

**МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В ВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ**

**Аннотация.** Рассмотрено вырождение по малой пространственной координате исходной начально-краевой задачи для гиперболических уравнений в целях построения более простых моделей. Исследована задача в области, один пространственный масштаб которой намного меньше других масштабов, что позволяет разложить искомые функции в степенные ряды и, следовательно, понизить размерность задачи. Однако это достигается ценой вырождения спектра исходной трехмерной задачи.

**Ключевые слова:** гиперболические уравнения, гиперболическое вырождение, гиперслой, эластодинамика.

**ВВЕДЕНИЕ**

Моделирование волновых процессов представляет большой теоретический и прикладной интерес [1, 2]. В случае наличия малых параметров в довольно общих постановках краевых и начально-краевых задач перспективно развитие некоторых упрощенных моделей посредством разложений по малым параметрам. К этому направлению примыкает построение вырождения исходной задачи для гиперболических уравнений при наличии малого параметра поперечного размера области по сравнению с планарным масштабом, что дает возможность понизить размерность задачи.

Начально-краевая задача в  $R^n$  формулируется в слое между двумя гиперповерхностями  $x^s \in [-h^s, h^s]$ , где координатная гиперлиния  $x^s$  ортогональна к гиперповерхностям  $x^s = -h^s$  и  $x^s = h^s$ . Толщина этого гиперслоя  $2h^s$  предполагается намного меньшей, чем продольная характерная длина  $l$  гиперповерхности:  $\xi = h^s / l \ll 1$ . Поэтому можно разложить искомые функции в степенные ряды относительно гиперповерхности  $x^s = 0$  и в результате уменьшить размерность задачи на единицу. Исходя из теории операторов, это отображение оператора  $P$  из  $R^n$  в  $R^{n-1}$  [3, 4]. В таком случае оператор  $P$  не однозначен, а многозначен, так как отбор аппроксимаций в  $R^{n-1}$  может быть проведен на основе различных критериев.

Построение вырожденных моделей подобного вида можно выполнить на основе разных методов. Самым популярным из них является феноменологический подход — метод гипотез и осреднений по координате  $x^s \in [-h^s, h^s]$ . Среди аналитических методов отметим асимптотические подходы и метод степенных рядов. Асимптотические методы аппроксимируют оператор  $P$  как разложение по малому параметру  $\epsilon$ , а метод степенных рядов представляет оператор  $P$  в окрестности  $x^s = 0$ . Аналитические подходы получили применение, начиная от работ Лагранжа [5], который вывел волновое уравнение мелкой воды на основе асимптотических разложений. Метод степенных рядов развивался благодаря работам Коши [6] и Пуассона [7], рассматривавших колебания упругого слоя. В теории пластин и оболочек метод степенных рядов применялся в [8–13].

Отметим, что упомянутые подходы порождают новые, более простые модели, которые могут быть различного типа по сравнению с исходной моделью. Здесь задача вырождения исходной гиперболической начально-краевой задачи рассматривается как инструмент построения более простых гиперболических моделей меньшей размерности, т.е. как реализация гиперболического вырождения [14].

Содержание статьи можно охарактеризовать следующим образом. Выполняется разложение полевых функций в степенные ряды по вырожденной координате  $s$  относительно срединной гиперповерхности, что приводит к вырожденной за-

даче определения коэффициентов рядов, зависящих в данном случае только от  $n-1$  координаты. Подстановка степенных рядов в гиперболические уравнения в частных производных и в граничные и начальные условия приводит к бесконечной системе рекуррентных соотношений. Редукцию этой системы можно провести разными способами, что дает различные аппроксимации, т.е. упрощенные модели. Необходимое условие — получение замкнутой системы для определения новых неизвестных функций. Цель работы — вывести гиперболические аппроксимации относительно координаты  $s$ , а именно построить отображение  $R^n \rightarrow R^{n-1}$ , удовлетворяющее условию предельной корректности, т.е. относиться к гиперболическому типу [14].

Анонсируется достаточное условие получения гиперболических аппроксимаций: сохранить в бесконечных системах все пространственно-временные дифференциальные операторы до заданного порядка. Это условие доказано далее для случая  $R^3$  при рассмотрении задачи эластодинамики для слоя. В таком варианте после длинных выкладок бесконечные системы расщепляются на две независимые системы, соответствующие симметричным и асимметричным полям. В результате получаем гиперболические аппроксимации первого порядка для симметричных и асимметричных полей, соответствующие известным моделям и новым, более точным гиперболическим аппроксимациям второго порядка. Полученные аппроксимации включают как частные случаи и известные модели, не удовлетворяющие принципу гиперболичности (конечности скорости распространения возмущений).

#### ВЫРОЖДЕНИЕ ПО МАЛЫМ ПАРАМЕТРАМ И КООРДИНАТАМ В $R^n$

В евклидовом пространстве  $R^n$  с координатами  $x^q, q = \overline{1, n}$ , рассматриваем математическую модель, представленную конечной системой дифференциальных уравнений в частных производных, для которой ставится краевая задача в области  $\Omega \times [0, X^m], X^m > 0$ , ограниченной гиперповерхностями  $x^s = \pm h^s, h^s > 0$  (индекс  $s$  фиксирован):  $\Omega = \{x \in R^n : -\infty < (x^1, x^2, \dots, x^{s-1}, x^{s+1}, \dots, x^{n-1}) < \infty, x^n \geq 0, -h^s \leq x^s \leq h^s\}$ . Такое тело назовем гиперслоем, или просто слоем, или оболочкой (рис. 1).

Предполагается, что модель зависит от конечного числа  $\nu$  параметров  $\varepsilon_r, r = \overline{1, \nu}$ . Формально такую модель можно задать как систему  $k$  дифференциальных уравнений в частных производных  $p$ -го порядка с  $k$  неизвестными  $u_i, i = \overline{1, k}$ , и  $n$  аргументами [15]:

$$F_i(x^1, \dots, x^n; u_1, \dots, u_k; \underbrace{u_{1,1}, \dots, u_{k,n}}_p; \dots; \underbrace{u_{1,1\dots 1}, \dots, u_{k,n\dots n}}_p; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\nu) = P_i(x^1, \dots, x^n) \text{ в } \Omega. \quad (1)$$

Задается следующая система граничных условий на гиперповерхностях  $x^s = -h^s, x^s = h^s$ :

$$f_j = (x^1, \dots, x^n; u_1, \dots, u_k; \underbrace{u_{1,1}, \dots, u_{k,n}}_{p-1}; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\nu) \Big|_{x^s = \pm h^s} = Q_j^\pm, \quad j = \overline{1, (k \cdot p)}. \quad (2)$$

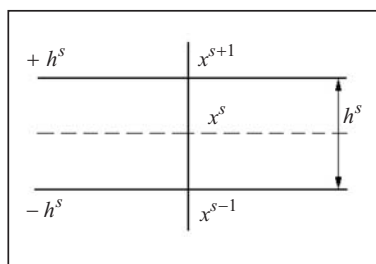


Рис. 1. Гиперслой

Здесь индекс после запятой обозначает дифференцирование по соответствующей координате, в общем случае  $p \neq n$ ,  $F_i$  зависит от всех возможных частных производных до  $p$ -го порядка включительно, положение гиперповерхности может зависеть от  $u_i$  и их производных. Решение краевой задачи (1), (2) состоит в определении функций  $u_i$ , преобразующих уравнения (1) в тождества, и в выборе из множества этих функций таких, которые удовлетворяют условиям (2).

Рассмотрим частный случай, когда дифференциальные уравнения (1) и граничные условия (2) представлены как сумма линейных и нелинейных частей, где линейный оператор  $L$  более высокого порядка  $p$ , чем порядок  $p_1$  нелинейного оператора [16]:

$$a_{ilq}(x^1, \dots, x^n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\nu) \frac{\partial^q u_l}{\partial x^{1(\alpha_1)} \dots \partial x^{n(\alpha_n)}} + \hat{F}_i \left( x^1, \dots, x^n; u_1, \dots, u_k; \frac{\partial u_l}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial u_k}{\partial x^n}; \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^1 \partial x^2}, \dots; \frac{\partial^{p_1} u_l}{\partial x^{1(p_1)}}, \dots, \frac{\partial^{p_1} u_k}{\partial x^{n(p_1)}}; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\nu \right) = P_i \quad \text{в } \Omega, \quad i = \overline{1, k}, \quad l = \overline{1, k}, \quad (3)$$

$$q = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \quad q = \overline{1, p}, \quad p_1 = \overline{1, (p-1)},$$

$$\left\{ b_{ilq}(x^1, \dots, x^n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\nu) \frac{\partial^q u_l}{\partial x^{1(\alpha_1)} \dots \partial x^{n(\alpha_n)}} + \hat{f}_i \left( x^1, \dots, x^n; u_1, \dots; \dots; \frac{\partial^{p_2} u_k}{\partial x^{n(p_2)}}; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\nu \right) \right\} \Bigg|_{x^s = \pm h^s} = Q_j^\pm, \quad (4)$$

$$j = p \cdot k, \quad q = \overline{1, (p-1)}, \quad p_2 = \overline{1, (p-2)}, \quad l = \overline{1, k}.$$

В отличие от модели общего вида (1), (2) модель (3), (4) можно классифицировать по типу дифференциальных уравнений в частных производных. Если система уравнений (3) гиперболического типа, то соответствующая модель будет называться гиперболической моделью; если некоторая физическая модель соответствует указанной модели, она также будет называться гиперболической.

В случае корректно поставленной задачи Коши для гиперболической модели в бесконечной области  $\Omega$  существуют решения в форме слабых распространяющихся разрывов (разрывы производных самого высокого порядка в дифференциальном операторе). Тогда соответствующая физическая модель описывает распространение возмущений с конечными скоростями, т.е. удовлетворяется принцип конечной скорости распространения возмущений [14]. Это соответствует реальности — в действительных физических средах или системах любое возмущение распространяется с конечной скоростью, определяемой свойствами среды или системы. Математическая формулировка принципа гласит, что решение задачи Коши с полностью определенными начальными данными конечно относительно пространственных производных при каждой фиксированной величине временной координаты [17].

Отметим, что в некоторых случаях главная часть оператора гиперболического уравнения может не быть ответственной за перенос энергии, а определяющим является гиперболический оператор более низкого порядка. Известно также, что при некоторых граничных условиях задача гиперболической системы может не описывать распространение возмущений — как следствие некорректной постановки задачи Коши [18].

Необходимо заметить, что большинство известных принципов можно, по-видимому, включить в более общий — принцип причинности, объединяющий явления или изменение в состоянии системы с условиями, порождающими это явление [19].

Математическую модель, которая следует из исходной модели как вырожденная по некоторым параметрам, назовем упрощенной (вырожденной) математической моделью, или аппроксимацией.

**Определение 1.** Модель, следующая из исходной модели (3), (4) при  $\varepsilon_r \rightarrow 0$  (или  $x^s \rightarrow 0$ ), называется вырожденной моделью.

Представляют интерес варианты  $\varepsilon_r \rightarrow \varepsilon^0$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ , или  $|x^s| \leq h^s$ ,  $0 < h^s \ll 1$ . Такие модели близки к вырожденным. Тогда в связи с наличием малых параметров  $\varepsilon_r$  или  $h^s$  появляется возможность построения аналитически упрощенной модели (аппроксимации), заменяющей исходную модель в окрестности параметра вырождения или поверхности вырождения. Такие модели далее будем называть квазивырожденными.

**Определение 2.** Если гиперболическая система дифференциальных уравнений (2), (3) при вырождении по параметру или координате остается гиперболической, то такое вырождение называется гиперболическим. В противном случае вырождение называется негиперболическим.

Согласно этому определению выделяются гиперболические модели и соответствующие гиперболически вырожденные или квазивырожденные модели.

Очевидно, что построение вырожденных или квазивырожденных по координате моделей приводит к уменьшению размерности задачи. В случае вырождения по параметрам задачу можно существенно упростить: уменьшение порядка системы дифференциальных уравнений, частичная декомпозиция и т.д. Эта задача может рассматриваться как отображение дифференциального оператора в частных производных из  $R^n$  в  $R^{n-1}$ .

#### ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ ВЫРОЖДЕНИЕ

Будем исходить из общего изложения, приведенного выше. Рассмотрим функции  $u_r(x)$ ,  $r = \overline{1, k}$ , в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $R^n$ , точка которого  $(x) = x^1, \dots, x^n$ , где  $x^1 = t$  — координата времени. Исследуем область  $\Omega \subset R^n$ , ограниченную гиперповерхностями  $x^s = \pm h^s$ ,  $h^s > 0$  (индекс  $s$  фиксирован), и рассмотрим в ней конечную гиперболическую систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных в  $R^n$ , для которой поставлена краевая задача или начально-краевая задача с заданными реальными данными и реальными решениями, принадлежащими  $C^k$ .

Дифференциальные уравнения и граничные условия записываются по аналогии с (3) и (4) следующим образом [4]:

$$L_i \equiv a_{ilq} \frac{\partial^q u_l}{\partial x^{1(\alpha_1)} \dots \partial x^{n(\alpha_n)}} + F_i = P_i \text{ в } \Omega, t \geq 0, \\ (i, l) = \overline{1, k}, q = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, q = \overline{1, p}, \quad (5)$$

$$\left\{ b_{jlq} \frac{\partial^q u_l}{\partial x^{1(\alpha_1)} \dots \partial x^{n(\alpha_n)}} + f_j \right\}_{x^s = \pm h^s} = Q_j^\pm, j = \overline{p \cdot k}, q = \overline{1, (p-1)}, l = \overline{1, k}, \quad (6)$$

где (5) — система  $k$  уравнений  $p$ -го порядка с  $k$  неизвестными функциями, которые должны определяться как ее решения, удовлетворяющие граничным условиям (6) и начальным условиям (не представлены здесь) так, чтобы гарантировалась корректная постановка задачи. Первый член в (5) является главной частью оператора, второй член  $F_i$  остается как часть оператора. В (6) член  $f_j$  — оператор более низкого порядка, чем первый член. Подразумевается соглашение о суммировании по повторяющимся индексам, а индексы перед запятой обозначают частное дифференцирование по соответствующей координате. Предполагается, что коэффициенты  $a_{ilq}$  и  $b_{jlq}$  постоянные, но они могут зависеть от малого параметра  $\varepsilon \ll 1$ .

Систему (5) можно привести к системе уравнений первого порядка [20, 21]

$$\frac{\partial v}{\partial t} - A_v \frac{\partial v}{\partial x_v} - Bv = p, v = 2, 3, \dots, n, \quad (7)$$

где  $v$  — вектор, имеющий  $m$  компонент  $v_1(x, t), \dots, v_m(x, t)$ ,  $m > k$ ,  $p$  — вектор аналогичного вида,  $A$  и  $B$  — матрицы порядка  $m$ .

Предполагается, что характеристическое уравнение (не включает члены низшего порядка)

$$\det(\lambda I - A_\nu \xi_\nu) = 0 \quad (8)$$

имеет действительные корни  $\lambda_i(\xi)$ , а матрица  $A_\nu \xi_\nu$  приводится к диагональному виду для каждого  $\xi \in R^{n-1}$ , т.е. удовлетворяется необходимое условие, чтобы система (7) была гиперболического типа.

Гиперболичность — необходимое, но не достаточное условие для распространения возмущений с конечными скоростями. Принцип конечной скорости может быть нарушен граничными условиями, включающими граничные и начальные данные, а также переменные коэффициенты, соответствующие неоднородным и/или анизотропным свойствам сред. Например, в [18] показано, что имеются граничные условия, для которых начальная задача будет некорректно поставленной, и, следовательно, не существует решений с конечными скоростями. Здесь рассматриваем граничные условия, для которых начально-краевая задача поставлена корректно.

Исходная модель (5), (6) приводится к вырожденной модели, когда  $\varepsilon \rightarrow 0$  или  $\xi = h^s / l \rightarrow 0$ . Необходимо получить гиперболические аппроксимации, т.е. построить отображение исходного пространства  $R^n(\varepsilon)$  или  $R^n(\xi)$  в вырожденное пространство,  $R^n(\varepsilon) \rightarrow R^n$  или  $R^n(\xi) \rightarrow R^{n-1}$ , удовлетворяющее условию предельной корректности — быть гиперболического типа, т.е. условию конечной скорости распространения возмущений [14, 18]. В этом случае в вырожденном пространстве вместо функций  $u(x)$  появляются новые функции  $\hat{u}(x)$ . В дальнейшем рассматривается случай координатного вырождения  $\xi \rightarrow 0$ .

Разложение полевых функций в степенные ряды по вырожденной координате  $s$  относительно срединной гиперповерхности приводит к вырожденной задаче определения коэффициентов рядов, зависящих только от  $n-1$  координат

$$u_i(t, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}(t, x^2, \dots, x^{s-1}, x^s, \dots, x^n)(x^s)^k. \quad (9)$$

Подстановка (9) в уравнения в частных производных (5) и граничные условия (6) дает в  $R^{n-1}$  рекуррентные соотношения из уравнений (5) и множество систем дифференциальных уравнений бесконечного порядка из (6). Следующий шаг — усечение этих бесконечных систем, которое возможно разными путями, при сохранении членов, соответствующих различным правилам. Можно из рекуррентных соотношений выразить все  $u_{ik}$  в терминах минимального конечного числа искомым функций, соответствующих числу систем дифференциальных уравнений. Подстановка данных функций в усеченные уравнения приводит к разрешающим уравнениям, что позволяет получать различные аппроксимации, т.е. упрощенные модели. Правила сохранения членов должны быть такого вида, чтобы эта система была гиперболического типа. Необходимое условие состоит в получении замкнутой системы для определения новых неизвестных функций.

Достаточное условие гиперболического вырождения анонсируется следующим образом: чтобы получить гиперболическую аппроксимацию, достаточно удержать в бесконечных системах все пространственно-временные дифференциальные операторы до заданного порядка.

Следуя изложенному, рассмотрим построение вырожденных моделей для случая  $R^4$ , которое является задачей эластодинамики для слоя. Математическая формулировка соответствующей начально-краевой задачи в терминах перемещений  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ , зависящих от ортогональных координат  $x_1, x_2, x_3$  и времени  $t$ , представляется следующим образом: найти вектор-функцию  $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$  как

решение уравнений в  $\Omega \times [0, T]$ ,  $T > 0$ ,

$$\nabla^2 u_k + (1 + \lambda / G) \partial_k (\nabla \cdot u) = \partial_{tt} u_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (10)$$

удовлетворяющую граничным условиям

$$\begin{aligned} \sigma_{33} \Big|_{x_3=\xi/2} &= q^+(x_1, x_2, t), \quad \sigma_{33} \Big|_{x_3=-\xi/2} = q^-(x_1, x_2, t), \\ \sigma_{3i} \Big|_{x_3=\xi/2} &= p_i^+(x_1, x_2, t), \quad \sigma_{3i} \Big|_{x_3=-\xi/2} = p_i^-(x_1, x_2, t), \quad i=1, 2, \end{aligned} \quad (11)$$

и начальным условиям

$$u_k \Big|_{t=0} = 0, \quad \partial_t u_k \Big|_{t=0} = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (12)$$

Безразмерные величины вводятся по формулам (звездочки далее опускаем):

$$\begin{aligned} (x_i^*, u_i^*) &= \frac{1}{l} (x_i, u_i), \quad t^* = \frac{c_s}{l} t, \quad c^* = \frac{c}{c_s}, \\ (\sigma_{kl}^*, q^*, p_i^*) &= \frac{1}{G} (\sigma_{kl}, q, p_i), \quad \frac{2h}{l} = \xi. \end{aligned} \quad (13)$$

Следующий существенный шаг связан с введением предположения о малости величины  $\xi$  и, значит, малости поперечной координаты

$$(2h / l) = \xi \ll 1 \Rightarrow |x_3 / l| \sim O(\xi). \quad (14)$$

Из (14) вытекает, что рассматриваются довольно гладкие возмущения по планарным координатам  $x_1, x_2$  и времени  $t$ .

Компоненты вектора перемещения представляются в виде степенных рядов по  $x_3$

$$u_k(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_{km}(x_1, x_2, t) x_3^m, \quad k = 1, 2, 3. \quad (15)$$

Предполагается, что функции  $u_{iv}$  дифференцируемы столько раз, сколько требуется, все производные  $u_{iv}$  непрерывны, а ряды (15) сходятся равномерно. Сходимость этих рядов зависит только от величины  $\xi$ , характеризующей изменения областей по координатам  $x_1, x_2, t$ . Чем более плавные эти изменения, тем больше  $l$  и меньше  $\xi$ , а ряды (15) быстрее сходятся. Подробное изложение и анализ приведены в [13].

В дальнейшем предполагаем, что толщина слоя мала:  $\xi \ll 1$ . Таким образом, естественно применить разложение по безразмерной координате  $x_3$  относительно срединной поверхности  $x_3 = 0$ , тем самым понижая размерность задачи [12, 13]. В результате получаем вырождение исходной гиперболической модели, когда возможны три случая вырождения, приводящие к уравнениям параболического, гиперболического и смешанного типа. Только вырождение гиперболической модели в гиперболическую модель корректно и имеет физический смысл при условии, что скорость распространения возмущений конечна [14].

Представление (15) приводит исходную задачу (10)–(13) к определению бесконечного числа функций  $u_{km}$ , удовлетворяющих бесконечной системе дифференциальных уравнений и рекуррентным соотношениям. В свою очередь, эта система распадается на две независимые подсистемы, соответствующие асимметричной (изгибной) деформации срединной поверхности  $x_3 = 0$  и симметричной (планарной).

Рассмотрим случай асимметричных деформаций (суммирование проводится от  $s=0$  до  $s=\infty$ ):

$$e(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{s=0}^{\infty} \tilde{e}_{(2s+1)}(x_1, x_2, t) x_3^{2s+1}, \quad e = u_i, \quad i = 1, 2,$$



$$\begin{aligned}
w(x_1, x_2, x_3, t) &= \sum_{s=0}^{\infty} \tilde{w}_{(2s)}(x_1, x_2, t) x_3^{2s}, \\
\sum [(2s+1)\tilde{e}_{2s+1} + \nabla^2 \tilde{w}_{2s}] 2^{-2s} \xi^{2s} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{2} (p_1^+ + p_1^-) + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{2} (p_2^+ + p_2^-), \\
\sum \left[ -\tilde{e}_{2s+1} - \frac{1}{2s+1} L_s \tilde{w}_{2s} \right] 2^{-(2s+1)} \xi^{2s+1} &= \frac{1}{2} (q^+ - q^-), \quad (16) \\
\tilde{w}_{2s+2} &= -\frac{1+\lambda/G}{(2s+2)(2+\lambda/G)} \tilde{e}_{2s+1} - \frac{1}{(2s+1)(2s+2)(2+\lambda/G)} L_s \tilde{w}_{2s}, \\
\tilde{e}_{2s+3} &= \frac{1}{(2s+2)(2s+3)} \left[ -L_e + \frac{1+\lambda/G}{2+\lambda/G} \nabla^2 \right] \tilde{e}_{2s+1} + \\
&+ \frac{1}{(2s+1)(2s+2)(2s+3)} \frac{1+\lambda/G}{2+\lambda/G} \nabla^2 + L_s \tilde{w}_{2s},
\end{aligned}$$

где

$$L_s = c_s^2 \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad L_e = c_e^2 \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$e$  — дивергенция планарных смещений,  $w$  — отклонение,  $p_i^\pm$  и  $q^\pm$  — сдвиговая и нормальная нагрузки вдоль лицевых поверхностей слоев,  $c_s$  и  $c_e$  — скорости распространения сдвиговых и дилатационных волн.

Уравнения (16) дают точное решение задачи. Редукция этой системы позволяет получить ряд аппроксимаций различного рода. Гиперболическое вырождение начально-краевой задачи для конечной гиперболической системы уравнений произвольного порядка в  $R^n$  на основе метода степенных рядов рассмотрено в [12]. Таким образом, установлены необходимые и достаточные условия вырождения: полнота редуцированной системы и сохранение всех пространственно-временных дифференциальных операторов до определенного порядка.

Усечения уравнений (16) до седьмого порядка включительно приводят к трехмодовой (толщинные волновые моды) аппроксимации, которую можно выразить следующим уравнением:

$$\begin{aligned}
&\left\{ \left[ \left\langle \left( \xi \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \xi^3 a_1 \nabla^2 \nabla^2 \right) \right\rangle_K - \xi^3 a_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 \right]_R + \xi^3 a_3 \frac{\partial^4}{\partial t^4} \right]_{TM} - \xi^5 b_1 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 + \\
&+ \xi^5 b_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 \nabla^2 - \xi^5 b_3 \frac{\partial^4}{\partial t^4} \nabla^2 + \xi^5 b_4 \frac{\partial^6}{\partial t^6} \left. \right\}_{TMS} w = \\
&= \left\{ \left[ 1 - \xi^2 d_1 \nabla^2 + \xi^2 d_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right]_{TM} + \right. \\
&+ \left. \xi^4 d_3 \nabla^2 \nabla^2 - \xi^4 d_4 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 + \xi^4 d_5 \frac{\partial^4}{\partial t^4} \right\}_{TMS} (q^+ - q^-). \quad (17)
\end{aligned}$$

В работе [22] обобщена параболическая модель Бернулли–Эйлера изгибных колебаний балки на гиперболическую модель на феноменологической основе с поправками, ответственными за деформации толщинного сдвига и инерцию вращения. На этой основе [23] обобщена параболическая модель Кирхгофа изгибных колебаний пластин [24] (оператор  $K$  в уравнении (17)) на гиперболическую модель (двухмодовая модель — операторы  $TM$ ). Более общая гиперболическая модель [10] была построена как математическая аппроксимация без введения феноменологических предположений (трехмодовая аппроксимация — операторы  $TMS$ ), включая также двумерную систему как частный случай.

Коэффициенты в (17) имеют вид (здесь  $\sigma$  — коэффициент Пуассона)

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{6(1-\sigma)}, \quad a_2 = \frac{2-\sigma}{6(1-\sigma)}, \quad a_3 = \frac{7-8\sigma}{48(1-\sigma)}, \quad b_1 = \frac{1}{120(1-\sigma)}, \\ b_2 &= \frac{4\sigma^2 - 16\sigma + 11}{480(1-\sigma)^2}, \quad b_3 = \frac{16\sigma^2 - 37\sigma + 19}{960(1-\sigma)^2}, \\ b_4 &= \frac{64\sigma^2 - 104\sigma + 41}{7680(1-\sigma)^2}, \quad d_1 = \frac{2-\sigma}{8(1-\sigma)}, \quad d_2 = \frac{1}{8}, \\ d_3 &= \frac{\sigma^2 - 4\sigma + 3}{384(1-\sigma)^2}, \quad d_4 = \frac{4\sigma^2 - 12\sigma + 7}{780(1-\sigma)^2}, \quad d_5 = \frac{1}{384}. \end{aligned}$$

По аналогии с приведенным выше построены гиперболические аппроксимации для симметричных колебаний относительно срединной поверхности.

В случае плоской деформации для симметричных продольных колебаний в первом приближении имеем уравнение обобщенного плоского напряженного состояния

$$\left( -a'_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a'_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u = 0. \quad (18)$$

Во втором приближении получаем двухмодовую аппроксимацию вида

$$\left( -a'_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a'_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + b'_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} - b'_2 \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial x^2} + b'_3 \frac{\partial^4}{\partial t^4} \right) u = 0. \quad (19)$$

Третье приближение дает трехмодовую аппроксимацию

$$\begin{aligned} &\left( -a'_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a'_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + b'_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} - b'_2 \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial x^2} + b'_3 \frac{\partial^4}{\partial t^4} - \right. \\ &\left. - c'_1 \frac{\partial^6}{\partial x^6} + c'_2 \frac{\partial^6}{\partial t^2 \partial x^4} - c'_3 \frac{\partial^6}{\partial t^4 \partial x^2} + c'_4 \frac{\partial^6}{\partial t^6} \right) u = 0. \quad (20) \end{aligned}$$

Коэффициенты  $a'_i$ ,  $b'_k$  и  $c'_k$  определяются с помощью формул (здесь  $\nu$  — коэффициент Пуассона)

$$\begin{aligned} a'_1 &= \frac{4}{1-2\nu}, \quad a'_2 = 2 \frac{1-\nu}{1-2\nu}, \quad b'_1 = \frac{8}{1-2\nu} \frac{1}{3!}, \\ b'_2 &= \left( \frac{6}{1-2\nu} + 2 \frac{2-\nu}{1-\nu} + 4 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \right) \frac{1}{3!}, \quad b'_3 = \frac{5-8\nu}{1-2\nu} \frac{1}{3!}; \\ c'_1 &= \frac{32}{1-2\nu} \frac{\xi^5}{5!}, \quad c'_2 = \left( \frac{40}{1-2\nu} + 8 \frac{3-\nu}{1-\nu} + 16 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \right) \frac{\xi^5}{5!}, \\ c'_3 &= \left( 4 \frac{1-\nu}{1-2\nu} + 5 \frac{5-2\nu}{1-\nu} + \frac{(1-2\nu)(4-3\nu)}{(1-\nu)^2} + 28 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \right) \frac{\xi^5}{5!}, \\ c'_4 &= \left( 10 + 2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} + \frac{5}{2} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) \frac{\xi^5}{5!}. \end{aligned}$$

Приведем простой иллюстративный пример, демонстрирующий применение метода степенных рядов. Рассмотрим волновое уравнение, описывающее распространение волн в мелкой воде и акустических волн. Оно характеризуется



пространственными ортогональными координатами  $x_1, x_2, x_3$  и временной координатой  $t$ . Выделим слой  $-\infty \leq x_1 \leq \infty, -\infty \leq x_2 \leq \infty, -h \leq x_3 \leq h$  и предположим, что изменение поля в зависимости от координат  $x_1$  и  $x_2$  характеризуется некоторым планарным параметром  $l$ , который значительно больше толщины слоя  $2h$ :

$$\frac{2h}{l} = \xi \ll 1. \quad (21)$$

Отсюда получаем условие малости координаты  $x_3$ :

$$\left| \frac{x_3}{l} \right| \ll 1, \quad -h \leq x_3 \leq h. \quad (22)$$

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат  $x_1, x_2, x_3$  требуется определить функцию  $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ , удовлетворяющую волновому уравнению

$$\left( \bar{\nabla}^2 - c_0^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = \square \varphi = 0 \quad (23)$$

в областях  $-\infty \leq x_i \leq \infty$  ( $i=1, 2$ ),  $-h \leq x_3 \leq h, t > 0$ , и граничным условиям

$$\left( \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \beta \varphi \right)_{x_3=\pm h} = \varphi^\pm(x_1, x_2, t). \quad (24)$$

Здесь  $\bar{\nabla}^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = \nabla^2 \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}$ , где  $\nabla^2$  — плановый лапласиан,

которому соответствует плановый даламбертиан  $\square$ .

Условия (24) описывают смешанную задачу ( $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ ) и как частные случаи — задачу Дирихле ( $\alpha = 0, \beta \neq 0$ ) и задачу Неймана ( $\alpha \neq 0, \beta = 0$ ).

В безразмерных величинах (звездочки далее опускаем)

$$x_i^* = \frac{x_i}{l}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t \quad (25)$$

уравнения (23) и (24) записываются в виде

$$\nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = \square \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0, \quad \left( \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \beta \varphi \right)_{x_3=\pm \frac{1}{2\xi}} = \varphi^\pm(x_1, x_2, t). \quad (26)$$

Представим  $\varphi$  в виде ряда по степеням  $x_3$ :

$$\varphi = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x_1, x_2, t) x_3^\nu \quad (27)$$

и предположим, что функции  $\varphi_\nu$  дифференцируемы столько раз, сколько потребуется, все производные от  $\varphi_\nu$  непрерывны и ряд равномерно сходится. Сходимость ряда (27) существенно зависит от величины  $\xi = 2h/l$  и изменения полей по координатам  $x_1, x_2, t$ . Чем более плавно это изменение, определяемое внешними воздействиями, и чем меньше  $\xi$ , тем быстрее сходится ряд (27).

Подставляя (27) в (26), получаем

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} [\square \varphi_\nu x_3^\nu + \varphi_\nu \nu(\nu-1) x_3^{\nu-2}] = 0, \quad (28)$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left[ \alpha \varphi_\nu \nu x_3^{\nu-1} + \beta \varphi_\nu x_3^\nu \right]_{x_3=\pm \frac{1}{2\xi}} = \varphi^\pm. \quad (29)$$

Уравнение (28) удовлетворяется, если суммарный коэффициент при каждой степени  $x_3$  равен нулю. Это приводит к бесконечной системе уравнений. После ряда преобразований из (28) и (29) получаем

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{s=0}^{\infty} [\varphi_{2s}(x_1, x_2, t)x_3^{2s} + \varphi_{2s+1}(x_1, x_2, t)x_3^{2s+1}], \quad (30)$$

$$\left[ 1 - \frac{1}{2!2^2} \xi^2 \square + \frac{1}{4!2^4} \xi^4 \square^2 - \dots + \frac{(-1)^k}{(2k)!2^{2k}} \xi^{2k} \square^k + \dots \right] \times$$

$$\times (\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_0) = \frac{1}{2}(\varphi^+ + \varphi^-), \quad (31)$$

$$\left[ \frac{1}{1!2} \xi - \frac{1}{3!2^3} \xi^3 \square + \dots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!2^{2k+1}} \xi^{2k+1} \square^k + \dots \right] \times$$

$$\times (\beta\varphi_1 - \alpha\square\varphi_0) = \frac{1}{2}(\varphi^+ - \varphi^-), \quad (32)$$

$$\varphi_{2p+2} = -\frac{1}{(2p+1)(2p+2)} \square \varphi_{2p}, \quad (33)$$

$$\varphi_{2p+3} = -\frac{1}{(2p+2)(2p+3)} \square \varphi_{2p+1}. \quad (34)$$

Полученная система уравнений может быть дополнена начальными условиями. Как видно, в смешанной задаче имеем связанную систему уравнений. В случаях задач Дирихле и Неймана система распадается на две независимые подсистемы, соответствующие симметричным и асимметричным колебаниям слоя.

Бесконечный ряд (30), коэффициенты которого определяются из замкнутой системы (31)–(34), дает точное решение задачи. Но вместо трехмерной задачи (26) решается двумерная задача (31)–(34). Если ограничиться конечным числом членов ряда (30), то система (31)–(34) будет конечной замкнутой. Получаемую при этом аппроксимацию назовем квазивырожденной моделью. Из соотношений (30)–(34) можно получить бесконечное число различных аппроксимаций. Необходимо построить квазивырожденные по координате гиперболические модели. При этом справедливо следующее положение.

В случае волнового уравнения для построения гиперболической аппроксимации  $k$ -го порядка при усечении системы достаточно сохранить все операторы до  $\square^k$  включительно (все члены с множителями до  $\xi^{2k+1}$ ).

Для доказательства достаточно установить, что система усеченных по  $\xi^{2k+1}$  уравнений (31), (32) гиперболическая. Легко показать, например, исключением  $\varphi_1$  из (31), (32) и исследованием главной части оператора, что эта система уравнений гиперболического типа при любом конечном  $k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Отсюда следует также гиперболическость системы и в случаях задач Дирихле и Неймана.

Приведем две простейшие модели. При  $k = 0$  для смешанной задачи из (30)–(34) имеем

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \varphi_0(x_1, x_2, t) + \varphi_1(x_1, x_2, t)x_3, \quad (35)$$

$$\beta\varphi_0 + \alpha\varphi_1 = \frac{1}{2}(\varphi^+ - \varphi^-), \quad (36)$$

$$-\xi \frac{1}{2} \alpha \square \varphi_0 + \xi \frac{1}{2} \beta \varphi_1 = \frac{1}{2}(\varphi^+ - \varphi^-). \quad (37)$$

Из (36), (37) следует разрешающее уравнение

$$(\xi\beta^2 + \xi\alpha^2 \square)\varphi_0 = \xi\beta \frac{1}{2}(\varphi^+ + \varphi^-) - 2\alpha \frac{1}{2}(\varphi^+ - \varphi^-), \quad \alpha \neq 0, \beta \neq 0. \quad (38)$$

При  $k = 1$  находим

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_2 x_3^2 + \varphi_1 x_3 + \varphi_3 x_3^3, \quad (39)$$

$$\left( 1 - \xi^2 \frac{1}{8} \square \right) (\beta\varphi_0 + \alpha\varphi_1) = \frac{1}{2}(\varphi^+ + \varphi^-),$$

$$\left(\xi \frac{1}{2} - \xi^3 \frac{1}{48} \square\right) (-\alpha \square \varphi_0 + \beta \varphi_1) = \frac{1}{2} (\varphi^+ - \varphi^-),$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{2} \square \varphi_0, \quad \varphi_3 = -\frac{1}{6} \square \varphi_1.$$

Из (36) и (37) запишем разрешающее уравнение

$$\left[ \xi \beta^2 + \left( \xi \alpha^2 - \xi^3 \frac{1}{6} \beta^2 \right) \square - \left( \xi^3 \frac{1}{6} \alpha^2 - \xi^5 \frac{1}{192} \beta^2 \right) \square \square + \xi^5 \frac{1}{192} \alpha^2 \square \square \square \right] \varphi_0 =$$

$$= \left( \xi - \xi^3 \frac{1}{24} \square \right) \beta \frac{1}{2} (\varphi^+ + \varphi^-) - \left( 1 - \xi^2 \frac{1}{8} \square \right) 2\alpha \frac{1}{2} (\varphi^+ - \varphi^-) \quad (\alpha \neq 0, \beta \neq 0).$$

Если принять, что величины  $\alpha^2$  и  $\beta^2$  одного порядка, то уравнение (39) можно упростить, пренебрегая членами, содержащими множитель  $\xi^5$ .

Из (35)–(38) получаем две несвязанные системы для задачи Дирихле:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_2 x_3^2, \quad \varphi_2 = -\frac{1}{2} \square \varphi_0, \quad \left( 1 - \xi \frac{1}{8} \square \right) \varphi_0 = \frac{1}{\beta} \frac{1}{2} (\varphi^+ + \varphi^-),$$

$$\varphi = \varphi_1 x_3 + \varphi_3 x_3^3, \quad \varphi_3 = -\frac{1}{6} \square \varphi_1, \quad \left( \xi - \xi^3 \frac{1}{24} \square \right) \varphi_1 = \frac{2}{\beta} \frac{1}{2} (\varphi^+ - \varphi^-).$$

Аналогично для задачи Неймана имеем

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_2 x_3^2, \quad \varphi_2 = -\frac{1}{2} \square \varphi_0, \quad \left( \xi - \xi^3 \frac{1}{24} \square \right) \square \varphi_0 = -\frac{2}{\alpha} \frac{1}{2} (\varphi^+ - \varphi^-),$$

$$\varphi = \varphi_1 x_3 + \varphi_3 x_3^2, \quad \varphi_3 = -\frac{1}{6} \square \varphi_1, \quad \left( 1 - \xi^2 \frac{1}{8} \square \right) \varphi_1 = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{2} (\varphi^+ + \varphi^-).$$

Такой подход может использоваться при решении задач в произвольных криволинейных координатах.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлен алгоритм построения вырожденных по малой координате гиперболических моделей, описывающих распространение возмущений с конечной скоростью. Рассмотрение проведено в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $R^n$ . Исходная гиперболическая модель представляется в виде начально-краевой корректно поставленной задачи для системы гиперболических уравнений. Из множества аппроксимаций реализуется отбор гиперболических аппроксимаций, т.е. удовлетворение принципа гиперболичности — исходная гиперболическая модель отображается в приближенную модель гиперболического типа.

На этой основе при  $n = 3$  рассматривается задача эластодинамики для слоя. В результате вырождения по малой толщинной координате выведены уточненные уравнения асимметричных (изгибных) и симметричных (планарных) колебаний относительно срединной поверхности.

Полученный на основе аналитического подхода оператор включает известные параболические и другие модели (двухмодовые аппроксимации) и новые гиперболические (трехмодовые аппроксимации) более высокого порядка без введения обычных традиционных феноменологических корректирующих параметров типа коэффициента сдвига.

Приведена иллюстрация метода степенных рядов для построения вырожденных гиперболических моделей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кривонос Ю.Г., Селезов И.Т. О моделировании диагностики включений в упругом теле // Доп. НАН України. — 2013. — № 7. — С. 37–41.
2. Селезов И.Т., Кривонос Ю.Г. Математические методы в задачах распространения и дифракции волн. — Киев: Наук. думка, 2012. — 232 с.
3. Hörmander L. Linear partial differential operators. — Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verlag, 1963. — 392 p.
4. Kythe P.K. Fundamental solutions for differential operators and applications. — Boston: Birkhauser, 1996. — 414 p.
5. Lagrange J.L. Memoire sur la theorie du mouvement des fluides // Oeuvres de Lagrange. — 1781. — 4. — P. 695–748.
6. Cauchy A.L. Sur l'équilibre et le mouvement d'une lame solide // Exercices Math. — 1828. — 3. — P. 245–326.
7. Poisson S.D. Memoire sur l'équilibre et le mouvement des corps elastiques // Mem. Acad. Roy. Sci. — 1829. — 8. — P. 357–570.
8. Крауф В.Ф. Über die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie schwach deformierter Schalen // Math. Ann. — 1929. — 101, N 1. — P. 61–92.
9. Кильчевский Н.А. Обобщение современной теории оболочек // Прикл. математика и механика. — 1939. — 2, № 4. — С. 427–438.
10. Селезов И.Т. Дослідження поперечних коливань пластини // Прикл. механіка. — 1960. — 6, № 3. — С. 319–327.
11. Селезов И.Т. Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах. — Киев: Наук. думка, 1989. — 204 с.
12. Selezov I.T. Degenerated hyperbolic approximation of the wave theory of elastic plates. Ser. Operator Theory. Advances and Applications. Differential Operators and Related Topics // Proc. of Mark Krein Int. Conf. (Ukraine, Odessa, 18–22 Aug. 1997). — Basel (Switzerland): Birkhauser, 2000. — 117. — P. 339–354.
13. Селезов И.Т. О построении уточненных уравнений колебаний пластин // Мат. методы и физ.-мех. поля. — 2013. — 56, № 2. — С. 102–111.
14. Селезов И.Т. Концепция гиперболичности в теории управляемых динамических систем // Кибернетика и вычислительная техника. — 1969. — Вып. 1. — С. 131–137.
15. Dunford N., Schwartz J.T. Linear operators. Part II. Spectral theory. Self adjoint operators in Hilbert space. — New York; London: Interscience Publ., 1963. — 859 p.
16. Courant R., Hilbert D. Methods of mathematical physics. — New York; London: Interscience, 1962. — Vol. 1. — 560 p.; Vol. 2. — 856 p.
17. Калашников А.С. О понятии конечности скорости распространения возмущений // Успехи мат. наук. — 1979. — 34, № 2. — С. 199, 200.
18. Hersh R. Boundary conditions for equations of evolution // Archive Ration. Mech. and Analysis. — 1964. — 16, N 4. — P. 243–264.
19. Bunge M. Causality and modern science. — Third revis. ed. — New York: Dover Publ., 2011. — 448 p.
20. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. — М.: Мир, 1977. — 504 с.
21. Bers L., John F., Schechter M. Partial differential equations. — New York; London; Sydney: Interscience, 1964. — 343 p.
22. Timoshenko S. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bar // Phil. Mag. Ser. 6. — 1921. — 41, N 245. — P. 744–746.
23. Mindlin R.D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // J. Appl. Mech. — 1951. — 18. — P. 31–38.
24. Kirchhoff G.R. Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik. — Leipzig: Teubner, 1876.

Поступила 09.07.2014