

ИССЛЕДОВАНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ КОЛЕБАНИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ЛАМПОВОГО ГЕНЕРАТОРА С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Аннотация. В работе проведен анализ порождающего уравнения и уравнений для амплитуды и фазы колебаний параметрического лампового генератора с запаздывающей обратной связью. Исследованы стационарные режимы колебаний и влияние флуктуаций собственной частоты на работу автогенератора и параметрическая «накачка» при наличии помех. Определены области для параметров исходного уравнения, соответствующие неустойчивым узлам, устойчивым узлам и фокусам.

Ключевые слова: ламповый генератор, параметрическая «накачка», стационарный режим.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим математическую модель работы параметрически возмущенного лампового генератора с запаздыванием в цепи сети (ПЛГЗС) с учетом параметрических флуктуаций [1, 2, 5]. Подобные параметрические системы рассмотрены в [3, 4]. Стохастической моделью работы ПЛГЗС с учетом внешних случайных воздействий скачкообразного типа является стохастическое дифференциальное уравнение 2-го порядка [6, 7], заданное на вероятностном базисе (Ω, F, \dots, P) [8] с учетом пуассоновской случайной компоненты

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\bar{q} \frac{dx(t-\tau)}{dt} + \omega^2 x(t) = \varepsilon \left[a_0 x(t) + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_2 \frac{dx(t-\tau)}{dt} + a_3 \left(\frac{dx(t-\tau)}{dt} \right)^3 + \right. \\ \left. + x(t) h \sin(\alpha_1 t) \right] + 2\bar{q} \left[\frac{dx(t-\tau-\varepsilon\gamma)}{dt} - \frac{dx(t-\tau)}{dt} \right] + x(t) \frac{dW(\varepsilon t)}{dt} + \\ + \int_0^t \int_U x(s) \lambda(s, u) \tilde{\nu}(\varepsilon ds, du) \end{aligned} \quad (1)$$

с начальным условием

$$x_0 = \phi_1; \dot{x} = \dot{\phi}_1. \quad (2)$$

Здесь $x(t) = x(t, \omega) \in S([- \tau, 0])$, где $S([- \tau, 0])$ — пространство Скорохода [9, 10]; $\varepsilon > 0$ — малый параметр; τ — время задержки сигнала в цепи обратной связи; $\tilde{\nu}(t, du) = \nu(t, du) - E\tilde{\nu}(t, du)$ — центрированная пуассоновская мера [8, 11], которая независима от винеровского процесса $w(t)$; $x_t = \{x(t+s), s \in [- \tau, 0]\}$ — отрезок траектории процесса $x(t)$.

Действительные величины a_0, a_1, a_2, a_3 и γ , являющиеся возмущением коэффициентов ω^2, \bar{q} и $\tau > 0$ в детерминированной части (1), введены для удобства исследования. Слагаемое $x(t)h \sin(\alpha_1 t)$ соответствует емкости параметрического возмущения лампового генератора; $x(t) \frac{dW(\varepsilon t)}{dt}$ отражает наличие параметрического шума при этом возмущении, а слагаемое $\int_U x(t) \lambda(t, u) \tilde{\nu}(dt, du)$ отражает случайное скачкообразное воздействие в случайные моменты времени.

Уравнение (1) при $\varepsilon = 0$ примет вид

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\bar{q} \frac{dy(t-\tau)}{dt} + \omega^2 y(t) = 0,$$

назовем его порождающим [12]. Квазиполином уравнения имеет вид $L(z) = z^2 + 2\bar{q}ze^{-z\tau} + \omega^2$ с характеристическим уравнением

$$L(z) = 0. \quad (3)$$

В работе [1] построено D -разбиение характеристического уравнения (3) при $\tau = \pi$, которое приведено на рис. 1.

Уравнения для прямых $n_1, n_2, \dots, n_5, \dots$ получены из уравнения $L(is) = 0$:

$$\begin{cases} -\alpha^2 + 2\bar{q}\alpha \sin(\alpha\pi) + \omega^2 = 0, \\ 2\bar{q}\alpha \cos(\alpha\pi) = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что $\alpha\pi = \frac{\pi}{2} \pm n\pi$ или $\alpha = \frac{1}{2} \pm n_1$, $n_1 = 0, 1, 2, \dots$

При четном n получим прямые, которые наклонены влево: $-\alpha^2 + 2\bar{q}\alpha + \omega^2 = 0$, $\alpha = \frac{n_1}{2}$, $n_1 = 1, 5, 9$. При нечетном n получим прямые, которые наклонены вправо: $-\alpha^2 - 2\bar{q}\alpha + \omega^2 = 0$, $\alpha = \frac{n_2}{2}$, $n_2 = 3, 7, 11$.

На рис. 1 обозначены D_i области параметров \bar{q} и ω^2 , где квазиполином L имеет i корней с положительными действительными частями. Как известно [12], если точка (q, ω^2) находится на границе областей D_i и D_j ($i < j$; $i, j = 0, 2, 4, \dots$), то квазиполином имеет $j - i$ чисто мнимых корней. На рис.1 квазиполином $L(z)$ имеет не больше двух пар мнимых корней, ибо область D_0 имеет границу только с областями D_0, D_2, D_4 и D_6 . Будем предполагать [5], что $L(z)$ имеет одну пару чисто мнимых простых корней $\pm i\alpha$, а остальные корни $L(z)$ расположены в левой полуплоскости, т.е. $\text{Re } z < -\rho < 0$. Отметим, что это предположение соответствует случаю $\varepsilon = 0$, когда система находится на одной из границ между областями D_0 и D_2 . Предположение о паре чисто мнимых корней можно делать только относительно уравнений запаздывающего типа, поскольку для уравнений нейтрального и опережающего типов оно заведомо невыполнимо ввиду наличия асимптотических корней. Будем в дальнейшем предполагать, что соотношение параметрического возмущения $\alpha_1 = 2\alpha$ выполняется.

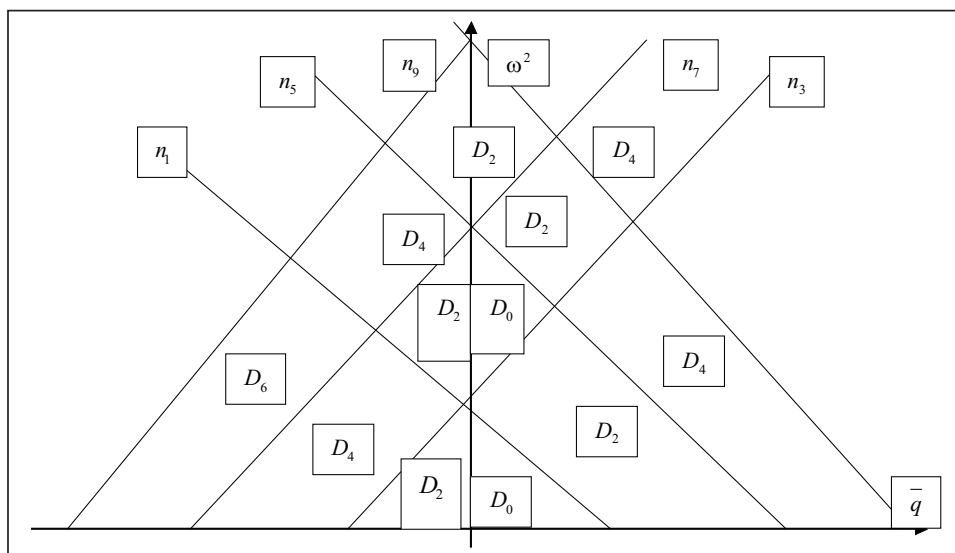


Рис. 1

**АНАЛИЗ ПОРОЖДАЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ
ДЛЯ АМПЛИТУДЫ КОЛЕБАНИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗМУЩЕННОГО
ЛАМПОВОГО ГЕНЕРАТОРА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В ЦЕПИ СЕТИ**

Для простоты выкладок будем считать, что вначале на ПЛГЭС действует только винеровское возмущение, т.е. $\lambda(t, u) \equiv 0$, и учтем очевидное соотношение

$$2\bar{q} \left[\frac{dx(t-\tau-\varepsilon\gamma)}{dt} - \frac{dx(t-\tau)}{dt} \right] = 2\bar{q}\varepsilon\gamma \frac{d^2x(t-\tau-\theta^*\varepsilon\gamma)}{dt^2}, \quad 0 < \theta^* < 1.$$

От задачи (1), (2) при $\lambda(t, u) \equiv 0$ перейдем к системе квазилинейных стохастических дифференциально-разностных уравнений для амплитуды и фазы колебаний [7]:

$$\begin{cases} dr(t) = \{2\varepsilon \{ [p \cos(\alpha t + \varphi) + q \sin(\alpha t + \varphi)] [a_0 r \cos(\alpha t + \varphi) - a_1 r \alpha \sin(\alpha t + \varphi) - \\ - a_2 r(t - \pi) \alpha \sin(\alpha t - \alpha \pi + \varphi(t - \pi)) + a_3 r^3(t - \pi) + \alpha^3 \sin^3(\alpha t - \alpha \pi + \varphi(t - \pi)) + \\ + hr \cos(\alpha t + \varphi) \sin(\alpha_1 t) + 2\bar{q}\gamma \alpha^2 r(t - \pi - \theta^* \varepsilon \gamma) \cos(\alpha t - \alpha \pi + \varphi(t - \pi) - \theta^* \varepsilon \gamma)] + \\ + s^2 r \cos^2(\alpha t + \varphi) [p^2 \sin^2(\alpha t + \varphi) - pq \sin(2\alpha t + 2\varphi) + q^2 \cos(\alpha t + \varphi)]\} dt + \\ + 2ar \cos(\alpha t + \varphi) [p \cos(\alpha t + \varphi) + q \sin(\alpha t + \varphi)] dw(\varepsilon t); \\ d\varphi(t) = \frac{2\varepsilon}{r} \{ [q \cos(\alpha t + \varphi) - p \sin(\alpha t + \varphi)] [a_0 r \cos(\alpha t + \varphi) - a_1 r \alpha \sin(\alpha t + \varphi) - \\ - a_2 r(t - \pi) \alpha \sin(\alpha t - \alpha \pi + \varphi(t - \pi)) + a_3 r^3(t - \pi) \alpha^3 \sin^3(\alpha t - \alpha \pi + \varphi(t - \pi)) + \\ + hr \cos(\alpha t + \varphi) \sin(\alpha_1 t) + 2\bar{q}\gamma \alpha r(t - \pi - \theta^* \varepsilon \gamma) \cos(\alpha t - \alpha \pi + \varphi(t - \pi) - \alpha \theta^* \varepsilon \gamma) \times \\ \times \sin(\alpha_1 t)] + \frac{s^2}{r} r^2 \cos(\alpha t + \varphi) [p^2 \sin^2(2\alpha t + 2\varphi) - 2pq \cos(2\alpha t + 2\varphi) - \\ - q^2 \sin(2\alpha t + 2\varphi)]\} dt + \frac{2s}{r} r \cos(\alpha t + \varphi) [q \cos(\alpha t + \varphi) - p \sin(\alpha t + \varphi)] dw(\varepsilon t), \end{cases} \quad (4)$$

где

$$p = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{L'(i\alpha)} \right\} = - \frac{\bar{q}\alpha\pi}{2[(\alpha + \bar{q})^2 + (\bar{q}\alpha\pi)^2]};$$

$$q = \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{L'(i\alpha)} \right\} = \frac{\alpha + \bar{q}}{2[(\alpha + \bar{q})^2 + (\bar{q}\alpha\pi)^2]}.$$

Согласно результатам [7] в системе (4) можно усреднять по явно входящему времени коэффициенты сноса. Для этого предположим, что точка (\bar{q}, ω^2) находится на одной из прямых (см. рис. 1), которые наклонены влево, т.е. $\sin(\alpha\pi) = 1$. После усреднения [7] и перехода к медленному времени $t_1 = \varepsilon t$ уравнения системы (4) примут вид

$$\begin{cases} dr(t_1) = \left[pa_0 r - qa_1 \alpha r + a_2 \alpha p r - \frac{3}{4} a_3 \alpha^3 p r^3 - \frac{h}{2} (p \sin(2\varphi) - q \cos(2\varphi)) + \right. \\ \left. + \frac{\bar{q}}{2} \gamma \alpha^2 q r + \frac{3}{4} s^2 q^2 r + \frac{1}{4} s^2 p^2 r \right] dt_1 + 2sr \cos\left(\frac{\alpha t_1}{\varepsilon} + \varphi\right) \times \\ \times \left[p \cos\left(\frac{\alpha t_1}{\varepsilon} + \varphi\right) + q \sin\left(\frac{\alpha t_1}{\varepsilon} + \varphi\right) \right] dw(t_1); \\ d\varphi(t_1) = \left[qa_0 + pa_1 \alpha + qa_2 \alpha - \frac{3}{4} a_3 \alpha^3 q r^2 - \frac{h}{2} (q \sin 2\varphi + p \cos 2\varphi) - \right. \\ \left. - \frac{p}{2} \bar{q} \alpha^2 - s^2 pq \right] dt_1 + 2s \cos\left(\frac{\alpha t_1}{\varepsilon} + \varphi\right) \left[q \cos\left(\frac{\alpha t_1}{\varepsilon} + \varphi\right) - p \sin\left(\frac{\alpha t_1}{\varepsilon} + \varphi\right) \right] dw(t_1). \end{cases} \quad (5)$$

Чтобы в системе усреднить коэффициенты диффузии, необходимо согласно [7] записать соответствующую систему

$$\begin{cases} \sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2 = \bar{\sigma}_r^2, \\ \sigma_{11}\sigma_{12} + \sigma_{12}\sigma_{22} = \bar{\sigma}_r\bar{\sigma}_\psi, \\ \sigma_{12}^2 + \sigma_{22}^2 = \bar{\sigma}_\psi^2, \end{cases} \quad (6)$$

из которой следует найти σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} . В данном случае

$$\bar{\sigma}_r^2 = \frac{s^2 r^2}{2} (3p^2 + q^2); \quad \bar{\sigma}_\psi^2 = \frac{s^2}{2} (3q^2 + p^2).$$

Упрощенную систему в явном виде выписывать не будем, поскольку решенные системы (6) довольно громоздкие даже без наличия пуассоновских возмущений. Более того, в дальнейшем исследовании стационарных режимов колебаний эти уравнения не рассматриваются.

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ КОЛЕБАНИЙ В СЛУЧАЕ $s=0$

Система (5) при замене $\theta = \sqrt{p^2 + q^2}$ преобразуется к виду

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \left(a_0 \sin \rho - a_1 \alpha \cos \rho + a_2 \alpha \sin \rho + \frac{\bar{q}}{2} \gamma \alpha^2 \cos \rho \right) r - \\ \quad - \frac{3}{4} a_3 \alpha^3 r^3 \sin \rho + \frac{h}{2} \cos(2\alpha + \rho) r; \\ \frac{d\varphi}{d\theta} = a_0 \cos \rho + a_1 \alpha \sin \rho + a_2 \alpha \cos \rho - \frac{\bar{q}}{2} \gamma \alpha^2 \sin \rho - \frac{3}{4} a_3 \alpha^3 r^3 \cos \rho - \\ \quad - \frac{h}{2} \sin(2\varphi + \rho). \end{cases} \quad (7)$$

Поскольку исследуется стационарный режим работы ПЛГЗС, необходимо учитывать, что $dr/d\theta = 0$, $d\varphi/d\theta = 0$. Поэтому из (7) легко получить соотношение $(a_1 \alpha - \frac{\bar{q}}{2} \gamma \alpha^2) = \frac{h}{2} \cos 2\varphi$. Следовательно,

$$\left| \frac{2a_1 \alpha - \bar{q} \gamma \alpha^2}{h} \right| \leq 1. \quad (8)$$

Как видно из соотношения (8), синхронизованные колебания будут возникать только при большой интенсивности «накачки» [2, 3].

Приведем систему (7) к более удобному виду, обозначив

$$\begin{aligned} b_1 &= (a_0 + a_2 \alpha) \sin \rho - \left(a_1 \alpha - \frac{\bar{q}}{2} \gamma \alpha^2 \right) \cos \rho; \\ b_2 &= (a_0 + a_2 \alpha) \cos \rho + \left(a_1 \alpha - \frac{\bar{q}}{2} \gamma \alpha^2 \right) \sin \rho; \\ x &= r^2; \quad \psi = 2\varphi + \rho; \quad t = 2\theta; \quad l = \frac{3}{4} a_3 \alpha^3. \end{aligned}$$

Тогда система (7) примет вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = b_1 x - cx^2 \sin \rho + \frac{h}{2} x \cos \varphi; \\ \frac{d\psi}{dt} = b_2 - cx \cos \rho - \frac{h}{2} \sin \psi. \end{cases} \quad (9)$$

Для нахождения стационарных режимов работы системы (9) следует решить относительно x и ψ систему

$$\begin{cases} b_1 x - cx^2 \sin \rho + \frac{h}{2} x \cos \varphi = 0; \\ b_2 - cx \cos \rho - \frac{h}{2} \sin \psi = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Если $x=0$, то из второго уравнения получим $\sin \psi = 2b_2 / h$.

Для $h > |2b_2|$ имеем две особые точки: (x_1, ψ_1) , (x_2, ψ_2) , для которых $x_1 = x_2 = 0$, $\sin \psi_1 = \frac{2b_2}{h}$, а $\psi_2 = \pi - \psi_1$, т.е. $\cos \psi_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \psi_1}$, $\cos \psi_2 = -\sqrt{1 - \sin^2 \psi_1}$. В случае $h = |2b_2|$ обе особые точки совпадают. Если $h < |2b_2|$, то не существует ни одной из этих точек.

В случае $x \neq 0$ разделим на x первое из уравнений (10), получим еще две особые точки: (x_3, ψ_3) , (x_4, ψ_4) , где

$$x_3 = \frac{1}{c} \left(a_0 + a_2 \alpha - \sqrt{\frac{h^2}{4} - \left(a_1 \alpha - \frac{\bar{q}}{2} \gamma \alpha^2 \right)^2} \right),$$

$$x_4 = \frac{1}{c} \left(a_0 + a_2 \alpha + \sqrt{\frac{h^2}{4} - \left(a_1 \alpha - \frac{\bar{q}}{2} \gamma \alpha^2 \right)^2} \right),$$

$$\psi_3 = 2\varphi_3 + \rho, \quad \psi_4 = -2\varphi_3 + \rho,$$

угол φ_3 найдем из соотношения $\cos 2\varphi_3 = \frac{2}{h} \left(a_1 \alpha - \frac{\bar{q}}{2} \gamma \alpha^2 \right)$. Это соотношение

гарантирует существование точек (x_3, ψ_3) , (x_4, ψ_4) только в случае выполнения условий синхронизации (8).

Режимы колебаний, отвечающие 1-й и 3-й особым точкам, назовем синфазными, а режимы, отвечающие 2-й и 4-й точкам, назовем антифазными [2, 3].

Для исследования полученных стационарных состояний следует составить систему уравнений в вариациях для системы (9):

$$\begin{cases} \frac{d\delta_x}{dt} = \left(b_1 - 2x_{st} c \sin \rho + \frac{h}{2} \sin \psi_{st} \right) \delta_x - \frac{h}{2} x_{st} \sin \psi_{st} \delta_\psi, \\ \frac{d\delta_\psi}{dt} = -c \sin \rho \delta_x - \frac{h}{2} x_{st} \cos \psi_{st} \delta_\psi, \end{cases}$$

для которой характеристическое уравнение имеет вид

$$z^2 - \rho z + \Delta = 0, \quad (11)$$

где $\rho = b_1 - 2x_{st} c \sin \rho$, $\Delta = - \left(b_1 - 2x_{st} c \sin \rho + \frac{h}{2} \cos \psi_{st} \right) \frac{h}{2} \cos \psi_{st} - \frac{h}{2} x_{st} \sin \psi_{st} \cos \rho$.

В зависимости от корней характеристического уравнения в системе возможны различные особые точки, но согласно предположениям параметры \bar{q} и ω^2 системы (1) могут находиться только на границах между областями D_0 и D_2 (см. рис. 1). Однако есть возможность исследовать внутренние точки областей с помощью введенных возмущений параметров \bar{q} и ω^2 параметрами a_0 и a_2 . Поэтому целесообразно исследовать зависимость корней характеристического уравнения (11) от величин a_0 и a_2 , причем остальные параметры будем считать фиксированными.

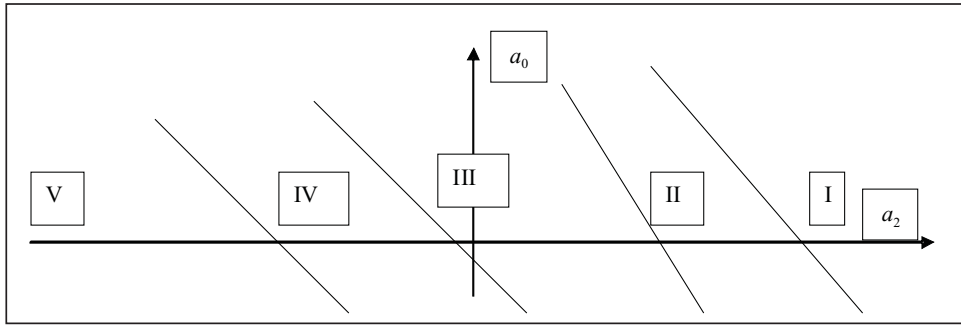


Рис. 2

Построим для каждой особой точки в плоскости (a_0, a_2) кривые $\rho^2 - 4\Delta = 0$, $\rho = 0$, $\Delta = 0$. Первая кривая отделяет узлы и седла от фокусов, вторая отделяет устойчивые узлы и фокусы от неустойчивых, а третья кривая служит границей между узлами и седлами.

Рассмотрим точку (x_1, ψ_1) . Уравнение $\rho^2 - 4\Delta = 0$ не имеет решений, так как для всех значений a_0 и a_2 выполняется неравенство $\rho^2 - 4\Delta > 0$. Из уравнения $\Delta = 0$ находим три прямые:

$$\begin{cases} a_0 = -a_2\alpha - A \operatorname{tg} \rho \pm \frac{h}{2 \cos \rho}, \\ a_0 = -a_2\alpha - \sqrt{\frac{h^2}{4} - A^2}, \end{cases} \quad (12)$$

где $A = \left(a_1\alpha - \frac{\bar{q}}{2} \gamma \alpha^2 \right)$. Еще одну прямую порождает уравнение $\rho = 0$: $a_0 = -a_2\alpha - A \operatorname{ctg} \rho$.

На рис. 2 приведены прямые $\rho = 0$ и $\Delta = 0$ в фазовом пространстве параметров (a_0, a_2) . Параметры a_0 и a_2 не могут принимать значений из областей I и V, ибо для них не определено Δ . В областях II и III расположены седла, а в области IV — устойчивые узлы. Отметим, что уравнение $\rho^2 - 4\Delta = 0$ для точки (x_2, ψ_2) также не имеет решения, так как $\rho^2 - 4\Delta > 0$ при всех a_0 и a_2 .

Из уравнения $\Delta = 0$ получим три прямые, из которых первые две такие же, как и для точки (x_1, ψ_1) , а уравнения третьей прямой имеет вид

$$a_0 = -a_2 + \sqrt{\frac{h^2}{4} - A^2}. \quad (13)$$

Уравнение $\rho = 0$ примет вид

$$a_0 = -a_2\alpha + A \operatorname{ctg} \rho. \quad (14)$$

Прямые уравнений (12), (13) и (14) приведены на рис. 3.

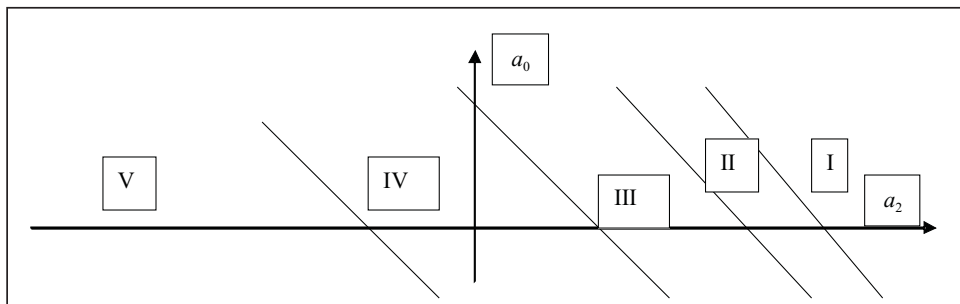


Рис. 3

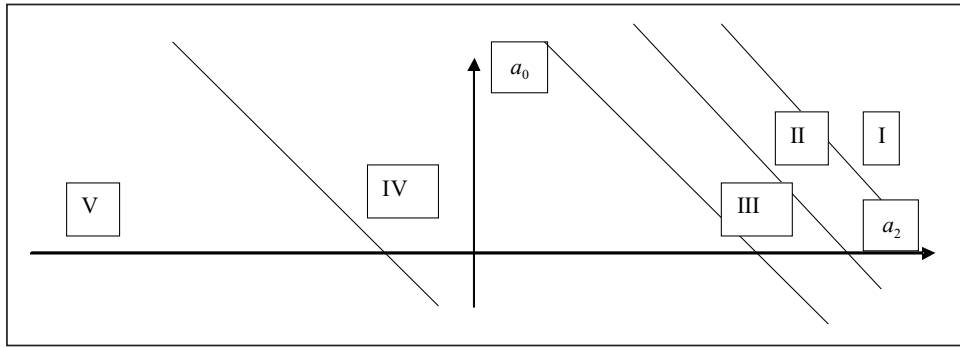


Рис. 4

Как и для синфазного режима [2] параметры a_0 и a_2 не могут принять значений из областей I и V. Область II соответствует неустойчивым узлам, областям III и IV соответствуют седла. Для второго синфазного режима уравнение $\rho^2 - 4\Delta = 0$ порождает две параллельные прямые, для которых

$$a_0 = -a_2\alpha - \sin^2 \rho \left(-2\sqrt{\frac{h^2}{4} - A^2} \sin^2 \rho + \frac{1}{2} A \sin 2\rho + h \sin(2\varphi_3 \pm \sqrt{K}) \right), \quad (15)$$

где

$$K = 4h \left[h \sin^2 \varphi_3 - 2 \sin^2 \rho \sqrt{\frac{h^2}{4} - A^2} (2 \sin 2\varphi_3 + 2 \sin \rho \cos \psi_3 - \cos \rho \sin \psi_3) + A \sin 2\rho \sin 2\varphi_3 - h \sin^2 \rho \sin^2 \psi_3 + A \sin \rho \sin 2\rho \sin \psi_3 \right].$$

Далее из уравнений $\rho = 0$, $\Delta = 0$ имеем еще две прямые:

$$a_0 = -a_2\alpha + 2\sqrt{\frac{h^2}{4} - A^2} - A \operatorname{ctg} \rho; \quad (16)$$

$$a_0 = -a_2\alpha + \frac{1}{\sin 2\varphi_3} \times \left[A \cos \varphi_3 \cos \rho - \frac{h}{2} \cos^2 \psi_3 - (2 \cos \psi_3 \sin \rho - \sin \psi_3 \cos \rho) \sqrt{\frac{h^2}{4} - A^2} \right]. \quad (17)$$

Четыре прямые уравнений (15), (16) и (17) изображены на рис. 4.

Проведем анализ ситуации, изображенной на рис. 4. Область I соответствует седлам, область II — устойчивым узлам, область III — устойчивым фокусам, область IV — неустойчивым фокусам, область V — неустойчивым узлам.

Аналогично синфазному режиму для второго антифазного режима уравнение $\rho^2 - 4\Delta = 0$ определяет также две параллельные прямые:

$$a_0 = -a_2\alpha - \sin^2 \rho \left(2\sqrt{\frac{h^2}{4} - A^2} \sin^2 \rho + \frac{1}{2} A \cos 2\rho - h \sin 2\varphi_3 \pm \sqrt{K_1} \right),$$

где

$$K_1 = 4h \left[-h \sin^2 \varphi_3 - 2 \sin^2 \rho \sqrt{\frac{h^2}{4} - A^2} (2 \sin 2\varphi_3 + 2 \cos \rho \sin \psi_4 - 2 \sin \rho \cos \psi_4) - A \sin 2\rho \sin 2\varphi_3 - h \sin^2 \rho \cos^2 \psi_4 + A \sin \rho \sin 2\rho \sin \psi_4 \right].$$

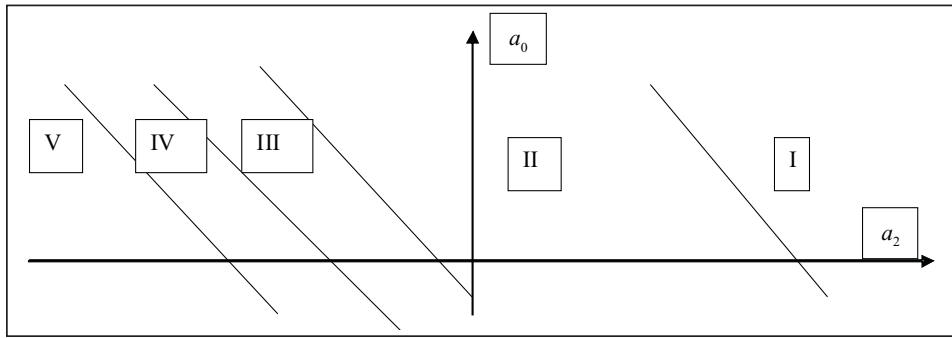


Рис. 5

Далее рассмотрим уравнения $\rho = 0$ и $\Delta = 0$:

$$a_0 = -a_2\alpha - 2\sqrt{\frac{h^2}{4} - A^2} - A \operatorname{ctg} \rho; \quad a_0 = -a_2\alpha - \frac{1}{\sin 2\varphi_3} \times$$

$$\times \left[A \cos \psi_4 \cos \rho - \frac{h}{2} \cos^2 \psi_4 + (2 \cos \psi_4 \sin \rho - \sin \psi_1 \cos \rho) \sqrt{\frac{h^2}{4} - A^2} \right].$$

На рис. 5 область I соответствует неустойчивым узлам, область II — устойчивым фокусам, область III — устойчивым узлам, области IV и V — седлам.

Таким образом, с помощью полученных графиков удобно провести схематический анализ режимов работы ПЛГЗС. Пусть, например, необходимо исследовать работу генератора, для которого точка (\bar{q}, ω^2) находится вблизи границы D_0 и D_2 . Тогда найдется ближайшая точка на прямой, которая служит границей между областями D_0 и D_2 . Вычислим величину приращений для a_0 и a_2 , которые необходимо придать параметрам \bar{q} и ω^2 , чтобы достичь нужной точки. Затем на рис. 2–5 непосредственно находим тип каждой особой точки. Как видим из рисунков, в параметрически возмущенном ПЛГЗС может быть синхронизирован устойчивый режим колебаний, плотность распределения амплитуды и фазы этого процесса будут найдены. В случае неустойчивых узлов и фокусов синхронизация отсутствует, а амплитуда и фаза подвержены флуктуациям.

ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИИ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ НА РАБОТУ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗМУЩЕННОГО ЛАМПОВОГО ГЕНЕРАТОРА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В ЦЕПИ СЕТИ И ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ «НАКАЧКА» ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХ

Рассмотрим случай $h = 0$. Тогда система уравнений (5) уже не содержит φ . Значит, эту систему необходимо исследовать независимо.

Для плотности распределения амплитуды колебаний можно получить одномерное уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК) [1, 4]

$$\frac{\partial \upsilon(r, t)}{\partial t} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left[(pa_0 - qa_1\alpha + pa_2\alpha + \frac{\bar{q}}{2}\gamma\alpha^2 + \frac{1}{4}s^2p^2 + \frac{3}{4}s^2q^2)r - \frac{3}{4}a_3\alpha^3pr^3 \right] \upsilon(r, t) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[\frac{sr^2}{2} (3p^2 - q^2) \upsilon(r, t) \right]. \quad (18)$$

Заметим, что исследовать изменение $\upsilon(r, t)$ во времени из уравнения (18) проблематично. Поэтому вычислим стационарное распределение амплитуды. Для

этого положим $\frac{\partial v(r, t)}{\partial t} = 0$ и, интегрируя (18), получим уравнение

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{sr^2}{2} (3p^2 + q^2) v(r) \right] - (M_1 r - M_2 r^3) v(r) = K, \quad (19)$$

где $M_1 = 2pa_0 - 2pa_1\alpha - 2pa_2\alpha + \bar{q}\gamma\alpha^2 q + \frac{s^2}{2}(p^2 + 3q^2)$, $M_2 = \frac{3}{2}a_3\alpha^3 p$.

Аналогично [3] доказывается, что $K = 0$. Тогда (19) интегрируем

$$v_{st}(r) = c \exp \left\{ \int_0^r \frac{2M_1 - s^2(3p^2 + q^2) - 2M_2 u^2}{s^2(3p^2 + q^2)u} du \right\}.$$

Обозначим $M_1^1 = 2M_1 - s^2(3p^2 + q^2)$, $M_2^1 = 2M_2$, $M_3 = s^2(3p^2 + q^2)$. Тогда

$v_{st}(r) = Cr^{M-1}e^{-Nr}$, где $M-1 = \frac{M_1^1}{M_3}$, $2N = \frac{M_2^1}{M_3}$. Постоянная C находится из

условий нормировки, т.е. $\int_0^\infty v_{st}(r) dr = 1$. Окончательно имеем

$$v_{st}(r) = \frac{2N^{M/2}}{\Gamma\left(\frac{M}{2}\right)} r^{M-1} e^{-Nr}. \quad (20)$$

Таким образом, с уменьшением интенсивности шума максимум распределения сдвигается и растет, а значит разброс амплитуды уменьшается.

Пусть r_0 — значение амплитуды, при котором ω_{st} достигает своего максимума. Из (20) находим, что

$$r_0 = \sqrt{\frac{M-1}{2N}} = \left[\frac{4(pa_0 - a_1q\alpha + pa_2\alpha) + \bar{q}\gamma\alpha^2 q - 2s(p^2 - q^2)}{3a_3\alpha^3 p} \right]^{1/2}. \quad (21)$$

При $s \rightarrow 0$ получим стремление r_0 к $r_{st} = \left[\frac{4(pa_0 - a_1q\alpha + pa_2\alpha) + \bar{q}\gamma\alpha^2 q}{3a_3\alpha^3 p} \right]^{1/2}$.

Замечание 1. Значение r_{st} , полученное из уравнения ФПК (18), совпадает со значением r_{st} , которое находится из (19) при $s = h = 0$.

Замечание 2. При увеличении s максимум распределения может сдвигаться как влево, так и вправо в зависимости от того, в какой точке области (\bar{q}, ω^2) находится. Как видно из (21), это зависит от знака разности $p^2 - q^2$. Решение уравнения $p^2 - q^2 = 0$ порождает границы этих областей:

$$\omega^2 = \frac{3q^2 - 2\pi q^2}{1 - 2\pi q + \pi^2 q^2}, \quad \omega^2 = \frac{3q^2 + 2\pi q^3}{1 + 2\pi q + \pi^2 q^2}.$$

Далее следует проанализировать второе уравнение системы (5). При $h = 0$ фаза подчиняется диффузионному закону. При $h \neq 0$ составим одномерное уравнение ФПК для условной плотности распределения фазы при фиксированной амплитуде, поскольку фаза устанавливается быстрее амплитуды [3].

С учетом (6) запишем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v(\varphi, r)}{\partial t} = \\ & = -\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[(a_0 q + a_1 p \alpha + a_2 p \alpha - \frac{3}{4} a_3 \alpha^3 q r^2 - \frac{h}{2} (q \sin 2\alpha + q \cos 2\varphi) - \frac{\bar{q}}{2} p \gamma \alpha^2 - \right. \\ & \quad \left. - s^2 p q) v\left(\frac{\varphi}{r}\right) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left[\frac{s^2}{2} (3q^2 + p^2) v\left(\frac{\varphi}{r}\right) \right]. \quad (22) \end{aligned}$$

Обозначив

$$M_1 = \left(a_0 q + a_1 p \alpha + a_2 q \alpha - \frac{3}{4} a_3 \alpha^3 q r^2 - \frac{\bar{q}}{2} p \gamma \alpha^2 - s^2 p q \right), \quad M_2 = \frac{4M_1}{s^2(3q^2 + p^2)},$$

$$M_3 = \frac{2h\sqrt{p^2 + q^2}}{s^2(3q^2 + p^2)}, \quad \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \sin \rho, \quad \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \cos \rho, \quad 2\varphi + \rho = \psi, \quad (23)$$

найдем стационарное решение уравнения (22). В обозначениях (23) уравнение (22) примет вид

$$\frac{\partial v^2(\varphi, r)}{\partial \psi^2} - \frac{d}{d\psi} \left[(M_1 - M_3 \sin \psi) v \left(\frac{\varphi}{r} \right) \right] = 0.$$

Его решение запишем в виде [3]

$$v(\varphi, r) = c_1 e^{M_2 \varphi + M_3 \cos \varphi} \int_{c_2}^{\varphi} e^{-M_2 \psi - M_3 \cos \psi} d\psi.$$

Постоянные c_1 и c_2 определяются из условий периодичности и нормировки

$$v(\varphi + 2\pi) = v(\varphi), \quad \int_0^{2\pi} v(\varphi) d\varphi = 1.$$

Замечание 3. В работе [3] проведен подробный анализ влияния параметров M_2 и M_3 на распределение фазы колебаний, поэтому этот анализ проводить не будем.

Итак, в статье проведен анализ работы параметрического лампового генератора с запаздывающей обратной связью в случае возмущений, которые порождаются интегралами Ито и Пуассона. Исследованы стационарные режимы колебаний при наличии случайных помех, отделены стационарные и нестационарные режимы работы генератора в терминах параметров a_i исходного уравнения (1). Для исходного уравнения определены стационарные режимы при наличии непрерывных помех.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Букатарь М.И., Царьков Е.Ф. Об автоколебаниях в ламповом генераторе с запаздывающей обратной связью // Известия вузов. — 1970. — № 8. — С. 1117–1125.
2. Гоноровский И.С. К теории высокочастотных генераторов с запаздывающей связью // Радиотехника. — 1958. — 13, № 5. — С. 19–30.
3. Стратонович Р.А. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1961. — 558 с.
4. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. — Рига: Зинатне, 1989. — 421 с.
5. Рубаник В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. — М.: Наука, 1969. — 287 с.
6. Ясинский В.К., Малык И.В. О непрерывности по параметру решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений с пуассоновскими возмущениями // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — № 6. — С. 45–61.
7. Ясинский В.К., Малык И.В. Исследование колебаний в квазилинейных стохастических динамических системах с последствием // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 3. — С. 82–95.
8. Jacod J., Shiryaev A.N. Limit theorems for stochastic processes. — Berlin: Springer, 1987. — 600 p.
9. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. — М.: Наука, 1977. — 352 с.
10. Jakubowski A. A non-Skorohod topology on the Skorohod space // Electronic Journal of Probability. — 1997. — 42, N 18. — P. 1–21.
11. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. — К.: Наук. думка, 1982. — 612 с.
12. Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967. — 548 с.

Поступила 30.12.2013