интегрирования стационарного уравнения конвекции–диффузии МКЭ Петрова–Галеркина с квадратичными весовыми функциями типа (1), где каждая функция W_i имеет индивидуальный коэффициент α_i. Для определенности использованы квадратичные весовые функции, однако результаты и выкладки статьи без существенных затруднений можно перенести на другие весовые функции и классы таких функций (например, практически без изменений перенести на достаточно широкий класс полиномиальных функций [10]). Получены оценки точности метода в зависимости от выбора набора коэффициентов $\{\alpha_i\}$, а именно доказана теорема 2, дающая нижнюю границу для величины $c_2(h)$ (см. теоремы 1 и 3), которой, главным образом, и определяется погрешность метода при фиксированном пространстве базисных функций. Полученные оценки обобщают и уточняют известные в данном направлении результаты [2, 3, 12]. Исследован вопрос сходимости рассматриваемой версии МКЭ Петрова–Галеркина в нескольких нормах (теорема 3).

Автор выражает благодарность кандидиату технических наук Николаю Николаевичу Сальникову (ИКИ НАН Украины) за плодотворное обсуждение работы и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина: Пер. с англ. — М.: Мир, 1988. — 352 с.

2 Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L. Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations. — Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. — 604 p.

3. Grossmann C., Roos H.-G., Stynes M. Numerical treatment of partial differential equations. — Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. — 596 p.

4. Fries T.P., Matthies H.G. A review of Petrov–Galerkin stabilization approaches and an extension to meshfree methods. — Brunswick (Germany): Techn. Univ. Braunschweig, Informatik-Bericht Nr. 2004. — 71 p.

5. Hughes T.J.R., Scovazzi G., Tezduyar T.E. Stabilized methods for compressible flows // J. Sci. Comput. — 2010. — **43**. — P. 343–368.

6. John V., Schmeyer E. Finite element methods for time-dependent convection–diffusion–reaction equations with small diffusion // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2008. — **198.** — P. 475–494.

7. Tezduyar T.E., Senga M. Stabilization and shock-capturing parameters in SUPG formulation of compressible flows // Ibid. — 2006. — **195**. — P. 1621–1632.

8. N a d u k a n d i P., O n a t e E., G a r c i a J. A high-resolution Petrov–Galerkin method for the 1D convection–diffusion–reaction problem // Ibid. — 2010. — **199**, Iss. 9–12. — P. 525–546.
9. N a d u k a n d i P., O n a t e E., G a r c i a J. A high-resolution Petrov–Galerkin method for the convection–diffusion–reaction problem. Pt. 2: A multidimensional extension // Ibid. — 2012. — **213–216.** — P. 327–352.
10. С а л ь н и к о в Н.Н., С и р и к С.В., Т е р е щ е н к о И.А. О построении конечномерной математической модели процесса конвекции–диффузии с использованием метода Петрова–Галеркина // Проблемы управления и информатики. — 2010. — № 3. — С. 94–109.
11. С и р и к С.В., С а л ь н и к о в Н.Н. Численное интегрирование уравнения Бюргерса методом Петрова–Галеркина с адаптивными весовыми функциями // Там же. — 2012. — № 1. — С. 94–110.
12. G r i f f i t h s D.F, L o r e n z J. An analysis of the Petrov–Galerkin finite element method // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 1978. — **14**. — P. 39–64.
13. M o r t o n K.W. Finite element methods for non-self-adjoint problems // Proc. SERC Summer School (Lancaster, 1981) / P.R. Turner (Ed.); Lect. Notes Math. — Berlin: Springer-Verlag, 1982. — **965**. — P. 113–148.
14. Т и х о н о в А.Н., С а м а р с к и й А.А. Уравнения математической физики. — 6-е изд. — М.: Наука, 1999. — 798 с.
15. М а з ь я В.Г. Пространства С.Л. Соболева. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. — 416 с.
16. A g m o n S. Lectures on elliptic boundary value problems. — Princeton (N.J.): Van Nostrand, 1965. — 300 p.
17. B a b u s k a I., A z i z A.K. Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method / Ed. A.K. Aziz. The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial. — New York: Acad. Press, 1972. — P. 2–363.
18. X u J., Z i k a t a n o v L. Some observations on Babuska and Brezzi theories // BIT Num. Math. — 2003. — **94**. — P. 195–202.
19. Х о р н Р., Д ж о н с о н Ч. Матричный анализ: Пер. с англ. — М.: Мир, 1989. — 655 с.
20. Д е к к е р К., В е р в е р Я. Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений: Пер. с англ. — М.: Мир, 1988. — 334 с.
21. S o d e r l i n d G. The logarithmic norm. History and modern theory // BIT Num. Math. — 2006. — **46**. — P. 631–652.
22. П е р о в А.И. Достаточные условия устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами в критических случаях–I // Автоматика и телемеханика. — 1997. — № 12. — С. 80–89.
23. С а м а р с к и й А.А., Г у л и н А.В. Численные методы математической физики. — 2-е изд. — М.: Науч. мир, 2003. — 316 с.
24. Г а н т м а х е р Ф.Р., К р е й н М.Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. — 2-е изд. — М.: ГИТТЛ, 1950. — 359 с.
25. B e r m a n A., P l e m m o n s R.J. Nonnegative matrices in the mathematical sciences. — Philadelphia: SIAM, 1994. — 340 p.

Поступила 05.03.2013