УДК 517.988

**С.В. ДЕНИСОВ, В.В. СЕМЕНОВ, Л.М. ЧАБАК**

# СХОДИМОСТЬ МОДИФИЦИРОВАННОГО ЭКСТРАГРАДИЕНТНОГО МЕТОДА ДЛЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С НЕЛИПШИЦЕВЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

**Аннотация.** Предложен модифицированный экстраградиентный метод с динамической регулировкой величины шага для решения вариационных неравенств с монотонными операторами, действующими в гильбертовом пространстве. Рассмотрен вариант метода для поиска решения вариационного неравенства, являющегося неподвижной точкой квазинерастягивающего оператора. Доказана слабая сходимость методов без предположения о липшицевости операторов.

**Ключевые слова:** вариационное неравенство, монотонный оператор, гильбертово пространство, экстраградиентный метод, слабая сходимость.

## ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи исследования операций и математической физики можно записать в форме вариационных неравенств [1–4]. Решение этих неравенств является интенсивно развивающимся направлением прикладного нелинейного анализа. К настоящему времени предложено множество методов [5–34], в частности проекционного типа (использующих операцию метрического проектирования на допустимое множество).

Известно, что в задачах поиска седловой точки или равновесия Нэша для сходимости наиболее простого проекционного метода (аналога метода проекции градиента) необходимо выполнение усиленных условий монотонности [6, 7]. В случае их невыполнения можно применить несколько подходов, один из которых состоит в регуляризации исходной задачи с целью придать ей требуемое свойство [5]. Сходимость без модификации задачи обеспечивается в итерационных методах экстраградиентного типа, впервые предложенных Г.М. Корпелевич в [21]. Исследование этих методов проводилось во многих работах [22–34]. Для вариационных неравенств и задач равновесного программирования предлагались модификации алгоритма Корпелевич с одним метрическим проектированием на допустимое множество [27, 28]. В этих так называемых субградиентных экстраградиентных алгоритмах и алгоритме Корпелевич первые этапы итерации совпадают, а далее для получения следующего приближения вместо проектирования на допустимое множество осуществляют проектирование на некоторое опорное для допустимого множества полупространство. В работах [27, 28] доказана слабая сходимость порожденных субградиентным экстраградиентным алгоритмом последовательностей к некоторому решению вариационного неравенства. Очевидным недостатком алгоритма, затрудняющим его широкое использование, является предположение о том, что константа Липшица оператора известна или допускает простую оценку. Кроме того, во многих задачах операторы могут не удовлетворять условию Липшица. Заметим, что в большинстве работ по алгоритмам решения вариационных неравенств рассмотрены именно липшицевы операторы.

В настоящй статье предложена модификация субградиентного экстраградиентного алгоритма с динамической регулировкой величины шага для вариационных неравенств с монотонным нелипшицевым оператором и доказана ее сходимость. Используемая регулировка величины шага описана в [22, 23]. Также рассмотрены варианты метода для вариационных неравенств или операторных уравнений с априорной информацией о решении, заданной в виде множества неподвижных точек квазинерастягивающего оператора.

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

Всюду далее $H$ — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и порожденной нормой $||\cdot||$. Пусть $C$ — непустое подмножество пространства $H$, $A$ — оператор, действующий в $H$. Рассмотрим вариационное неравенство:

$$\text{найти } x \in C\colon\ (Ax, y-x) \geq 0 \ \ \forall\, y \in C, \tag{1}$$

множество решений которого обозначим $VI(A,C)$.

Предположим, что выполнены следующие условия:

• множество $C \subseteq H$ — выпуклое и замкнутое;

• оператор $A: H \to H$ — монотонный, равномерно непрерывный на ограниченных множествах и отображающий ограниченные множества в ограниченные;

• множество $VI(A,C)$ непустое.

**Замечание 1.** Если $\dim H < \infty$, то достаточно требовать от оператора $A$ монотонности и непрерывности.

**Вспомогательные сведения.** Пусть $P_C$ — оператор метрического проектирования на множество $C$, т.е. $P_C x$ — единственный элемент множества $C$ со свойством $||P_C x - x|| = \min_{z\in C} ||z-x||$. Полезны следующие характеризации элемента $P_C x$:

$$y = P_C x \Leftrightarrow\ y \in C \ \text{ и } \ (y-x, z-y) \geq 0 \ \ \forall\, z \in C, \tag{2}$$

$$y = P_C x \Leftrightarrow\ y \in C \ \text{ и } \ ||y-z||^2 \leq ||x-z||^2 - ||y-x||^2 \ \ \forall\, z \in C. \tag{3}$$

Из неравенства (2) следует, что $x \in VI(A,C)$ тогда и только тогда, когда $x = P_C(x - \lambda Ax)$, где $\lambda > 0$ [1].

Если оператор $A: H \to H$ монотонный и непрерывный, а множество $C \subseteq H$ выпуклое и замкнутое, то $x \in VI(A,C)$ тогда и только тогда, когда $x \in C$ и $(Ay, y-x) \geq 0$ для всех $y \in C$ [1]. В частности, множество $VI(A,C)$ выпуклое и замкнутое.

Напомним, что оператор $T\colon H \to H$ называют квазинерастягивающим, если $F(T) = \{x \in H\colon Tx = x\} \neq \varnothing$ и $||Tx - y|| \leq ||x-y||$ для всех $x \in H$, $y \in F(T)$ [7, 35]. Заметим, что множество неподвижных точек $F(T)$ квазинерастягивающего оператора замкнутое и выпуклое [7, 35]. Оператор $S\colon C \to H$ называют демизамкнутым в $y \in H$, если для последовательности точек $x_n \in C$ из $x_n \to x$ слабо и $Sx_n \to y$ сильно следует $Sx = y$ [7]. Известно, что для нерастягивающего оператора $T\colon C \to H$ оператор $I - T$ демизамкнут в нуле [7].

При доказательстве слабой сходимости последовательностей элементов гильбертова пространства используем известную лемму Опяла.

**Лемма 1** [36]**.** Пусть последовательность $(x_n)$ элементов гильбертова пространства $H$ слабо сходится к элементу $x \in H$. Тогда для всех $y \in H \setminus \{x\}$ имеем $\varliminf_{n\to\infty} ||x_n - x|| < \varliminf_{n\to\infty} ||x_n - y||$.

Рассмотрим функцию $t \mapsto ||x - P_C(x - tAx)||$, $t \in \mathbb{R}$, имеющую следующее полезное свойство.

**Лемма 2.** Для $x \in H$ и $\alpha \geq \beta > 0$ имеют место неравенства

$$\frac{||x - P_C(x - \alpha Ax)||}{\alpha} \leq \frac{||x - P_C(x - \beta Ax)||}{\beta},$$

$$||x - P_C(x - \beta Ax)|| \leq ||x - P_C(x - \alpha Ax)||.$$

**Доказательство.** Положим $x_\alpha = P_C(x-\alpha Ax)$, $x_\beta = P_C(x-\beta Ax)$. Из (2) следует

$$\left(\frac{x_\alpha - x + \alpha Ax}{\alpha}, x_\beta - x_\alpha\right) \ge 0, \ \left(\frac{x_\beta - x + \beta Ax}{\beta}, x_\alpha - x_\beta\right) \ge 0.$$

Сложив неравенства, получим

$$0 \le \left(\frac{x-x_\alpha}{\alpha} - \frac{x-x_\beta}{\beta}, x_\alpha - x_\beta\right) = \left(\frac{x-x_\alpha}{\alpha} - \frac{x-x_\beta}{\beta}, (x-x_\beta)-(x-x_\alpha)\right).$$

Откуда

$$0 \le -||x-x_\alpha||^2 - \frac{\alpha}{\beta}||x-x_\beta||^2 + ||x-x_\alpha||\,||x-x_\beta|| + \frac{\alpha}{\beta}||x-x_\alpha||\,||x-x_\beta||.$$

Следовательно,

$$0 \ge \left(||x-x_\alpha|| - \frac{\alpha}{\beta}||x-x_\beta||\right)(||x-x_\alpha|| - ||x-x_\beta||).$$

Откуда следует

$$||x-x_\alpha|| - \frac{\alpha}{\beta}||x-x_\beta|| \le 0,$$

что и требовалось доказать. ■

## МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ЭКСТРАГРАДИЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ

Для решения неравенства (1) предлагаем следующий алгоритм.

**Алгоритм 1**

**Инициализация.** Задаем числовые параметры $\sigma > 0$, $\tau \in (0,1)$, $\theta \in (0,1)$ и элемент $x_0 \in H$.

**Итерационный шаг.** Для $x_n \in H$ вычисляем $y_n = P_C(x_n - \lambda_n Ax_n)$, где $\lambda_n$ получаем из условия

$$\begin{cases} j(n) = \min\{j \ge 0 : \sigma\tau^j ||AP_C(x_n - \sigma\tau^j Ax_n) - Ax_n|| \le \theta ||P_C(x_n - \sigma\tau^j Ax_n) - x_n||\}, \\ \lambda_n = \sigma\tau^{j(n)}. \end{cases} \qquad (4)$$

Если $y_n = x_n$, то конец, иначе вычисляем $x_{n+1} = P_{T_n}(x_n - \lambda_n Ay_n)$, где $T_n = \{z \in H : (x_n - \lambda_n Ax_n - y_n, z - y_n) \le 0\}$.

**Замечание 2.** Алгоритм 1 — модификация рассмотренных в [27, 28] субградиентных экстраградиентных алгоритмов. Динамическая регулировка величины шага (4) описана в [22, 23].

Ясно, что если $y_n = x_n$, то $x_n$ принадлежит множеству $C$ и является решением вариационного неравенства. Действительно, равенство $x_n = P_C(x_n - \lambda_n Ax_n)$ равносильно неравенству

$$(x_n - x_n + \lambda_n Ax_n, y - x_n) \ge 0 \ \ \forall\, y \in C.$$

Покажем, что процедура (4) всегда выполняется за конечное число шагов.

**Лемма 3.** Правило (4) выбора параметра $\lambda_n$ корректно, т.е. $j(n) < +\infty$.

**Доказательство.** Пусть $x_n \in VI(A, C)$. Тогда $x_n = P_C(x_n - \sigma Ax_n)$ и $j(n) = 0$. Рассмотрим ситуацию $x_n \notin VI(A, C)$ и предположим, что для всех $j \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\sigma\tau^j ||AP_C(x_n - \sigma\tau^j Ax_n) - Ax_n|| > \theta ||P_C(x_n - \sigma\tau^j Ax_n) - x_n||.$$

Откуда

$$\lim_{j\to\infty} ||P_C(x_n - \sigma\tau^j Ax_n) - x_n|| = 0.$$

Из равномерной непрерывности оператора $A$ на ограниченных множествах следует $\lim\limits_{j\to\infty} ||AP_C(x_n - \sigma\tau^j Ax_n) - Ax_n|| = 0$.

Таким образом,

$$\lim_{j\to\infty} \frac{||P_C(x_n - \sigma\tau^j Ax_n) - x_n||}{\sigma\tau^j} = 0. \tag{5}$$

Положим $y_n^j = P_C(x_n - \sigma\tau^j Ax_n)$. Имеем

$$\left( \frac{y_n^j - x_n}{\sigma\tau^j}, x - y_n^j \right) + (Ax_n, x - y_n^j) \ge 0 \quad \forall x \in C. \tag{6}$$

Совершив предельный переход в (6) с учетом (5), получим $(Ax_n, x - x_n) \ge 0$ $\forall x \in C$, т.е. $x_n \in VI(A,C)$. Пришли к противоречию. ■

**Замечание 3.** При доказательстве леммы 3 не использовалась монотонность оператора $A$.

Перейдем к доказательству слабой сходимости алгоритма.

### СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ АЛГОРИТМА 1

Вначале докажем важное неравенство, связывающее расстояния от порожденных алгоритмом точек до множества $VI(A,C)$.

**Лемма 4.** Для последовательностей $(x_n)$, $(y_n)$, порожденных алгоритмом, имеет место неравенство

$$||x_{n+1} - z||^2 \le ||x_n - z||^2 - (1-\theta^2)||x_n - y_n||^2, \tag{7}$$

где $z \in VI(A,C)$.

**Доказательство.** Рассуждая аналогично работе [28, доказательство леммы 3], приходим к неравенству

$$||x_{n+1} - z||^2 \le ||x_n - z||^2 - ||x_n - y_n||^2 - ||y_n - x_{n+1}||^2 + \\ +2\lambda_n (Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n). \tag{8}$$

Слагаемое $2\lambda_n (Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n)$ в (8) оценим следующим образом:

$$2\lambda_n (Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n) \le 2\lambda_n ||Ax_n - Ay_n|| ||x_{n+1} - y_n|| \le \\ \le 2\theta ||x_n - y_n|| ||x_{n+1} - y_n|| \le \theta^2 ||x_n - y_n||^2 + ||x_{n+1} - y_n||^2. \tag{9}$$

Учитывая оценку (9) в (8), получаем желаемое неравенство (7). ■

**Замечание 4.** Оценив слагаемое $2\lambda_n (Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n)$ в (8) иначе, получим полезное неравенство

$$||x_{n+1} - z||^2 \le ||x_n - z||^2 - (1-\theta)||x_n - y_n||^2 - (1-\theta)||x_{n+1} - y_n||^2, \tag{10}$$

где $z \in VI(A,C)$.

Теперь сформулируем один из основных результатов работы.

**Теорема 1.** Последовательности $(x_n)$ и $(y_n)$, порожденные алгоритмом 1, слабо сходятся к некоторой точке $z \in VI(A,C)$.

**Доказательство.** Из неравенства (7) следует, что последовательность $(x_n)$ фейеровская относительно множества $VI(A,C)$, т.е.

$$||x_{n+1} - z|| \le ||x_n - z|| \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall z \in VI(A,C).$$

В частности, последовательность $(x_n)$ ограниченна.

Зафиксируем номер $N \in \mathbb{N}$ и рассмотрим неравенства (7) для всех номеров $1, 2, \ldots, N$. Сложив их, получим

$$||x_{n+1} - z||^2 \le ||x_1 - z||^2 - (1-\theta^2) \sum_{n=1}^{N} ||x_n - y_n||^2. \tag{11}$$

Из неравенства (11) следует сходимость числового ряда $\sum_n ||x_n - y_n||^2$. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - y_n|| = 0. \tag{12}$$

Рассмотрим подпоследовательность $(x_{n_k})$, слабо сходящуюся к некоторой точке $z \in H$. Тогда $y_{n_k} \to z$ слабо и $z \in C$. Покажем, что $z \in VI(A, C)$.

Возможны два варианта: 1) последовательность $(\lambda_{n_k})$ не стремится к нулю; 2) последовательность $(\lambda_{n_k})$ стремится к нулю.

Рассмотрим вариант 1. Можно считать, что $\lambda_{n_k} \ge \lambda$ для всех достаточно больших $k$ и некоторого $\lambda > 0$. Имеем $(y_{n_k} - x_{n_k} + \lambda_{n_k} Ax_{n_k}, x - y_{n_k}) \ge 0 \;\; \forall x \in C$. Откуда, использовав монотонность оператора $A$, выводим оценку

$$0 \le \frac{(y_{n_k} - x_{n_k} + \lambda_{n_k} Ax_{n_k}, x - y_{n_k})}{\lambda_{n_k}} = \frac{(y_{n_k} - x_{n_k}, x - y_{n_k})}{\lambda_{n_k}} +$$

$$+ (Ax_{n_k}, x_{n_k} - y_{n_k}) + (Ax_{n_k}, x - x_{n_k}) \le$$

$$\le \frac{(y_{n_k} - x_{n_k}, x - y_{n_k})}{\lambda_{n_k}} + (Ax_{n_k}, x_{n_k} - y_{n_k}) + (Ax, x - x_{n_k}).$$

Совершив предельный переход с учетом (12), получим $(Ax, x - z) \ge 0 \;\forall x \in C$. Следовательно, $z \in VI(A, C)$.

Рассмотрим вариант 2. Пусть $\lim_{k\to\infty} \lambda_{n_k} = 0$. Положим $z_{n_k} = P_C(x_{n_k} - \mu_{n_k} Ax_{n_k})$, где $\mu_{n_k} = \lambda_{n_k} \tau^{-1} = \sigma \tau^{j(n_k)-1} > \lambda_{n_k} > 0$. Применим лемму 2. Имеем $||x_{n_k} - z_{n_k}|| \le \le \frac{1}{\tau} ||x_{n_k} - y_{n_k}|| \to 0$.

В частности, последовательность $(z_{n_k})$ ограниченна и $z_{n_k} \to z$ слабо. Из равномерной непрерывности оператора $A$ на ограниченных множествах следует $|| Ax_{n_k} - Az_{n_k} || \to 0$, а из неравенства $\mu_{n_k} || Az_{n_k} - Ax_{n_k} || > \theta || z_{n_k} - x_{n_k} ||$ следует асимптотика

$$\frac{||x_{n_k} - z_{n_k}||}{\mu_{n_k}} \to 0. \tag{13}$$

Далее имеем $(z_{n_k} - x_{n_k} + \mu_{n_k} Ax_{n_k}, x - z_{n_k}) \ge 0 \;\; \forall x \in C$. Откуда выводим оценку

$$0 \le \frac{(z_{n_k} - x_{n_k}, x - z_{n_k})}{\mu_{n_k}} + (Ax_{n_k}, x_{n_k} - z_{n_k}) + (Ax, x - x_{n_k}).$$

Совершив предельный переход с учетом (13), получим $(Ax, x - z) \ge 0 \;\; \forall x \in C$, откуда $z \in VI(A, C)$.

Покажем теперь, что $x_n \to z$ слабо. Тогда из (12) следует, что $y_n \to z$ слабо. Рассуждаем от противного. Пусть существует подпоследовательность $(x_{m_k})$ такая, что $x_{m_k} \to z'$ слабо и $z \ne z'$. Ясно, что $z' \in VI(A, C)$. Применим дважды лемму 1. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - z|| = \underline{\lim}_{k\to\infty} ||x_{n_k} - z|| < \underline{\lim}_{k\to\infty} ||x_{n_k} - z'|| = \lim_{n\to\infty} ||x_n - z'|| =$$

$$= \underline{\lim}_{k\to\infty} ||x_{m_k} - z'|| < \underline{\lim}_{k\to\infty} ||x_{m_k} - z|| = \lim_{n\to\infty} ||x_n - z||,$$

что невозможно. Таким образом, $z = z'$. ■

**Замечание 5.** Слабый предел $z \in VI(A, C)$ порожденной алгоритмом 1 фейеровской последовательности $(x_n)$ имеет свойство $P_{VI(A,C)} x_n \to z$ сильно [7]. Если множество $VI(A, C)$ является аффинным многообразием, то $x_n \to \to P_{VI(A,C)} x_0$ сильно [7].

**Замечание 6.** Асимптотику (12) можно уточнить до следующей:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}||x_n - y_n|| = 0. \tag{14}$$

Действительно, если (14) не выполняется, то $||x_n - y_n|| \geq \mu n^{-1/2}$ для некоторого $\mu > 0$ и всех достаточно больших номеров *n*. Следовательно, ряд $\sum_n ||x_n - y_n||^2$ расходится. Получили противоречие.

### ВАРИАНТ АЛГОРИТМА 1 ДЛЯ ВАРИАЦИОННОГО НЕРАВЕНСТВА С АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Рассмотрим вариант метода для поиска решения вариационного неравенства (1), являющегося неподвижной точкой заданного оператора.

Пусть $S: H \to H$ — квазинерастягивающий оператор такой, что $I - S$ — демизамкнутый в нуле оператор с множеством неподвижных точек $F(S) = \{x \in H : Sx = x\}$. Предположим, что $VI(A, C) \cap F(S) \neq \varnothing$.

**Замечание 7.** Пусть $g: H \to \mathbb{R}$ — выпуклая дифференцируемая функция. Если множество $D = \{x \in H: \ g(x) \leq 0\} \neq \varnothing$, то его можно трактовать как множество неподвижных точек квазинерастягивающего оператора

$$Sx = \begin{cases} x - \dfrac{g(x)}{||g'(x)||^2} g'(x), & \text{если } x \notin D, \\ x, & \text{если } x \in D, \end{cases}$$

где $g'(x) \in H$ — производная $g$ в точке $x \in H$ [35]. Для демизамкнутости в нуле оператора $I - S$ достаточно ограниченности $g$ на любом ограниченном множестве [35].

Для поиска элементов множества $VI(A, C) \cap F(S)$ рассмотрим следующий алгоритм.

**Алгоритм 2**

**Инициализация.** Задаем числовые параметры $\sigma > 0$, $\tau \in (0,1)$, $\theta \in (0,1)$, элемент $x_0 \in H$ и последовательность $(\delta_n) \subseteq [a, b] \subseteq (0,1)$.

**Итерационный шаг.** Для $x_n \in H$ вычисляем $y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n)$, где $\lambda_n$ получаем из условия

$$\begin{cases} j(n) = \min\{j \geq 0 : \sigma\tau^j ||AP_C(x_n - \sigma\tau^j Ax_n) - Ax_n|| \leq \theta ||P_C(x_n - \sigma\tau^j Ax_n) - x_n||\}, \\ \lambda_n = \sigma\tau^{j(n)}. \end{cases}$$

Вычисляем $x_{n+1} = \delta_n x_n + (1 - \delta_n) SP_{T_n}(x_n - \lambda_n Ay_n)$, где $T_n = \{z \in H: (x_n - \lambda_n Ax_n - y_n, z - y_n) \leq 0\}$.

**Замечание 8.** В работе [27] предложен метод поиска элементов множества $VI(A, C) \cap F(S)$ для нерастягивающего оператора $S$ и липшицевого монотонного оператора $A$ с постоянным шагом $\lambda \in (0{,}1/L)$, где $L > 0$ — постоянная Липшица оператора $A$. Алгоритм 2 — модификация этого метода с динамической регулировкой величины шага.

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.** Последовательности $(x_n)$ и $(y_n)$, порожденные алгоритмом 2, слабо сходятся к некоторой точке $z \in VI(A, C) \cap F(S)$.

**Доказательство.** Положим $z_n = P_{T_n}(x_n - \lambda_n Ay_n)$. Поскольку оператор $S$ квазинерастягивающий, для всех $z \in VI(A, C) \cap F(S)$ получаем

$$||x_{n+1} - z||^2 \leq ||\delta_n(x_n - z) + (1 - \delta_n)(Sz_n - z)||^2 =$$

$$= \delta_n ||x_n - z||^2 + (1 - \delta_n)||Sz_n - z||^2 - \delta_n(1 - \delta_n)||x_n - Sz_n||^2 \leq$$

$$\leq \delta_n ||x_n - z||^2 + (1 - \delta_n)||z_n - z||^2 - \delta_n(1 - \delta_n)||x_n - Sz_n||^2. \tag{15}$$

Используя (10) в (15) для оценки слагаемого $(1-\delta_n)||z_n - z||^2$, получаем неравенство

$$||x_{n+1} - z||^2 \le ||x_n - z||^2 - (1-\delta_n)(1-\theta)||x_n - y_n||^2 -$$
$$-(1-\delta_n)(1-\theta)||z_n - y_n||^2 - \delta_n(1-\delta_n)||x_n - Sz_n||^2. \qquad (16)$$

Из неравенства (16) следует, что последовательность $(x_n)$ фейеровская относительно множества $VI(A,C) \cap F(S)$, т.е.

$$||x_{n+1} - z|| \le ||x_n - z|| \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, z \in VI(A,C) \cap F(S).$$

В частности, последовательность $(x_n)$ ограниченна. Кроме того, имеют место неравенства

$$||x_n - y_n||^2 + ||z_n - y_n||^2 \le \frac{||x_n - z||^2 - ||x_{n+1} - z||^2}{(1-\delta_n)(1-\theta)},$$
$$||x_n - Sz_n||^2 \le \frac{||x_n - z||^2 - ||x_{n+1} - z||^2}{\delta_n(1-\delta_n)}.$$

Откуда следует

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - y_n|| = \lim_{n\to\infty} ||z_n - y_n|| = \lim_{n\to\infty} ||x_n - Sz_n|| = 0. \qquad (17)$$

Рассмотрим подпоследовательность $(x_{n_k})$, слабо сходящуюся к некоторой точке $z \in H$. Тогда $(y_{n_k})$, $(z_{n_k})$ слабо сходятся к $z$ и $z \in C$. Рассуждая аналогично доказательству теоремы 1, получаем, что $z \in VI(A,C)$. Осталось показать, что $z \in F(S)$. Поскольку

$$||z_n - Sz_n|| \le ||z_n - y_n|| + ||y_n - x_n|| + ||x_n - Sz_n||,$$

из (17) следует $\lim_{n\to\infty} ||z_n - Sz_n|| = 0$.

Оператор $I - S$ демизамкнутый в нуле. Следовательно, из $z_{n_k} \to z$ слабо и $\lim_{k\to\infty} ||z_{n_k} - Sz_{n_k}|| = 0$ получаем, что $z \in F(S)$.

Аналогично доказательству теоремы 1 показываем, что $x_n \to z$ слабо. Тогда из (17) следует, что $y_n \to z$ слабо. ■

Рассмотрим теперь операторное уравнение с априорной информацией, заданной в виде множества неподвижных точек квазинерастягивающего оператора $T: H \to H$:

$$Ax = f,\ x \in F(T), \qquad (18)$$

где $f \in H$. Подобные задачи рассмотрены в [35].

Алгоритм 2 для задачи (18) принимает следующий вид.

**Алгоритм 3**

**Инициализация.** Задаем числовые параметры $\sigma > 0$, $\tau \in (0,1)$, $\theta \in (0,1)$, элемент $x_0 \in H$ и последовательность $(\delta_n) \subseteq [a,b] \subseteq (0,1)$.

**Итерационный шаг.** Для $x_n \in H$ вычисляем $y_n = x_n - \lambda_n(Ax_n - f)$, где $\lambda_n$ получаем из условия

$$\begin{cases} j(n) = \min\{j \ge 0 : ||A(x_n - \sigma\tau^j(Ax_n - f)) - Ax_n|| \le \theta ||Ax_n||\}, \\ \lambda_n = \sigma\tau^{j(n)}. \end{cases}$$

Вычисляем

$$z_n = x_n - \lambda_n(Ay_n - f),$$
$$x_{n+1} = \delta_n x_n + (1-\delta_n)Tz_n.$$

Частным случаем теоремы 2 является следующий результат.

**Теорема 3.** Пусть оператор $A: H \to H$ монотонный, равномерно непрерывный на ограниченных множествах и отображающий ограниченные множества в ограниченные. Пусть оператор $T: H \to H$ квазинерастягивающий, причем оператор $I-T$ демизамкнутый в нуле. Предположим, что $VI(A,C)\cap F(T)\neq\varnothing$ для $f\in H$. Тогда последовательности $(x_n)$, $(y_n)$ и $(z_n)$, порожденные алгоритмом 3, слабо сходятся к некоторой точке $z\in A^{-1}f\cap F(T)$.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен модифицированный экстраградиентный метод с динамической регулировкой величины шага для решения вариационных неравенств с монотонными операторами, действующими в гильбертовом пространстве. Относительно операторов не предполагается их липшицевость. Также рассмотрен вариант метода для поиска решения вариационного неравенства с априорной информацией, описанной в виде включения в множество неподвижных точек квазинерастягивающего оператора. Основной теоретический результат — теоремы о слабой сходимости методов. Сильно сходящиеся варианты предложенных методов можно получить, используя метод итеративной регуляризации [5, 16, 29] или гибридный метод из [37].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. — М.: Мир, 1983. — 256 с.
2. Байокки К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. — М.: Наука, 1988. — 448 с.
3. Nagurney A. Network economics: A variational inequality approach. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. — 325 p.
4. Семенов В.В., Семенова Н.В. О задаче векторного управления в гильбертовом пространстве // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 2. — С. 117–130.
5. Бакушинский А. Б., Гончарский А. В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. — М.: Изд-во МГУ, 1989. — 200 с.
6. Facchinei F., Pang J.-S. Finite-dimensional variational inequalities and complementarily problem. V. 2. — New York: Springer, 2003. — 666 p.
7. Bauschke H.H., Combettes P.L. Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces. — Berlin; Heidelberg; New York: Spinger, 2011. — 408 p.
8. Konnov I.V. Combined relaxation methods for variational inequalities. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 2001. — 181 p.
9. Панин В.М., Скопецкий В.В., Лаврина Т.В. Модели и методы конечномерных вариационных неравенств // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 6. — С. 47–64.
10. Xiu N., Zhang J. Some recent advances in projection-type methods for variational inequalities // J. Comput. Appl. Math. — 2003. — **152.** — P. 559–585.
11. Nesterov Yu. Dual extrapolation and its applications to solving variational inequalities and related problems // Mathematical Programming. — 2007. — **109**, Iss. 2–3. — P. 319–344.
12. Нурминский Е.А. Использование дополнительных малых воздействий в фейеровских моделях итеративных алгоритмов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2008. — **48**, № 12. — С. 2121–2128.
13. Семенов В.В. О методе параллельной проксимальной декомпозиции для решения задач выпуклой оптимизации // Проблемы управления и информатики. — 2010. — № 2. — С. 42–46.
14. Семенов В.В. О сходимости методов решения двухуровневых вариационных неравенств с монотонными операторами // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2010. — № 2 (101). — С. 120–128.
15. Войтова Т.А., Семенов В.В. Метод решения двухэтапных операторных включений // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2010. — № 3 (102). — С. 34–39.
16. Маліцький Ю.В., Семенов В.В. Нові теореми сильної збіжності проксимального методу для задачі рівноважного програмування // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2010. — № 3 (102). — С. 79–88.
17. Денисов С.В., Семенов В.В. Проксимальний алгоритм для дворівневих варіаційних нерівностей: сильна збіжність // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2011. — № 3 (106). — С. 27–32.

18. Семенов В.В. Параллельная декомпозиция вариационных неравенств с монотонными операторами // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2012. — № 2 (108). — С. 53–58.

19. Малицкий Ю.В., Семенов В.В. Схема внешних аппроксимаций для вариационных неравенств на множестве неподвижных точек фейеровских операторов // Доповіді НАН України. — 2013. — № 7. — С. 47–52.

20. Semenov V.V. Strongly convergent algorithms for variational inequality problem over the set of solutions the equilibrium problems // M.Z. Zgurovsky and V.A. Sadovnichiy (eds.), Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications, — Springer International Publishing Switzerland. — 2014. — **211.** — P. 131–146.

21. Корпелевич Г.М. Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач // Экономика и математические методы. — 1976. — **12**, № 4. — С. 747–756.

22. Хоботов Е.Н. О модификации экстраградиентного метода для решения вариационных неравенств и некоторых задач оптимизации // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1987. — **27**, № 10. — С. 1462–1473.

23. Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings // SIAM J. Control Optim. — 2000. — **38**. — P. 431–446.

24. Nadezhkina N., Takahashi W. Strong convergence theorem by a hybrid method for nonexpansive mappings and Lipschitz-continuous monotone mappings // SIAM J. Optim. — 2006. — **16**, N 4. — P. 1230-1241.

25. Nadezhkina N., Takahashi W. Weak convergence theorem by an extragradient method for nonexpansive mappings and monotone mappings // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2006. — **128.** — P. 191–201.

26. Войтова Т.А., Денисов С.В., Семенов В.В. Сильно збіжний модифікований варіант методу Корпелевич для задач рівноважного програмування // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2011. — № 1 (104). — С. 10–23.

27. Censor Y., Gibali A., Reich S. The subgradient extragradient method for solving variational inequalities in Hilbert space // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2011. — **148.** — P. 318–335.

28. Ляшко С.И., Семенов В.В., Войтова Т.А. Экономичная модификация метода Корпелевич для монотонных задач о равновесии // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 4. — С. 146–154.

29. Апостол Р.Я., Гриненко А.А., Семенов В.В. Ітераційні алгоритми для монотонних дворівневих варіаційних нерівностей // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2012. — № 1 (107). — С. 3–14.

30. Запорожец Д.Н., Зыкина А.В., Меленьчук Н.В. Сравнительный анализ экстраградиентных методов решения вариационных неравенств для некоторых задач // Автомататика и телемеханика. — 2012. — № 4. — С. 32–46.

31. Малицкий Ю.В., Семенов В.В. Вариант экстраградиентного алгоритма для монотонных вариационных неравенств // Кибернетика и системный анализ. — 2014. — № 2. — С. 125–131.

32. Семенов В.В. Сильно сходящийся метод расщепления для системы операторных включений с монотонными операторами // Проблемы управления и информатики. — 2014. — № 3. — С. 22–32.

33. Семенов В.В. Гибридные методы расщепления для системы операторных включений с монотонными операторами // Кибернетика и системный анализ. — 2014. — № 5. — С. 104–112.

34. Malitsky Yu.V., Semenov V.V. A hybrid method without extrapolation step for solving variational inequality problems // Journal of Global Optimization. — 2015. — **61**, Iss. 1. — P. 193–202.

35. Васин В.В., Еремин И.И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. (Теория и приложения). — Москва; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. — 200 с.

36. Opial Z. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings // Bull. Amer. Math. Soc. — 1967. — **73.** — P. 591–597.

37. Nakajo K., Takahashi W. Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups // J. Math. Anal. Appl. — 2003. — **279.** — P. 372–379.

*Поступила 06.02.2015*