УДК 519.85

О.А. ЕМЕЦ, Т.Н. БАРБОЛИНА

КОМБИНАТОРНАЯ ОПТИМИЗАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ УПАКОВКИ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ СО СТОХАСТИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Аннотация. На основе введенного отношения порядка на множестве дискретных случайных величин формализованы понятия взаимного расположения в полосе прямоугольников со стохастическими параметрами: попадание в полосу, касание, пересечение, непересечение. Построена комбинаторная математическая модель задачи оптимальной упаковки прямоугольников для случая, когда входные данные являются дискретными случайными величинами.

Ключевые слова: дискретная случайная величина, комбинаторная оптимизация, линейный порядок, модели упаковки, стохастическая оптимизация, упаковка прямоугольников.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие комбинаторной оптимизации с учетом неопределенно заданной информации обусловило появление моделей, использующих исходные данные в условиях неопределенности [1–5]. Исследование методов решения оптимизационных задач на множествах комбинаторной природы с учетом различных видов неопределенности осуществляется в том числе в рамках евклидовой комбинаторной оптимизации [6–10].

Рассмотрим необходимые понятия и определения евклидовой комбинаторной оптимизации на основе работы [11]. Под мультимножеством понимаем совокупность элементов, среди которых могут быть одинаковые. Упорядоченной k-выборкой из мультимножества $G=\{g_1,\dots,g_\eta\}$ называется набор

$$(g_{i_1},\dots,g_{i_k}), \tag{1}$$

где $g_{i_j}\in G$, $i_j\ne i_t$ $\forall i_j, i_t\in J_\eta$, $\forall j,t\in J_k$ (здесь и далее J_n обозначено множество n первых натуральных чисел). Множество, различными элементами которого являются различные k-выборки вида (1), называется евклидовым комбинаторным. Таким образом, элементы евклидового комбинаторного множества отличаются, если они независимо от других отличий имеют различный порядок следования образующих их символов. Примеры евклидовых комбинаторных множеств:

- общее множество размещений — множество всех k-выборок вида (1) из мультимножества G;
- общее множество перестановок — множество всех k-выборок вида (1) из мультимножества G при условии $k=\eta$.

Применение аппарата евклидовой комбинаторной оптимизации позволяет адекватно формализовать целый ряд практически значимых задач. Одной из них является задача упаковки прямоугольников, которая в простейшем случае формулируется следующим образом. Пусть есть некоторая полубесконечная полоса, разделенная на полоски одинаковой шириной h_0. Заданы также p прямоугольников шириной h_0 с длинами $a_1,\dots,a_p$. Задача состоит в расположении прямоугольников без наложений в полосе таким образом, чтобы длина занятой части полосы была минимально возможной (под длиной занятой части полосы понимают максимальную из длин занятых частей отдельных полосок). В оптимальном решении прямоугольники должны размещаться в полосках так, чтобы каждый следующий касался предыдущего.

Известны методы решения этой задачи в случаях, когда входные данные являются действительными числами [11, 12], нечеткими числами [6, 7], центрированными интервалами [8, 9], случайными величинами с нормальным законом распределения [10], однако актуальным остается ее рассмотрение с учетом стохастической неопределенности, когда случайные величины имеют другой закон распределения.

Отметим, что в случае наличия той или иной неопределенности входных данных возникает вопрос о формализации понятий взаимного расположения прямоугольников в полосе, как это сделано, например, в [6] для прямоугольников с нечеткими параметрами. Для случайных величин аналогичные результаты не приводились.

Таким образом, для математической постановки задачи упаковки прямоугольников со стохастической неопределенностью сначала необходимо определить, что понимать под различными способами размещения прямоугольников:

- попадание прямоугольника в полосу;
- взаимное пересечение прямоугольников, размещенных в полосе;
- взаимное непересечение прямоугольников, размещенных в полосе;
- касание прямоугольников, размещенных в полосе.

Для формализации указанных понятий можно использовать упорядочение случайных величин (некоторые возможные способы введения порядка на множестве дискретных случайных величин рассмотрены в [13, 14]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОРЯДКА НА МНОЖЕСТВЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ЕГО СВОЙСТВА

В данной работе используем упорядочение дискретных случайных величин в соответствии с приведенным ниже определением (далее полагаем, что среди возможных значений каждой рассматриваемой случайной величины есть наименьшее, причем оно имеет номер 1). Пусть дискретная случайная величина X принимает с положительными вероятностями $p_1^x, p_2^x, \ldots$ значения $x_1, x_2, \ldots$, а дискретная случайная величина Y — с положительными вероятностями p_1^y, $p_2^y, \ldots$ значения $y_1, y_2, \ldots$ Обозначим $M(X)$ математическое ожидание случайной величины X, а $D(X)$ — дисперсию.

Определение 1. Назовем две дискретные случайные величины X и Y упорядоченными в возрастающем (X предшествует Y) порядке $\prec$ (обозначим этот факт $X \prec Y$), если выполнено одно из следующих условий:

1) $M(X) < M(Y)$;

2) $M(X) = M(Y)$, $D(X) > D(Y)$;

3) $M(X) = M(Y)$, $D(X) = D(Y)$ и найдется такой индекс t, что $x_i = y_i$, $p_i^x = p_i^y$ для всех $i < t$, при этом:

3.1) либо $x_t < y_t$,

3.2) либо $x_t = y_t$ и $p_t^x > p_t^y$.

Утверждение 1. Отношение $\prec$ на множестве дискретных случайных величин является строгим порядком.

Доказательство. Для того чтобы отношение было строгим порядком, необходимо и достаточно, чтобы оно было антирефлексивным, сильно антисимметричным и транзитивным.

Антирефлексивность означает, что ни при каком X не имеет места $X \prec X$. Действительно, $M(X) = M(X)$, $D(X) = D(X)$ и $x_i = y_i$, $p_i^x = p_i^y$ для всех $i = 1, 2, \ldots$, т.е. ни одно из условий определения 1 не выполняется.

Докажем сильную антисимметричность, а именно тот факт, что ни для каких X и Y соотношения $X \prec Y$ и $Y \prec X$ не могут выполняться одновременно. Предположим обратное: $X \prec Y$ и $Y \prec X$. Тогда вследствие $X \prec Y$ имеем $M(X) \le M(Y)$, а из $Y \prec X$ — $M(Y) \le M(X)$, откуда $M(X) = M(Y)$. Аналогично получаем $D(X) = D(Y)$. Таким образом, условия 1 и 2 определения 1 не выполняются, поэтому для индекса $t = \min\{i \mid x_i \ne y_i \vee p_i^x \ne p_i^y\}$ должно выполняться условие 3.1 или 3.2. Но одновременное выполнение условий $x_t < y_t$ и $y_t < x_t$ невозможно. Следовательно, должно иметь место условие 3.2, т.е. $p_t^x > p_t^y$ и $p_t^y > p_t^x$, что также невозможно. Значит, предположение неправильно и отношение $\prec$ сильно антисимметрично.

Для доказательства транзитивности положим $X \prec Y$ и $Y \prec Z$ и рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $M(X) \ne M(Y)$ или $M(Y) \ne M(Z)$. Тогда имеет место одно из трех соотношений:

1) $M(X) < M(Y) < M(Z)$;

2) $M(X) = M(Y) < M(Z)$;

3) $M(X) < M(Y) = M(Z)$.

Следовательно, $M(X) < M(Z)$, т.е. $X \prec Z$.

2. Пусть $M(X) = M(Y) = M(Z)$, но $D(X) \ne D(Y)$ или $D(Y) \ne D(Z)$. Аналогично случаю 1 получаем $D(X) > D(Z)$, т.е. $X \prec Z$.

3. Пусть $M(X) = M(Y) = M(Z)$ и $D(X) = D(Y) = D(Z)$. Тогда для X и Y, Y и Z имеют место условия 3 определения 1. Пусть $t = \min\{i \mid x_i \ne y_i \vee p_i^x \ne p_i^y\}$, $\tau = \min\{j \mid y_j \ne z_j \vee p_j^y \ne p_j^z\}$. Тогда $\min\{l \mid x_l \ne z_l \vee p_l^x \ne p_l^z\} = \min\{t, \tau\}$. Рассмотрим возможные соотношения между t и τ:

3.1) $t < \tau$, тогда $y_t = z_t$ и $p_t^y = p_t^z$; следовательно, либо $x_t < y_t = z_t$, либо $x_t = y_t = z_t$ и $p_t^x > p_t^y = p_t^z$; значит, $X \prec Z$;

3.2) $t > \tau$, тогда $x_\tau = y_\tau$ и $p_\tau^x = p_\tau^y$; следовательно, $x_\tau = y_\tau < z_\tau$ или $x_\tau = y_\tau = z_\tau$, причем $p_\tau^x = p_\tau^y > p_\tau^z$; значит, $X \prec Z$;

3.3) $t = \tau$, тогда возможны такие варианты: $x_t < y_t < z_t$; $x_t = y_t < z_t$; $x_t < y_t = z_t$; $x_t = y_t = z_t$, откуда следует $p_t^x > p_t^y > p_t^z$.

В любом случае $X \prec Z$.

Таким образом, отношение $\prec$ транзитивно. Утверждение доказано.

Определение 2. Назовем две дискретные случайные величины X и Y упорядоченными в неубывающем порядке $\preceq$ (обозначим этот факт $X \preceq Y$), если $X \prec Y$ или $X = Y$.

Покажем, что введенное отношение является линейным порядком. Для этого сначала докажем вспомогательное утверждение.

Утверждение 2. Если X и Y — различные дискретные случайные величины, имеющие соответственно k и m значений, то найдется такой индекс $t \le \min\{k, m\}$, что $x_t \ne y_t$ или $p_t^x \ne p_t^y$.

Доказательство. Пусть для определенности $k \le m$. Предположим, что для всех $t \le k$ имеют место равенства $x_t = y_t$ и $p_t^x = p_t^y$. Так как случайные величины X и Y различны, в этом случае должно быть $m > k$. Следовательно,

$$\sum_{t=1}^{m} p_t^y = \sum_{t=1}^{k} p_t^y + \sum_{t=k+1}^{m} p_t^y > \sum_{t=1}^{k} p_t^y = \sum_{t=1}^{k} p_t^x = 1,$$

что невозможно. Таким образом, предположение неверно. Утверждение доказано.

Утверждение 3. Отношение $\preceq$ на множестве дискретных случайных величин является линейным порядком.

Доказательство. Так как отношение $\preceq$ — объединение строгого порядка $\prec$ и диагонали, оно является порядком [15].

Покажем, что этот порядок линейный, т.е. для любых двух дискретных случайных величин X и Y выполняется одно из условий: $X \preceq Y$ или $Y \preceq X$.

Предположим, что неравенство $X \preceq Y$ не имеет места. Следовательно, X и Y — различные случайные величины, причем $M(X) \geq M(Y)$. Если $M(X) > M(Y)$, то согласно п. 1 определения 1 $Y \prec X$, а значит, $Y \preceq X$.

Если $M(X) = M(Y)$, но $D(X) > D(Y)$, то также $Y \preceq X$.

Рассмотрим случай, когда $M(X) = M(Y)$ и $D(X) = D(Y)$. Поскольку X и Y различны, в соответствии с утверждением 2 существует такой индекс t, что $x_t \neq y_t$ или $p_t^x \neq p_t^y$. По предположению неравенство $X \preceq Y$ не выполняется. Следовательно, $x_t \geq y_t$. При $x_t > y_t$ имеем $Y \prec X$ согласно п. 3.1 определения 1. Если $x_t = y_t$, то $p_t^x > p_t^y$, а значит, $Y \prec X$ (п. 3.2 определения 1). Таким образом, если для случайных величин X и Y не имеет места соотношение $X \preceq Y$, то $Y \preceq X$. Утверждение доказано.

Существенным в задачах оптимизации является определение минимума и максимума на заданном множестве дискретных случайных величин. Используя введенный в определении 2 линейный порядок, упорядочим элементы заданного конечного множества независимых дискретных случайных величин: $X^1 \preceq X^2 \preceq \ldots \preceq X^s$. Максимумом является величина X^s, а минимумом — величина X^1.

Отметим, что линейный порядок имеет важное для моделирования ряда практических задач свойство: упорядочение двух случайных величин сохраняется при прибавлении к левой и правой части соотношения одной и той же случайной величины.

Рассмотрим сумму $Z = X + Y$, где X и Y — независимые случайные величины. Множество значений дискретной случайной величины Z есть множество различных значений сумм вида $x_i + y_j$, а соответствующие вероятности равны

$$p_k^z = \sum_{i,j:\, x_i + y_j = z_k} p_i^x p_j^y .$$

Утверждение 4. Если для дискретных случайных величин X и Y выполняется условие $X \prec Y$ и величины X и Z, Y и Z независимы, то также имеет место $X + Z \prec Y + Z$.

Доказательство. Обозначим $X + Z = \overline{X}$, $Y + Z = \overline{Y}$.

Если $M(X) < M(Y)$, то на основании того факта, что математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий [16], имеем

$$M(\overline{X}) = M(X+Z) = M(X) + M(Z) < M(Y) + M(Z) = M(Y+Z) = M(\overline{Y}).$$

Таким образом, $X + Z \prec Y + Z$ согласно условию 1 определения 1.

Если $M(X) = M(Y)$ и $D(X) > D(Y)$, то аналогично предыдущему случаю

$$D(\overline{X}) = D(X) + D(Z) > D(Y) + D(Z) = D(\overline{Y})$$

(дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий [16]). Следовательно, $X+Z \prec Y+Z$ согласно условию 2 определения 1.

Пусть $M(X)=M(Y)$, $D(X)=D(Y)$. Тогда существует такой индекс t, для которого выполняется условие 3 определения 1. Следовательно, для любых j и всех $i<t$ выполняются равенства

$$x_i+z_j=y_i+z_j,\ p_i^x p_j^z = p_i^y p_j^z. \tag{2}$$

Это означает, что $\bar{x}_k=\bar{y}_k$ для всех $k<s$, где $\bar{x}_s=x_t+z_1$, $\bar{y}_s=y_t+z_1$. В то же время для всех $i>t$ и произвольного j имеем

$$x_i+z_j>x_t+z_j\ge x_t+z_1=\bar{x}_s,\ y_i+z_j>y_t+z_j\ge y_t+z_1=\bar{y}_s.$$

Таким образом, для всех $k<s$ в суммах

$$p_k^{\bar{x}}=\sum_{i,j:x_i+z_j=\bar{x}_k} p_i^x p_j^z,\ p_k^{\bar{y}}=\sum_{i,j:\,y_i+z_j=\bar{y}_k} p_i^y p_j^z$$

все $i<t$, а значит, $p_k^{\bar{x}}=p_k^{\bar{y}}$.

Пусть для всех $k<s$ выполняются условия $\bar{x}_k=\bar{y}_k$ и $p_k^{\bar{x}}=p_k^{\bar{y}}$. Если при этом $\bar{x}_s=x_t+z_1<\bar{y}_s=y_t+z_1$, то получаем $\bar{X}\prec\bar{Y}$. В противном случае из $x_t\le y_t$ (согласно условию 3 определения 1) имеем $\bar{x}_s=\bar{y}_s$, при этом $p_t^x>p_t^y$.

Рассмотрим вероятности $p_s^{\bar{x}}$ и $p_s^{\bar{y}}$. Вследствие (2) для индексов в суммах $x_i+z_j=\bar{x}_s$, $y_i+z_j=\bar{y}_s$ выполняется условие $i\le t$, причем если $i=t$, то $j=1$. Следовательно,

$$p_s^{\bar{x}}=\sum_{\substack{i,j:x_i+z_j=\bar{x}_k\\ i<t}} p_i^x p_j^z+p_t^x p_1^z=$$

$$=\sum_{\substack{i,j:\,y_i+z_j=\bar{y}_k\\ i<t}} p_i^y p_j^z+p_t^x p_1^z<\sum_{\substack{i,j:\,y_i+z_j=\bar{y}_k\\ i<t}} p_i^y p_j^z+p_t^y p_1^z=p_s^{\bar{y}},$$

т.е. $\bar{X}\prec\bar{Y}$. Утверждение доказано.

Следствие 1. Если для дискретных случайных величин X и Y выполняется условие $X\preceq Y$ и величины X и Z, Y и Z независимы, то также имеет место $X+Z\preceq Y+Z$.

Доказательство. Согласно определению 2 $X\preceq Y$, если $X\prec Y$ или $X=Y$. В первом случае выполнение условия $X+Z\preceq Y+Z$ следует из утверждения 4, во втором выполняется равенство $X+Z=Y+Z$, откуда $X+Z\preceq Y+Z$. Следствие доказано.

Следствие 2. Если для дискретных случайных величин X и Y выполняется условие $X\preceq Y$, а величины X и Z, Y и Z независимы, причем все возможные значения величины Z неотрицательны, то также имеет место соотношение $X\preceq Y+Z$.

Доказательство. Поскольку все значения величины Z неотрицательны, $M(Z)\ge 0$, причем $M(Z)=0$ только в случае, когда $z_1=0$, $p_1^z=1$. Значит, при $M(Z)=0$ имеем также $X=X+Z$. Если $M(Z)>0$, то $M(X)<M(X)+M(Z)=$ $=M(X+Z)$, следовательно, согласно определению 1 $X\prec X+Z$. Таким образом, при выполнении условий следствия имеем $X\preceq X+Z$. Из следствия 1 также вытекает $X+Z\preceq Y+Z$. Из двух последних неравенств и транзитивности отношения $\preceq$ получаем $X\preceq Y+Z$. Следствие доказано.

Последнее свойство суммы и порядка важно для применения переборных методов (типа ветвей и границ), поскольку позволяет осуществлять отсечение «бесперспективных» подмножеств.

Пусть ширина полосы Π_0 равна h_0. Свяжем с нижним левым углом полосы начало системы координат, направив оси Ox_1, Ox_2 по сторонам полосы. Рассмотрим расположение прямоугольника Π в полосе, при этом будем считать, что стороны прямоугольника параллельны осям координат. Тогда расположение прямоугольника Π относительно полосы можно определить такими параметрами: ξ, ν — соответственно абсцисса и ордината левого нижнего угла прямоугольника в системе координат Ox_1x_2; h — ширина (высота) прямоугольника; d — длина прямоугольника.

Прямоугольник с указанными параметрами обозначим $\Pi(\xi, \nu, h, d)$. Полагаем, что ширина полосы h_0 и параметры ξ, ν, h, d — независимые дискретные случайные величины (в частности, действительные числа), причем среди возможных значений каждой величины есть наименьшее.

Определение 3. Прямоугольник $\Pi(\xi, \nu, h, d)$ назовем размещающимся в полубесконечной полосе Π_0 шириной h_0, если

$$\begin{cases} 0 \preceq \xi, \\ 0 \preceq \nu, \\ \nu + h \preceq h_0. \end{cases} \qquad (3)$$

Условия (3) назовем условиями размещения прямоугольника Π в полосе Π_0.

Замечание 1. Если порядок на множестве дискретных случайных величин задан в соответствии с определением 2, то условие $0 \preceq \xi$ означает, что ξ — неотрицательное действительное число или дискретная случайная величина с неотрицательным математическим ожиданием.

Рассмотрим взаимное расположение в полосе двух прямоугольников — $\Pi(\xi, \nu, h, d)$ и $\Pi'(\xi', \nu', h', d')$ (как и выше, все параметры являются независимыми дискретными случайными величинами, у которых существует наименьшее возможное значение). Изучим сначала случай, когда $h = h' = h_0$, при этом $\nu = \nu' = 0$.

Определение 4. Прямоугольник $\Pi'(\xi', \nu', h', d')$ будем называть таким, который в полубесконечной полосе Π_0:

1) касается прямоугольника $\Pi(\xi, \nu, h, d)$ справа, если $\xi + d = \xi'$;

2) расположен справа от прямоугольника $\Pi(\xi, \nu, h, d)$ (т.е. Π и Π' не пересекаются), если $\xi + d \prec \xi'$;

3) пересекается с прямоугольником $\Pi(\xi, \nu, h, d)$ справа, если $\xi \preceq \xi' \prec \xi + d$.

Пример 1. Рассмотрим размещение прямоугольников $\Pi_1(\xi_1, \nu_1, h_1, d_1)$, $\Pi_2(\xi_2, \nu_2, h_2, d_2)$, $\Pi_3(\xi_3, \nu_3, h_3, d_3)$ в полубесконечной полосе Π_0 шириной $h_0 = 2$, если порядок задан определением 2, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$, $h_1 = h_2 = h_3 = h_0 = 2$, ξ_1, ξ_2, ξ_3, d_1, d_2, d_3 — случайные величины, заданные рядами распределения в соответствии с табл. 1.

Случайная величина $\xi_1 + d_1$ может принимать такие значения: $2 + 3 = 5$ с вероятностью $1 \cdot 0{,}2 = 0{,}2$; $2 + 5 = 7$ с вероятностью $1 \cdot 0{,}4 = 0{,}4$; $2 + 6 = 8$ с вероятностью $1 \cdot 0{,}4 = 0{,}4$, т.е. ряд распределения случайной величины $\xi_1 + d_1$ имеет следующий вид:

- значения 5 7 8
- вероятности 0,2 0,4 0,4.

Таким образом, $\xi_1 + d_1 = \xi_2$, откуда согласно п. 1 определения 4 следует, что прямоугольник Π_2 касается справа прямоугольника Π_1.

Т а б л и ц а 1

Параметры	Ряды распределения параметров прямоугольников									
	Π_1			Π_2			Π_3			
Значения ξ_i	2			5	7	8	7	10	12	14
Вероятности значений ξ_i	1			0,2	0,4	0,4	0,1	0,65	0,1	0,15
Значения d_i	3	5	6	3	8		3			
Вероятности значений d_i	0,2	0,4	0,4	0,9	0,1		1			

Определим взаимное расположение прямоугольников Π_3 и Π_2:

$$M(\xi_2 + d_2) = M(\xi_2) + M(d_2) = 7 + 3{,}5 = 10{,}5, \quad M(\xi_3) = 10{,}5,$$

$$D(\xi_2 + d_2) = D(\xi_2) + D(d_2) = 1{,}2 + 2{,}25 = 3{,}45, \quad D(\xi_3) = 3{,}45,$$

при этом наименьшее значение величины $\xi_2 + d_2$ равно 8, тогда как наименьшее значение величины ξ_3 равно $7 < 8$, поэтому $\xi_3 \prec \xi_2 + d_2$. Поскольку также $\xi_2 \prec \xi_3$ (как следствие $M(\xi_2) = 7 < M(\xi_3) = 10{,}5$), согласно п. 3 определения 4 прямоугольники Π_3 и Π_2 пересекаются.

Для прямоугольников Π_3 и Π_1 имеем $M(\xi_1 + d_1) = 7 < M(\xi_3) = 10{,}5$, поэтому согласно п. 2 определения 4 прямоугольники Π_3 и Π_1 не пересекаются.

Сформулируем определения различных вариантов взаимного расположения прямоугольников $\Pi(\xi, \nu, h, d)$ и $\Pi'(\xi', \nu', h', d')$ в общем случае (не нарушая общности, можно считать, что $\xi \preceq \xi'$).

Определение 5. Прямоугольники $\Pi(\xi, \nu, h, d)$ и $\Pi'(\xi', \nu', h', d')$ назовем пересекающимися, если выполняется одна из двух систем соотношений:

$$\begin{cases} \xi \preceq \xi' \prec \xi + d, \\ \nu \preceq \nu' \prec \nu + h, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi \preceq \xi' \prec \xi + d, \\ \nu' \preceq \nu \prec \nu' + h'. \end{cases}$$

Определение 6. Прямоугольники $\Pi(\xi, \nu, h, d)$ и $\Pi'(\xi', \nu', h', d')$ назовем непересекающимися, если выполняется совокупность соотношений

$$\left[\begin{array}{l} \xi + d \prec \xi', \\ \nu + h \prec \nu', \\ \nu' + h' \prec \nu. \end{array}\right.$$

Пример 2. Рассмотрим размещение прямоугольников $\Pi_1(\xi_1, \nu_1, h_1, d_1)$, $\Pi_2(\xi_2, \nu_2, h_2, d_2)$, $\Pi_3(\xi_3, \nu_3, h_3, d_3)$ в полубесконечной полосе Π_0 шириной $h_0 = 6$, если:

$$M(\xi_1) = 2, \quad M(\nu_1) = 1, \quad M(h_1) = 2, \quad M(d_1) = 4;$$

$$M(\xi_2) = 5, \quad M(\nu_2) = 2{,}5, \quad M(h_2) = 1, \quad M(d_2) = 4;$$

$$M(\xi_3) = 8{,}5, \quad M(\nu_3) = 2, \quad M(h_3) = 2, \quad M(d_3) = 3.$$

Прямоугольники Π_1, Π_2, Π_3 размещаются в полосе Π_0, так как для них выполняются условия (3) размещения прямоугольника в полосе. В частности, для Π_1 имеем

$$\begin{cases} 0 \le M(\xi_1) = 2, \\ 0 \le M(\nu_1) = 1, \\ M(\nu_1 + h_1) = 3 \le M(h_0) = 6, \end{cases}$$

для Π_2 и Π_3 соответственно

$$\begin{cases} 0 \le M(\xi_2) = 5, \\ 0 \le M(\nu_2) = 2{,}5, \\ M(\nu_2 + h_2) = 3{,}5 \le M(h_0) = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \le M(\xi_3) = 8{,}5, \\ 0 \le M(\nu_3) = 2, \\ M(\nu_3 + h_3) = 4 \le M(h_0) = 6. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} 0 \preceq \xi_i, \\ 0 \preceq \nu_i, \\ \nu_i + h_i \preceq h_0, \end{cases} \quad i = 1, 2, 3.$$

Рассмотрим взаимное размещение прямоугольников Π_1 и Π_2. Поскольку $M(\xi_1) \le M(\xi_2) < M(\xi_1 + d_1)$ $(2 < 5 < 6)$ и $M(\nu_1) \le M(\nu_2) < M(\nu_1 + h_1)$ $(1 < 2{,}5 < 3)$, выполняется система соотношений

$$\begin{cases} \xi_1 \preceq \xi_2 \prec \xi_1 + d_1, \\ \nu_1 \preceq \nu_2 \prec \nu_1 + h_1, \end{cases}$$

т.е. в соответствии с определением 5 прямоугольники Π_1 и Π_2 пересекаются.

Прямоугольники Π_2 и Π_3 также пересекаются, поскольку выполняется система неравенств

$$\begin{cases} M(\xi_2) \le M(\xi_3) < M(\xi_2 + d_2), \\ M(\nu_3) \le M(\nu_2) < M(\nu_3 + h_3), \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_2 \preceq \xi_3 \prec \xi_2 + d_2, \\ \nu_3 \preceq \nu_2 \prec \nu_3 + h_3. \end{cases}$$

Прямоугольники Π_1 и Π_3 не пересекаются (рис. 1), так как выполняется первое из соотношений совокупности из определения 6: $\xi_1 + d_1 \preceq \xi_3$ $(M(\xi_1 + d_1) = 6,\ M(\xi_3) = 8{,}5)$.

Замечание 2. В примере 2 для простоты геометрической интерпретации подобраны такие случайные величины, что для их упорядочения достаточно сравнения математических ожиданий, что в общем случае может не иметь места.

Определение 7. Прямоугольники $\Pi(\xi, \nu, h, d)$ и $\Pi'(\xi', \nu', h', d')$ назовем касающимися, если выполняется по крайней мере одна из систем соотношений

$$\begin{cases} \xi + d = \xi', \\ \nu \preceq \nu' \preceq \nu + h, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi + d = \xi', \\ \nu' \preceq \nu \preceq \nu' + h', \end{cases} \quad \begin{cases} \xi \preceq \xi' \preceq \xi + d, \\ \nu + h = \nu', \end{cases} \quad \begin{cases} \xi \preceq \xi' \preceq \xi + d, \\ \nu' + h' = \nu. \end{cases}$$

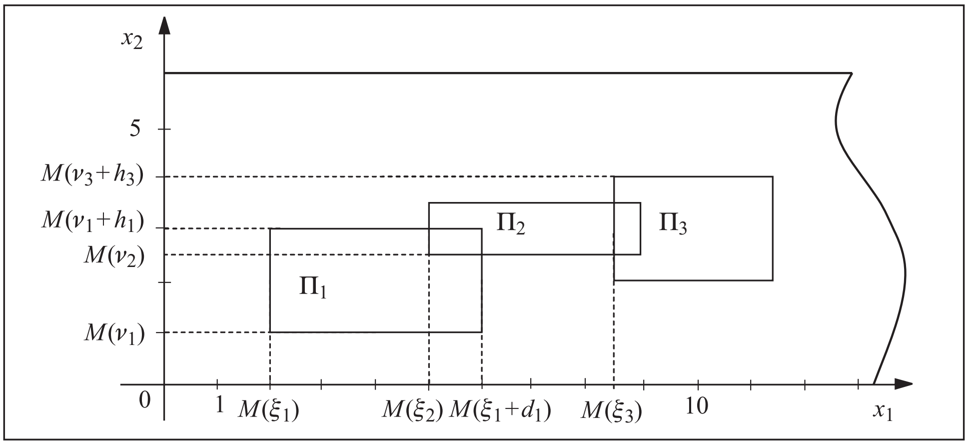

Рис. 1

Т а б л и ц а 2

Параметры	Ряды распределения параметров прямоугольников													
	Π_1				Π_2			Π_3				Π_4		
Значения ξ_i	0,5	3			1	4	7	1	4			3	6	9
Вероятности значений ξ_i	0,8	0,2			0,21	0,58	0,21	0,7	0,3			0,21	0,58	0,21
Значения ν_i	1	2	6	7	0,5	1,5		3,5	4,5	8,5	9,5	1	3,5	
Вероятности значений ν_i	0,4	0,4	0,1	0,1	0,5	0,5		0,4	0,4	0,1	0,1	0,6	0,4	
Значения h_i	2,5				0,5	5,5		0,5	3			0,5	13	
Вероятности значений h_i	1				0,8	0,2		0,8	0,2			0,8	0,2	
Значения d_i	2	4			2			2	5			2	4	
Вероятности значений d_i	0,4	0,6			1			0,3	0,7			0,8	0,2	

Пример 3. Пусть прямоугольники $\Pi_1(\xi_1, \nu_1, h_1, d_1)$, $\Pi_2(\xi_2, \nu_2, h_2, d_2)$, $\Pi_3(\xi_3, \nu_3, h_3, d_3)$ и $\Pi_4(\xi_4, \nu_4, h_4, d_4)$ в полубесконечной полосе шириной $h_0 = 6$ определяются рядами распределения параметров в соответствии с табл. 2.

Покажем, что прямоугольники Π_1 и Π_2, Π_1 и Π_3, Π_2 и Π_4, Π_3 и Π_4 касаются один другого. Рассмотрим сначала прямоугольники Π_1 и Π_2. Так как $M(\xi_1) = 1$, $M(\xi_2) = 4$, $M(d_1) = 3{,}2$, для математических ожиданий величин ξ_1, ξ_2, $\xi_1 + d_1$ выполняется двойное неравенство $M(\xi_1) \le M(\xi_2) < M(\xi_1 + d_1)$. Следовательно, имеет место соотношение $\xi_1 \preceq \xi_2 \prec \xi_1 + d_1$. В то же время $\nu_2 + h_2 = \nu_1$, поскольку ряд распределения $\nu_2 + h_2$ имеет следующий вид:

- значения $\quad 0{,}5+0{,}5 \quad 1{,}5+0{,}5 \quad 0{,}5+5{,}5 \quad 1{,}5+5{,}5$
- вероятности $\quad 0{,}5\cdot 0{,}8 \quad 0{,}5\cdot 0{,}8 \quad 0{,}5\cdot 0{,}2 \quad 0{,}5\cdot 0{,}2$.

Таким образом, выполняется четвертая система из определения 7.

Рассмотрим прямоугольники Π_1 и Π_3. Так как $M(\xi_3) = 1{,}9$, аналогично предыдущему случаю имеет место соотношение $\xi_1 \preceq \xi_3 \prec \xi_1 + d_1$. При этом, как легко видеть, $\nu_1 + h_1 = \nu_3$, следовательно, выполняется третья система из определения 7.

Для прямоугольников Π_2 и Π_4 имеют место соотношения $\xi_2 + d_2 = \xi_4$ и $\nu_2 \preceq \nu_4 \prec \nu_2 + h_2$ (последнее следует из того, что $M(\nu_2) = 1$, $M(\nu_4) = 2$, $M(h_2) = 1{,}5$, иначе $M(\nu_2) \le M(\nu_4) < M(\nu_2 + h_2)$), т.е. имеет место первая система из определения 7.

Рассмотрим размещение прямоугольников Π_3 и Π_4. Запишем возможные значения и соответствующие вероятности для величины $\xi_3 + d_3$:

- значения $\quad 1+2 \quad 1+5 = 4+2 \quad 4+5$
- вероятности $\quad 0{,}7\cdot 0{,}3 \quad 0{,}7\cdot 0{,}7 + 0{,}3\cdot 0{,}3 \quad 0{,}3\cdot 0{,}7$.

Таким образом, $\xi_3 + d_3 = \xi_4$. Случайная величина ν_4 предшествует случайной величине ν_3, так как $M(\nu_4) = 2 < M(\nu_3) = 5$. Определим соотношение величин ν_3 и $\nu_4 + h_4$. Поскольку $M(\nu_3) = M(\nu_4 + h_4) = 5$, но $D(\nu_3) = 4{,}25 < D(\nu_4 + h_4) = 26{,}5$, получаем $\nu_4 + h_4 \prec \nu_3$. Следовательно, имеет место вторая система из определения 7 (рис. 2).

Замечание 3. Как и в примере 2, случайные величины подобраны таким образом, что для их упорядочения достаточно сравнения математических ожиданий.

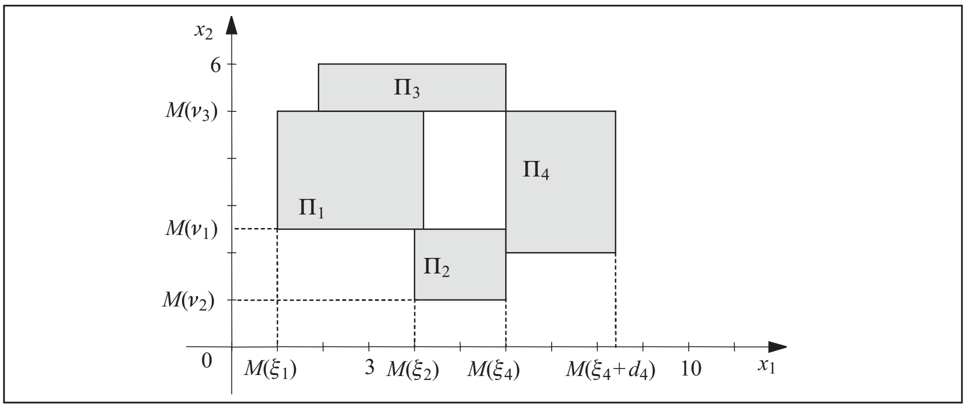

Рис. 2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ УПАКОВКИ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ СО СТОХАСТИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Используя введенные понятия, построим математическую модель задачи упаковки прямоугольников в случае, когда размеры полосок и прямоугольников h_0, $a_1, \ldots, a_p$ являются дискретными случайными величинами.

Пусть количество полосок, на которые поделена заданная полубесконечная полоса, равно m. Тогда в оптимальном решении в каждой полоске расположено от 1 до $p-(m-1)$ прямоугольников. Обозначим $n = p-m+1$ и введем в рассмотрение $mn-p$ прямоугольников шириной h_0 и длиной $a_0 = 0$. Если в некоторой полоске находится меньше, чем n прямоугольников, то разместим в ней столько прямоугольников длиной a_0, чтобы их общее количество в полоске равнялось n. Таким образом, можно считать, что в каждой полоске находится ровно n прямоугольников.

Пусть начало системы координат совпадает с левым нижним углом полосы, $\Pi_{ij}(\xi_{ij}, \nu_{ij}, h_{ij}, x_{ij})$ — прямоугольник, размещенный в i-й полоске ($i \in J_m$) на j-м ($j \in J_n$) от начала полосы месте (напомним, что J_s обозначено множество s первых натуральных чисел). Так как все полоски и прямоугольники одинаковой ширины h_0, имеем $h_{ij} = h_0$, $\nu_{ij} = (i-1)h_0$ $\forall i \in J_m$, $j \in J_n$ (при этом прямоугольники, размещенные в разных полосках, либо не пересекаются, либо касаются один другого). Здесь под произведением ih_0 понимаем случайную величину, возможные значения которой равны произведению возможных значений величины h_0 на число i, а вероятности — соответствующим вероятностям величины h_0.

Как отмечалось, в оптимальном решении прямоугольники должны размещаться так, чтобы каждый следующий касался предыдущего. Из условия касания соседних прямоугольников получаем $\xi_{i,j+1} = \xi_{ij} + x_{ij}$ $\forall i \in J_m$, $\forall j \in J_{n-1}$. Кроме того, $\xi_{i0} = 0$ $\forall i \in J_m$. Таким образом, длина занятой части i-й полоски равна $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$, а длина занятой части полосы в целом определяется как $\max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$.

Для формализации ограничений на возможные длины прямоугольников рассмотрим мультимножество $G = \{\underbrace{a_0, \ldots, a_0}_{mn-p}, a_1, \ldots, a_p\}$ и вектор

$$x = (x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{m1}, \ldots, x_{mn}). \tag{4}$$

Тогда каждому расположению прямоугольников в полосе взаимно однозначно соответствует вектор x, который можно рассматривать как элемент множества перестановок $E_k(G)$ ($k = mn$) из элементов мультимножества G, т.е. $x \in E_k(G)$.

Математическую модель сформулированной задачи упаковки прямоугольников, размеры которых являются дискретными случайными величинами, можно записать следующим образом: найти пару $\langle F(x^*), x^* \rangle$ такую, что

$$F(x^*) = \min_{x \in E_k(G)} \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \; x^* = \arg \min_{x \in E_k(G)} \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}.$$

Для иллюстрации модели рассмотрим пример.

Пример 4. Пусть заданы $m = 2$ полоски и $p = 4$ прямоугольника, среди которых один длиной a_1, два — длиной a_2 и один — длиной a_3. Распределения независимых дискретных случайных величин заданы в соответствии с табл. 3. (Числовые характеристики величин a_1, a_2, a_3 равны $M(a_1) = 3$, $M(a_2) = M(a_3) = 4$, $D(a_1) = 2$, $D(a_2) = 1{,}2$, $D(a_3) = 4$.)

Таблица 3

Величины	Ряды распределения длины прямоугольников						
	$i = 1$		$i = 2$			$i = 3$	
Значения a_i	2	5	3	4	6	3	8
Вероятности значений a_i	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

Рассмотрим решение данной задачи методом полного перебора. В оптимальном решении в каждой из двух полосок может располагаться один, два или три прямоугольника, т.е. $n = p - m + 1 = 3$. Чтобы в каждой полосе размещалось ровно три прямоугольника, необходимо ввести в рассмотрение $mn - p = 2$ прямоугольника длиной $a_0 = 0$. Таким образом, мультимножество $G = \{a_0, a_0, a_1, a_2, a_2, a_3\}$. Множество перестановок $E_k(G)$ из мультимножества G имеет вид

$$E_k(G) = E_6(G) = \{a_1 a_2 a_2 a_3 a_0 a_0, a_2 a_1 a_2 a_3 a_0 a_0, a_0 a_2 a_0 a_1 a_3 a_2, \ldots\}.$$

Расположим в первой полоске прямоугольники с длинами a_1, a_2, a_2, во второй — a_3, a_0, a_0. В зависимости от взаимного расположения прямоугольников в каждой полоске получим соответствующие векторы вида (4) — элементы множества $E_k(G)$:

$$(a_1, a_2, a_2, a_3, a_0, a_0), \quad (a_2, a_1, a_2, a_3, a_0, a_0), \quad (a_2, a_2, a_1, a_3, a_0, a_0),$$
$$(a_1, a_2, a_2, a_0, a_3, a_0), \quad (a_2, a_1, a_2, a_0, a_3, a_0), \quad (a_2, a_2, a_1, a_0, a_3, a_0),$$
$$(a_1, a_2, a_2, a_0, a_0, a_3), \quad (a_2, a_1, a_2, a_0, a_0, a_3), \quad (a_2, a_2, a_1, a_0, a_0, a_3).$$

Для каждого вектора суммы вида $\sum_{j=1}^{3} x_{ij}$ при $i = 1$ и $i = 2$ соответственно равны $a_1 + a_2 + a_2$ и a_3. Таким образом, для перечисленных векторов $F_1 = F(x) = \max\{a_1 + a_2 + a_2, a_3\}$. Поскольку $M(a_1 + a_2 + a_2) = M(a_1) + M(a_2) + M(a_2) = 3 + 4 + 4 = 11$, $M(a_3) = 4 < M(a_1 + a_2 + a_2)$, имеем $a_3 \prec a_1 + a_2 + a_2$, т.е. $F_1 = F(x) = a_1 + a_2 + a_2$.

В случае, когда в первой полоске располагаются прямоугольники длиной a_1, a_2, a_3, а во второй — a_2, a_0, a_0, получаем $F_2 = F(x) = \max\{a_1 + a_2 + a_3, a_2\}$. Так как $M(a_1 + a_2 + a_3) = 11 > M(a_2) = 4$, имеем $a_2 \prec a_1 + a_2 + a_3$ и $F(x) = a_1 + a_2 + a_3$.

Расположив в первой полоске прямоугольники длиной a_2, a_2, a_3, во второй — a_1, a_0, a_0, получим $F_3 = F(x) = \max\{a_2 + a_2 + a_3, a_1\} = a_2 + a_2 + a_3$ ($a_1 \prec a_2 + a_2 + a_3$, поскольку $M(a_2 + a_2 + a_3) = 12 > M(a_1) = 3$).

Итак, рассмотрены все случаи, когда в первой полоске размещены три из первоначально заданных прямоугольников, а во второй — один. Пусть в каждой полоске находится по два из первоначально заданных прямоугольников:

• в первой полоске располагаются прямоугольники длиной a_1 и a_2, а во второй — a_2 и a_3: $F_4 = F(x) = \max\{a_1 + a_2, a_2 + a_3\} = a_2 + a_3$ ($M(a_1 + a_2) = 7$, $M(a_2 + a_3) = 8$);

• в первой полоске располагаются прямоугольники длиной a_1 и a_3, во второй — a_2 и a_2: $F_5 = F(x) = \max\{a_1 + a_3, a_2 + a_2\} = a_2 + a_2$ ($M(a_1 + a_3) = 7$, $M(a_2 + a_2) = 8$).

Оставшиеся перестановки из множества $E_k(G)$ соответствуют тем расположениям прямоугольников, которые получаются из уже рассмотренных, если поменять местами первую и вторую полоски. Очевидно, что значения целевой функции при этом не изменятся. Оптимальное значение целевой функции $F(x^*) = \min\{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5\}$. Для математических ожиданий указанных случайных величин выполняются соотношения

$$M(F_3) > M(F_1) = M(F_2) > M(F_4) = M(F_5).$$

Таким образом, величины F_1, F_2, F_3 не являются оптимумом задачи. Рассмотрим величины F_4 и F_5, для которых

$$D(F_4) = D(a_2) + D(a_3) = 1{,}2 + 4 = 5{,}2;$$

$$D(F_5) = D(a_2) + D(a_2) = 1{,}2 + 1{,}2 = 2{,}4.$$

Поскольку $D(F_4) > D(F_5)$, в соответствии с условием 2 определения 1 имеем $F_4 \prec F_5$. Следовательно, $F(x^*) = a_2 + a_3$, а одна из точек, доставляющих оптимальное значение целевой функции, имеет вид $x^* = (a_2, a_3, a_0, a_1, a_2, a_0)$.

Приведем одну из содержательных интерпретаций задачи. Пусть имеется m однотипных устройств, на которых нужно обработать p заявок. Время обслуживания каждой заявки — дискретная случайная величина с известным рядом распределения. Необходимо разместить заявки по устройствам таким образом, чтобы время обслуживания всех заявок было наименьшим (при сравнении случайных величин используется подход, предложенный в определении 2: для оптимального решения математическое ожидание является наименьшим, при равных математических ожиданиях выбирается величина с большей дисперсией и т.д.).

Данную задачу можно рассматривать как задачу упаковки прямоугольников, если считать, что полоски для упаковки соответствуют обслуживающим устройствам, длина прямоугольника соответствует времени обслуживания заявки. В этом случае время обслуживания заявок определенным устройством выражается как длина занятой части полоски, а время обслуживания всех заявок — максимальная из этих величин.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена комбинаторная математическая модель задачи оптимальной упаковки прямоугольников в случае, когда параметры являются дискретными случайными величинами. Формализация понятий взаимного расположения прямоугольников осуществлена на основе введения линейного порядка на множестве дискретных случайных величин. Как направление дальнейших исследований можно отметить разработку методов решения сформулированной задачи, в частности развитие метода ветвей и границ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Парасюк И.Н., Каспшицкая М.Ф. Об одной нечеткой задаче многопараметрического выбора оптимальных решений // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 2. — С. 3–15.
2. Сергиенко И.В., Михалевич М.В. Применение методов стохастической оптимизации для исследования трансформационных процессов в экономике // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2004. — № 4. — С. 7–29.
3. Гребенник И.В. Интервальные модели комбинаторной оптимизации квазилинейных функций в пространстве $I_S^n R$ // Доп. НАНУ. — 2004. — № 9. — С. 60–64.
4. Серая О.В. Нечеткая задача коммивояжера // Математическое моделирование. — 2007. — № 2(17). — С. 13–15.
5. Сергиенко И.В., Емец О.А., Емец А.О. Задачи оптимизации с интервальной неопределенностью: метод ветвей и границ // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 5. — С. 38–50.
6. Ємець О.О., Ємець Ол-ра О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах. — Полтава: ПУЕТ, 2011. — 239 с. — http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/352.
7. Ємець О.О., Ємець Ол-ра О. Побудова математичної моделі однієї комбінаторної задачі упакування прямокутників з нечіткими розмірами // Наук. вісті НТУУ «КПІ». — 2008. — № 6. — С. 25–33.
8. Емец О.А., Евсеева Л.Г., Романова Н.Г. Интервальная математическая модель комбинаторной задачи цветной упаковки прямоугольников // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 3. — С. 131–138.
9. Емец О.А., Евсеева Л.Г., Романова Н.Г. Задача цветной упаковки прямоугольников с учетом погрешностей исходных данных и ее решение // Экономика и мат. методы. — 2000. — **36**, № 3. — С. 149–152.
10. Емец О.А., Роскладка А.А. О комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 5. — С. 35–44.
11. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. — К.: Ін-т системних досліджень освіти, 1993. — 188 с. — http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/487.
12. Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. — Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. — 103 с. — http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/376.
13. Барболіна Т.М., Ємець О.О. Моменти, порядок, оптимізація для випадкових величин // Інформатика та системні науки (ІСН-2014): Матеріали V Всеукр. наук.-практ. конф. (м. Полтава, 13–15 березня 2014 року) / За ред. О.О. Ємця. — Полтава : ПУЕТ, 2014. — С. 40–43. — http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/1942.
14. Емец О.А., Барболина Т.Н. Об упорядочивании дискретных случайных величин // Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии: Materiale Conf. Intern. 25–28 mar. 2014, Chisinău / Red. resp.: Dumitru Solomon. — Chisinău: Evrica, 2014. — **2**. — P. 171–175.
15. Общая алгебра / О.В. Мельников, В.Н. Ремесленников, В.А. Романьков и др.; Под общ. ред. Л.А. Скорнякова. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — Т. 1. — 592 с.
16. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. — М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. — 576 с.

Поступила 07.07.2014