

**АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ С СЕРВЕРОМ
НА «ПРОГУЛКЕ» И СКОРОПОРТЯЩИМИСЯ ЗАПАСАМИ**

Аннотация. Предложена модель системы обслуживания-запасания с сервером на «прогулке» и скоропортящимися запасами, в которой время обслуживания заявок — положительная случайная величина. Сервер уходит на прогулку в случае отсутствия запасов и/или очереди заявок. По окончании прогулки он немедленно начинает обслуживание заявок при наличии запасов; иначе сервер возвращается в режим ожидания. Заявки в очереди являются «нетерпеливыми», и пополнение запаса осуществляется согласно политике двух уровней. Разработан метод асимптотического анализа системы. Приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: система обслуживания-запасания, «прогулка» сервера, политика двух уровней, скоропортящиеся запасы.

ВВЕДЕНИЕ

В большинстве работ по изучению моделей систем обслуживания-запасания (Queueing-Inventory Systems, QIS) предполагается, что запасы в них долговечны, т.е. никогда не портятся. Однако во многих QIS время пригодности запасов — конечная случайная величина (с.в.). Они называются системами обслуживания-запасания со скоропортящимися продуктами (Perishable Queueing-Inventory System, PQIS). Примерами таких систем являются банки крови, системы обработки устаревшей информации, обеспечения продуктами питания и т.д. Обзор известных работ, посвященных рассмотрению моделей PQIS, приведен в [1–3].

В некоторых QIS по завершении обслуживания очередной заявки сервер в случае отсутствия очереди или запасов «уходит» из системы. Это объясняется тем, что такая схема обслуживания выгоднее с экономической точки зрения по сравнению с классическими схемами, поскольку часто нет необходимости «содержать» сервер, который можно использовать для выполнения других работ. В классической теории систем массового обслуживания такие модели называются моделями с сервером на «прогулке», и они достаточно подробно изучены [4–6]. Вместе с тем модели QIS с сервером в таком режиме мало исследованы. В доступной литературе известны работы [7–15], посвященные этим моделям. Рассмотрим кратко полученные в них результаты.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Впервые модель PQIS с сервером в режиме «прогулки» исследовалась в статье [7], в которой предполагается, что сервер уходит на прогулку, т.е. прерывает обслуживание, только тогда, когда уровень запасов равен нулю. При этом заявки, поступившие в период отсутствия запасов, теряются. С использованием методов теории восстановления найдены вероятности переходов между состояниями модели.

Достаточно сложная модель QIS с долговечными запасами изучена в работе [8]. В ней поток заявок представляет собой марковский процесс поступления (MAP-поток), времена прогулки сервера и выполнения заказа — независимые с.в., каждая из которых имеет функцию распределения (ф.р.) фазового типа. Если после завершения прогулки сервера в системе отсутствуют заявки и/или запасы, то он мгновенно уходит на следующую прогулку (многократная прогулка); иначе сервер становится доступным для обслуживания заявок. В системе исполь-

зуется (s, S) -политика пополнения запасов, т.е. когда уровень запасов в ней становится меньшим или равным некоторой пороговой величине s (она также называется точкой заказа), отправляется заказ на основной склад на поставку запасов объемом $S - s$, где S — размер склада системы. Состояние системы описывается шестимерной цепью Маркова (Six Dimensional Markov Chain, 6-D MC). В работе найдено условие существования стационарного режима в этой цепи и разработана вычислительная процедура для нахождения стационарных вероятностей состояний системы, через которые определяются ее характеристики.

Модель PQIS с (s, S) -политикой пополнения запасов и повторными заявками изучена в [9], где предполагается, что обслуживание заявки осуществляется мгновенно и сервер уходит на прогулку лишь при нулевом уровне запасов системы. Все с.в., использованные в формулировке модели, имеют ф.р. показательного вида. С учетом этого факта состояние системы описывается 3-D MC; в работе найдены условия существования стационарного режима в этой цепи. Подобная модель PQIS с ограниченным буфером для ожидания заявок рассмотрена в [10]. Однако в отличие от [9] в ней предполагается, что время обслуживания заявок является положительной с.в. с показательной ф.р. Другая особенность данной системы состоит в том, что обслуживание заявок прекращается, если уровень запасов опускается ниже точки заказа s . Состояние системы описывается 4-D MC; разработан алгоритм вычисления стационарных вероятностей состояний, а также найдены ее стоимостные характеристики.

В работе [11] изучена модель PQIS с нулевым временем пополнения запасов и положительным временем обслуживания, при этом используется $(0, S)$ -политика пополнения запасов. В отличие от работ [7–10] предполагается, что сервер уходит на многократную прогулку, если по завершении обслуживания заявки очередь оказывается пустой. Заявки могут образовать очередь конечной длины, при этом они являются «нетерпеливыми». В [12] исследована более сложная модель QIS с долговечными запасами, положительным временем выполнения заказа и повторными заявками. Используется (s, S) -политика пополнения запасов и предполагается, что сервер уходит на многократную рабочую прогулку (Working Vacations), если по окончании обслуживания заявки очередь пустая и/или уровень запасов нулевой (в отличие от классической схемы прогулки сервер, находясь на рабочей прогулке, может обслуживать заявки, но с меньшей интенсивностью, чем в обычном режиме [16, 17]). Аналогичная [12] модель рассмотрена в работе [13]. Но в отличие от [12] в ней предполагается, что сервер ненадежен, при этом его отказы образуют пуассоновский поток и время восстановления имеет показательную ф.р. Кроме того, после завершения периода прогулки сервер начинает обслуживание заявок только тогда, когда их количество в очереди превышает некоторое пороговое значение. Разработан алгоритм расчета стационарного распределения 4-D MC, описывающего функционирование системы.

Модель PQIS с (s, S) -политикой пополнения запасов, повторными заявками и двумя разнотипными серверами изучена в работе [14], в которой предполагается, что один из них всегда доступен, а другой может уходить на прогулку, если уровень запасов оказывается меньшим или равным единице. Времена обслуживания заявок, выполнения заказа и жизни запасов — независимые положительные с.в. с показательными ф.р. Разработан алгоритм расчета стационарного распределения соответствующего 4-D MC и вычислены стоимостные характеристики системы.

В работе [15] рассмотрены два типа моделей QIS с повторными заявками, отличающиеся схемой ухода сервера на прогулку. Вводится новая схема: когда склад системы полностью освобождается, начинается период простоя сервера. Если в это время запасы пополняются, то он становится доступным; иначе уходит на прогулку. Если по окончании прогулки в системе имеются запасы, то сервер становится доступным, в противном случае он уходит на следующую прогулку. Эта схема называется модифицированной многократной прогулкой сервера. В другой схеме, когда склад системы освобождается, сервер уходит на прогулку,

а по ее завершении становится доступным независимо от того, выполнен заказ или нет. Эта схема называется одинарной прогулкой сервера. Для обеих схем прогулки сервера найдены стационарные распределения соответствующих 3-D MC, вычислены операционные и стоимостные характеристики системы.

Отметим, что в работах [7–15] используются различные модификации матрично-геометрического метода Ньютона [18] для расчета стационарных вероятностей состояний соответствующих многомерных цепей Маркова, т.е. разработанные алгоритмы требуют многократного вычисления обратных матриц большой размерности. Как отмечают авторы указанных работ, эти алгоритмы чрезвычайно трудны для практической реализации из-за вычислительной нестабильности вследствие плохой обусловленности используемых матриц большой размерности.

Кроме того, в [7–15] предполагается, что интенсивности потери заявок из-за их нетерпеливости, а также время выполнения заказа — постоянные величины. Однако очевидно, что они существенно зависят от статуса сервера, а также длины очереди заявок. Поэтому в настоящей статье предложена модель PQIS с сервером на прогулке, учитывающая эти моменты и более адекватно описывающая работу реальных систем. Для расчета характеристик модели разработан эффективный численный метод, основанный на иерархическом укрупнении состояний 3-D MC [19]. Ранее метод укрупнения состояний 2-D MC использовался для анализа моделей QIS и PQIS с «неподвижным» сервером соответственно в работах [20, 21].

ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ PQIS С СЕРВЕРОМ НА ПРОГУЛКЕ

Система имеет склад ограниченного объема и содержит один сервер для обслуживания заявок. Если по завершении работы сервера в системе имеется хотя бы одна заявка, то она немедленно выбирается для обслуживания; иначе сервер уходит на прогулку, длительность которой является с.в., имеющей показательную ф.р. Он также переходит в состояние ожидания с тем же параметром, если в момент завершения обслуживания заявки уровень запасов системы равен нулю. По окончании прогулки сервер мгновенно приступает к обслуживанию очередной заявки, если в этот момент в системе имеются запасы; иначе, т.е. если в этот момент в системе нет запасов и/или в очереди нет хотя бы одной заявки, он снова уходит на прогулку, длительность которой имеет то же распределение.

Входящий поток заявок является пуассоновским, при этом поступившие заявки независимо от состояния сервера принимаются в очередь и обслуживаются в порядке их поступления. Времена обслуживания заявок — независимые и одинаково распределенные с.в. с общей показательной ф.р. Заявки являются нетерпеливыми лишь во время их ожидания в очереди, т.е. заявка, которая находится в сервере, абсолютно терпеливая. Допустимые времена ожидания заявок в очереди — независимые и одинаково распределенные с.в., имеющие показательную ф.р.; при этом их средние значения зависят от статуса сервера.

Для простоты изложения предположим, что каждая заявка требует запас единичного размера, иными словами, после завершения обслуживания заявки уровень запасов на складе уменьшается на единицу. Каждая единица запаса независимо от остальных становится непригодной для использования после случайного времени, которое имеет показательную ф.р. При этом предполагается, что запас, который уже находится на этапе выдачи по заявке, не может испортиться.

Пополнение запасами выполняется с некоторой задержкой и осуществляется согласно политике двух уровней. Для исключения повторных заказов принимается, что точка заказа меньше половины общего объема склада. Время выполнения заказа — положительная с.в. с показательной ф.р.; его среднее значение зависит от статуса сервера.

Рассматривается модель PQIS с конечной очередью, т.е. поступившая заявка теряется с вероятностью единица, если в этот момент система полностью заполнена.

Задача состоит в определении совместного распределения уровня запасов системы, числа заявок в ней и статуса сервера. Ее решение позволит вычислить

усредненные характеристики изучаемой системы: средний уровень запасов на складе (S_{av}); среднюю интенсивность порчи запасов системы (Γ_{av}); вероятность пребывания сервера на прогулке (P_{vac}); вероятность потери заявок (PL); среднюю интенсивность потери заявок из очереди вследствие их нетерпеливости (RL_{av}).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ PQIS С СЕРВЕРОМ НА ПРОГУЛКЕ

Введем следующие обозначения: λ — интенсивность входящего потока заявок; μ — интенсивность обслуживания заявок; α_0 — интенсивность потери заявок из очереди вследствие их нетерпеливости, когда сервер находится на прогулке; α_1 — интенсивность потери заявок из очереди вследствие их нетерпеливости, когда сервер находится в рабочем режиме; β — интенсивность возвращения сервера из режима прогулки; γ — интенсивность порчи запасов; ν_0 — интенсивность поступления запасов, когда сервер находится на прогулке; ν_1 — интенсивность поступления запасов, когда сервер находится в рабочем режиме; N — максимальная вместимость системы, включая заявки в сервере; S — максимальный размер склада системы; s — точка заказа, $s < S/2$.

Исходя из вида законов распределения с.в., использованных в формулировке модели, определяем, что работа системы в произвольный момент времени описывается 3-D MC. Состояние данной цепи задается вектором $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, где первая и вторая компонента соответственно текущий уровень запасов и число заявок в системе, а третья бинарная компонента означает статус сервера, т.е.

$$n_3 = \begin{cases} 0, & \text{если сервер находится на прогулке,} \\ 1, & \text{если сервер находится в рабочем состоянии.} \end{cases}$$

Фазовое пространство состояний (ФПС) изучаемой 3-D MC обозначим E . Оно определяется таким образом:

$$E = E_0 \cup E_1, \quad E_0 \cap E_1 = \emptyset, \quad (1)$$

где $E_0 = \{\mathbf{n} : n_1 = 0, 1, \dots, S; n_2 = 0, 1, \dots, N; n_3 = 0\}$, $E_1 = \{\mathbf{n} : n_1 = 1, \dots, S; n_2 = 1, 2, \dots, N; n_3 = 1\}$.

Из формулы (1) следует, что геометрически ФПС модели задается точками с целочисленными координатами, принадлежащими параллелепипеду высотой единица, основанием которого является прямоугольник со сторонами длиной N и S .

Интенсивность перехода из состояния \mathbf{n} в состояние \mathbf{n}' обозначим $q(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$, $\mathbf{n}, \mathbf{n}' \in E$. Совокупность этих величин составляет производящую матрицу (Q-матрицу) данной 3-D MC. Из описания системы видно, что переходы между состояниями ФПС E связаны со следующими событиями: 1) поступлением заявок; 2) завершением процесса их обслуживания; 3) уходом заявок из очереди вследствие их нетерпеливости; 4) завершением времени жизни запасов; 5) поступлением запасов; 6) уходом сервера на прогулку; 7) возвращением сервера из режима прогулки.

С учетом законов изменения уровня запасов, числа заявок в системе и поведения сервера искомые элементы Q-матрицы определяем из следующих соотношений:

$$q(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \begin{cases} \lambda, & \text{если } \mathbf{n}' = \mathbf{n} + \mathbf{e}_2, \\ \mu, & \text{если } \mathbf{n} \in E_1, n_1 > 1, n_2 > 1, \mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ & \text{или } n_1 = 1 \text{ или } n_2 = 1, \mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \\ \beta, & \text{если } \mathbf{n} \in E_0, n_1 > 0, n_2 > 0, \mathbf{n}' = \mathbf{n} + \mathbf{e}_3, \\ n_1\gamma, & \text{если } \mathbf{n} \in E_0, \mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{e}_1, \\ (n_1 - 1)\gamma, & \text{если } \mathbf{n} \in E_1, n_1 > 1, \mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{e}_1, \\ n_2\alpha_0, & \text{если } \mathbf{n} \in E_0, \mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{e}_2, \\ (n_2 - 1)\alpha_1, & \text{если } \mathbf{n} \in E_1, n_1 > 0, n_2 > 1, \mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{e}_2, \\ \nu_0, & \text{если } \mathbf{n} \in E_0, n_1 \leq s, \mathbf{n}' = \mathbf{n} + (S - s)\mathbf{e}_1, \\ \nu_1, & \text{если } \mathbf{n} \in E_1, n_1 \leq s, \mathbf{n}' = \mathbf{n} + (S - s)\mathbf{e}_1, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (2)$$

Здесь e_i означает i -й ортвектор трехмерного евклидова пространства, $i = 1, 2, 3$.

Таким образом, математической моделью данной PQIS со ждущим сервером является трехмерная цепь Маркова с ФПС (1) и производящей матрицей (2). Данная 3-D МС имеет стационарное распределение при любых положительных значениях параметров системы, поскольку она конечномерна и неприводима.

Рассмотрим задачу определения характеристик изучаемой системы. Пусть $p(\mathbf{n})$ — стационарная вероятность состояния $\mathbf{n} \in E$. Эти величины удовлетворяют соответствующей системе уравнений равновесия (СУР), которая составляется на основе соотношений (2). Явный вид этой СУР здесь не приводится из-за громоздкости и очевидности составления.

Характеристики системы определяются через вероятности состояний описанной трехмерной цепи Маркова. Так, средний уровень запасов на складе вычисляется как математическое ожидание соответствующей с.в., т.е.

$$S_{av} = \sum_{k=1}^S k \sum_{\mathbf{n} \in E} p(\mathbf{n}) \delta(n_1, k), \quad (3)$$

где $\delta(i, j)$ — символы Кронекера.

Поскольку запас, который находится на этапе выдачи по заявке, не может испортиться, имеем

$$\Gamma_{av} = \gamma \left(\sum_{k=1}^S k \sum_{\mathbf{n} \in E_0} p(\mathbf{n}) \delta(n_1, k) + \sum_{k=2}^S (k-1) \sum_{\mathbf{n} \in E_1} p(\mathbf{n}) \delta(n_1, k) \right). \quad (4)$$

Вероятность пребывания сервера в режиме прогулки вычисляется следующим образом:

$$P_{vac} = \sum_{\mathbf{n} \in E_0} p(\mathbf{n}). \quad (5)$$

Вероятность потери заявок состоит из двух слагаемых: вероятности потери заявок, когда сервер находится на прогулке (PL_v), и вероятности потери заявок, когда сервер находится в рабочем состоянии (PL_s). Эти слагаемые определяются так:

$$PL_v = \sum_{\mathbf{n} \in E_0} p(\mathbf{n}) (\delta(n_2, N) + (1 - \delta(n_2, N)) P_0(n_1, n_2)), \quad (6)$$

где $P_0(n_1, n_2)$ — вероятность того, что в состоянии $(n_1, n_2, 0)$ заявка теряется из-за нетерпеливости;

$$PL_s = \sum_{\mathbf{n} \in E_1} p(\mathbf{n}) (\delta(n_2, N) + (1 - \delta(n_2, N)) P_1(n_1, n_2)), \quad (7)$$

где $P_1(n_1, n_2)$ — вероятность того, что в состоянии $(n_1, n_2, 1)$ заявка также теряется из-за нетерпеливости.

Величины $P_k(n_1, n_2)$, $k = 0, 1$, в формулах (6) и (7) вычисляются следующим образом:

$$P_0(n_1, n_2) = \frac{n_2 \alpha_0}{n_2 \alpha_0 + \lambda I(n_2 < N) + n_1 \gamma},$$

$$P_1(n_1, n_2) = \frac{n_2 \alpha_1}{n_2 \alpha_1 + \lambda I(n_2 < N) + (n_1 - 1) \gamma + \mu},$$

где $I(A)$ — индикаторная функция события A .

Средняя интенсивность потери заявок из очереди вследствие их нетерпеливости определяется так:

$$RL_{av} = \alpha_0 L_v + \alpha_1 L_s, \quad (8)$$

где L_v и L_s — среднее число заявок в очереди, когда сервер находится на прогулке и в рабочем состоянии соответственно, т.е.

$$L_v = \sum_{k=1}^N k \sum_{\mathbf{n} \in E_0} p(\mathbf{n}) \delta(n_2, k), \quad L_s = \sum_{k=2}^N (k-1) \sum_{\mathbf{n} \in E_1} p(\mathbf{n}) \delta(n_2, k).$$

Вследствие сложной структуры Q-матрицы (2) не удалось найти аналитического решения СУР для вероятностей состояний системы. В связи с этим для вычисления вероятностей состояний системы следует использовать либо стандартные численные методы линейной алгебры, либо разработать алгоритмы на базе матрично-геометрического подхода. Однако, как было отмечено в начале статьи, указанные методы нестабильны при больших размерностях системы уравнений равновесия. Далее приводится альтернативный метод решения данной проблемы.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ

Предлагается иерархический алгоритм фазового укрупнения (ИАФУ) для расчета стационарного распределения изучаемой 3-D МС большой размерности, поскольку считается, что объем склада системы и размер буфера достаточно большие величины. Такой алгоритм можно использовать при выполнении некоторых асимптотических условий. Для корректного применения метода предполагается, что система работает в условиях большой нагрузки, при этом интенсивность поступления заявок существенно превосходит интенсивность ухода сервера на прогулку (последнее допущение соответствует реальному условию работы QIS (см., например, [10]).

В силу этого допущения получаем, что интенсивности переходов между состояниями, которые находятся в одной из двух плоскостей, параллельных основанию параллелепипеда, намного превышают интенсивности переходов между состояниями из разных таких плоскостей, т.е. на первом уровне иерархии рассматривается расслоение ФПС модели по плоскостям, параллельным основанию параллелепипеда.

Функция укрупнения, вводимая на первом уровне иерархии, определяется следующим образом:

$$U(\mathbf{n}) = \langle n_3 \rangle, \text{ если } \mathbf{n} \in E_{n_3}, \quad (9)$$

где $\langle n_3 \rangle$ — укрупненное состояние, включающее все состояния из класса E_{n_3} , $n_3 = 0, 1$. Обозначим $\Omega = \{\langle n_3 \rangle : n_3 = 0, 1\}$.

Вероятности состояний исходной модели определяются таким образом:

$$p(\mathbf{n}) \approx \rho_{n_3}(n_1, n_2) \pi(\langle n_3 \rangle), \quad (10)$$

где $\rho_{n_3}(n_1, n_2)$ — вероятность состояния (n_1, n_2) внутри расщепленной модели с пространством состояний E_{n_3} , $\pi(\langle n_3 \rangle)$ — вероятность укрупненного состояния $\langle n_3 \rangle \in \Omega$.

Из формулы (10) следует, что для расчета стационарного распределения исходной 3-D МС потребуется найти распределения вероятностей состояний двух 2-D МС и одной 1-D МС с двумя состояниями. При большой размерности буфера для ожидания заявок и/или объема склада системы аналогичные вычислительные трудности возникают и при расчете стационарных распределений указанных 2-D МС с пространствами состояний E_k , $k = 0, 1$. Поэтому для расчета стационарных распределений внутри классов E_k , $k = 0, 1$, к каждому классу применяется АФУ (второй уровень иерархии), и таким образом формируется иерархия укрупненных моделей.

Сначала рассмотрим расщепленную модель с пространством состояний E_0 . Для корректного применения метода предполагается, что интенсивность поступления заявок существенно превосходит интенсивность порчи запасов системы (это допущение также соответствует реальному режиму работы PQIS (см., например, [10]).

При выполнении указанного допущения в пространстве состояний E_0 рассматривается разбиение

$$E_0 = \bigcup_{i=1}^S E_0^i, \quad E_0^i \cap E_0^j = \emptyset, \text{ если } i \neq j, \quad (11)$$

где $E_0^i = \{(n_1, n_2) \in E_0 : n_1 = i\}$, $i = 1, \dots, S$, т.е. класс состояний E_0^i включает те состояния, в которых уровень запасов системы равен i независимо от числа зая-

вок в очереди. Далее на основе расщепления (11) в пространстве состояний E_0 аналогично (9) определяется следующая функция укрупнения:

$$U_0((n_1, n_2)) = \langle n_1 \rangle, \text{ если } (n_1, n_2) \in E_0^{n_1}, \quad (12)$$

где $\langle n_1 \rangle$ — укрупненное состояние, включающее все состояния из класса $E_0^{n_1}$. Обозначим $\Omega_0 = \{\langle n_1 \rangle : i = 0, 1, \dots, S\}$.

Согласно АФУ имеем

$$\rho_0(n_1, n_2) \approx \rho_0^{n_1}(n_2)\pi_0(\langle n_1 \rangle), \quad (13)$$

где $\rho_0^{n_1}(n_2)$ — вероятность состояния (n_1, n_2) внутри расщепленной модели с пространством состояний $E_0^{n_1}$, а $\pi_0(\langle n_1 \rangle)$ — вероятность укрупненного состояния $\langle n_1 \rangle \in \Omega_0$.

Рассмотрим задачу вычисления стационарных вероятностей состояний внутри классов $E_0^i, i = 0, 1, \dots, S$. В классе состояний E_0^i первая компонента является постоянной и равна i . Поэтому при изучении расщепленных моделей с ФПС E_0^i микросостояние $(i, n_2) \in E_0^i$ можно задать только второй компонентой. Далее для удобства изложения при изучении расщепленной модели с ФПС E_0^i ее состояние (i, n_2) обозначим как $n_2, n_2 = 0, 1, \dots, N$.

Интенсивность перехода между состояниями n_2 и n_2' расщепленной модели с ФПС E_0^i обозначим $q_0(n_2, n_2')$. Из соотношений (2) вытекает, что эти параметры определяются так:

$$q_0(n_2, n_2') = \begin{cases} \lambda, & \text{если } n_2' = n_2 + 1, \\ n_2 \alpha_0, & \text{если } n_2' = n_2 - 1, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (14)$$

Из соотношений (14) следует, что вероятности состояний внутри всех расщепленных моделей с ФПС $E_0^i, i = 0, 1, \dots, S$, вычисляются аналогично (не зависят от $i, i = 0, 1, \dots, S$) как вероятности состояний классической модели Эрланга $M/M/N/0$ с нагрузкой λ/α_0 ерл., т.е.

$$\rho_0^i(n_2) = \frac{\sigma_0(n_2)}{\sum_{j=0}^N \sigma_0(j)}, \quad n_2 = 0, 1, \dots, N. \quad (15)$$

Здесь и далее приняты следующие обозначения: $\sigma_k(j) = \frac{(\lambda/\alpha_k)^j}{j!}, k = 0, 1$.

Интенсивность перехода из одного укрупненного состояния $\langle i \rangle$ в другое укрупненное состояние $\langle j \rangle$ обозначим $q_0(\langle i \rangle, \langle j \rangle), \langle i \rangle, \langle j \rangle \in \Omega_0$. После определенных алгебраических преобразований с применением АФУ получаем

$$q_0(\langle i \rangle, \langle j \rangle) = \begin{cases} i\gamma, & \text{если } j = i - 1, \\ \nu_0, & \text{если } i \leq s, j = i + S - s, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (16)$$

Таким образом, из соотношений (16) с учетом результатов работ [20, 21] для вычисления вероятностей укрупненных состояний $\pi_0(\langle n_1 \rangle), \langle n_1 \rangle \in \Omega_0$, получаем следующие выражения:

$$\pi_0(\langle n_1 \rangle) = \begin{cases} a_{n_1}(0)\pi_0(\langle s+1 \rangle), & \text{если } 0 \leq n_1 \leq s, \\ b_{n_1}(0)\pi_0(\langle s+1 \rangle), & \text{если } s+1 \leq n_1 \leq S-s, \\ c_{n_1}(0)\pi_0(\langle s+1 \rangle), & \text{если } S-s+1 \leq n_1 \leq S, \end{cases} \quad (17)$$

где $a_{n_1}(0) = \prod_{i=n_1+1}^{s+1} \frac{i\gamma}{\nu_0 + (i-1)\gamma}$; $b_{n_1}(0) = \frac{s+1}{n_1}$; $c_{n_1}(0) = \frac{\nu_0}{n_1\gamma} \sum_{i=n_1-S+s}^s a_i(0)$.

Вероятность $\pi_0(< s+1 >)$ вычисляется из условия нормировки, т.е.

$$\pi_0(< s+1 >) = \left(\sum_{i=0}^s a_i(0) + \sum_{i=s+1}^{S-s} b_i(0) + \sum_{i=S-s+1}^S c_i(0) \right)^{-1}.$$

Следовательно, с учетом соотношений (13), (15) и (17) определяются стационарные вероятности состояний расщепленной модели с ФПС E_0 .

Исследуем расщепленную модель с ФПС E_1 . Аналогично (11) рассматривается разбиение

$$E_1 = \bigcup_{i=1}^S E_1^i, \quad E_1^i \cap E_1^j = \emptyset, \quad \text{если } i \neq j, \quad (18)$$

где $E_1^i = \{(n_1, n_2) \in E_0 : n_1 = i\}$, $i = 1, \dots, S$. Аналогично (12) на основе расщепления (18) в пространстве состояний E_1 определяется следующая функция укрупнения:

$$U_1((n_1, n_2)) = \langle n_1 \rangle, \quad \text{если } (n_1, n_2) \in E_1^{n_1}, \quad (19)$$

где $\langle n_1 \rangle$ — укрупненное состояние, включающее все состояния из класса $E_1^{n_1}$.

Обозначим $\Omega_1 = \{\langle n_1 \rangle : i = 1, \dots, S\}$.

Далее повторяются описанные выше процедуры для расщепленной модели с ФПС E_0 . Поэтому отметим только различающиеся моменты. Так, здесь вероятности состояний внутри всех расщепленных моделей с ФПС E_1^i , $i = 1, \dots, S$, вычисляются аналогично (не зависят от i , $i = 1, \dots, S$), т.е.

$$\rho_1^i(n_2) = \frac{\sigma_1(n_2 - 1)}{N - 1}, \quad n_2 = 1, 2, \dots, N. \quad (20)$$

$$n_2 \sum_{j=0} \sigma_1(j)$$

Интенсивности переходов из одного укрупненного состояния $\langle i \rangle$ в другое укрупненное состояние $\langle j \rangle$, обозначаемые $q_1(\langle i \rangle, \langle j \rangle)$, $\langle i \rangle, \langle j \rangle \in \Omega_1$, в данном случае вычисляются таким образом:

$$q_1(\langle i \rangle, \langle j \rangle) = \begin{cases} (i-1)\gamma + \mu(1 - \rho_1(1)), & \text{если } j = i-1, \\ \nu_1, & \text{если } i \leq s, j = i+S-s, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (21)$$

Замечание 1. В формуле (21) верхний индекс величины $\rho_1(1)$ опущен, поскольку она не зависит от n_1 (см. (20)).

Тогда из соотношений (21) аналогично (17) для вычисления вероятностей укрупненных состояний $\pi_1(\langle n_1 \rangle)$, $\langle n_1 \rangle \in \Omega_1$, получаем следующие выражения:

$$\pi_1(\langle n_1 \rangle) = \begin{cases} a_{n_1}(1)\pi_1(\langle s+1 \rangle), & \text{если } 1 \leq n_1 \leq s, \\ b_{n_1}(1)\pi_1(\langle s+1 \rangle), & \text{если } s+1 \leq n_1 \leq S-s, \\ c_{n_1}(1)\pi_1(\langle s+1 \rangle), & \text{если } S-s+1 \leq n_1 \leq S, \end{cases} \quad (22)$$

где

$$a_{n_1}(1) = \prod_{i=n_1+1}^{s+1} \frac{\Lambda_i}{\nu_1 + \Lambda_{i-1}}; \quad b_{n_1}(1) = \frac{\Lambda_{s+1}}{\Lambda_{n_1}}; \quad c_{n_1}(1) = \frac{\nu_1}{\Lambda_{n_1}} \sum_{i=n_1-S+s}^s a_i(1),$$

$$\Lambda_i = \begin{cases} 0, & i = 1, \\ (i-1)\gamma + \mu(1 - \rho_1(1)), & 2 \leq i \leq S. \end{cases}$$

Вероятность $\pi_1(< s+1 >)$ вычисляется из соответствующего условия нормировки. Следовательно, с учетом соотношений (20) и (22) определяются стационарные вероятности состояний расщепленной модели с ФПС E_1 .

Для вычисления стационарного распределения исходной 3-D MC потребуются нахождение вероятностей укрупненных состояний, т.е. $\pi(< k >), < k > \in \Omega$ (см. формулу (10)). Необходимо определить интенсивности переходов между классами $< k >$ и $< k' >$. Обозначим эти величины $q(< k >, < k' >)$. С помощью АФУ после определенных преобразований имеем

$$q(< k >, < k' >) = \begin{cases} \beta(1-\rho_0(0))(1-\pi_0(< 0 >)), & \text{если } k=0, k'=1, \\ \mu(\pi_1(< 1 >)+\rho_1(1)(1-\pi_1(< 1 >))), & \text{если } k=1, k'=0. \end{cases} \quad (23)$$

Замечание 2. В формуле (23) и далее верхние индексы величин $\rho_0(i)$ и $\rho_1(i)$ опускаются, поскольку они не зависят от n_1 (см. формулы (15) и (20)).

Из соотношений (23) легко вычисляются искомые вероятности $\pi(< k >), < k > \in \Omega$.

Следовательно, с учетом (15), (17), (19), (20), (22) и (23) находим стационарное распределение исходной 3-D MC:

$$p(n_1, n_2, n_3) \approx \rho_{n_3}(n_2)\pi_{n_3}(< n_1 >)\pi(< n_3 >).$$

Окончательно после определенных преобразований получаем следующие формулы для приближенного расчета характеристик (3)–(8) рассматриваемой модели PQIS:

$$\begin{aligned} S_{av} &\approx \sum_{i=0}^1 \pi(< i >) \sum_{k=1}^S k\pi_i(< k >), \\ \Gamma_{av} &\approx \gamma \sum_{i=0}^1 \pi(< i >) \sum_{k=i+1}^S (k-i)\pi_i(< k >), \\ P_{vac} &\approx \pi(< 0 >), \\ PL_v &\approx \pi(< 0 >) \left(\rho_0(N) + \sum_{k=0}^S \pi_0(< k >) \sum_{i=1}^{N-1} \rho_0(i)P_0(k, i) \right), \\ PL_s &\approx \pi(< 1 >) \left(\rho_1(N) + \sum_{k=1}^S \pi_1(< k >) \sum_{i=2}^{N-1} \rho_1(i)P_1(k, i) \right), \\ RL_{av} &\approx \alpha_0 L_v + \alpha_1 L_s, \end{aligned}$$

где $L_v = \pi(< 0 >) \sum_{k=1}^N k\rho_0(k)$; $L_s = \pi(< 1 >) \sum_{k=2}^N (k-1)\rho_1(k)$.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Определяем зависимости характеристик системы от значения точки заказа s . Входные параметры системы выбираем следующим образом [10]:

$$S = 90, N = 25, \lambda = 15, \mu = 4, \nu_0 = 4, \nu_1 = 6, \beta = 1.3, \alpha_0 = 2, \alpha_1 = 1.$$

Вследствие ограниченности объема статьи приведем только часть результатов для двух различных значений параметра γ , т.е. в первой серии экспериментов принимается $\gamma = 1.4$, во второй — $\gamma = 2.5$. Результаты представлены на рис. 1–4, знаки о и × соответствуют первой и второй серии экспериментов (заметим, что входные параметры удовлетворяют принятым выше условиям для корректного применения разработанного асимптотического метода, т.е. $\lambda \gg \max\{\beta, \gamma, \mu\}$).

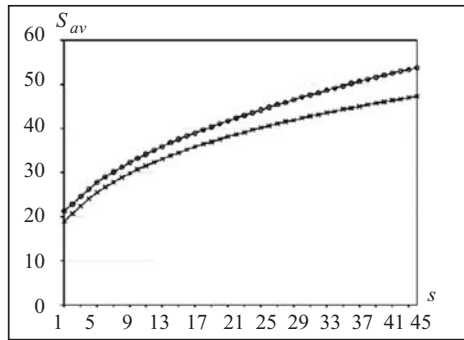


Рис. 1. Графики зависимости S_{av} от параметра s

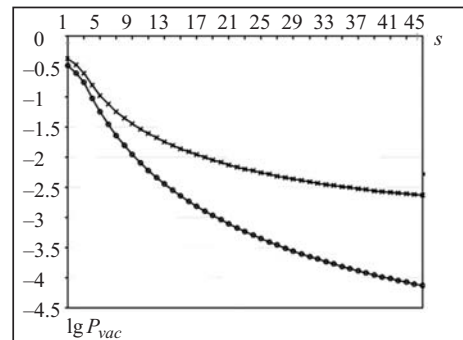


Рис. 2. Графики зависимости P_{vac} от параметра s

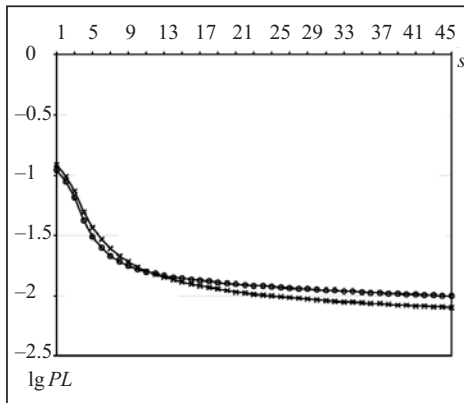


Рис. 3. Графики зависимости PL от параметра s

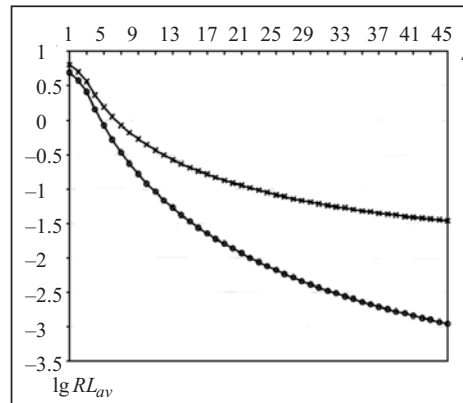


Рис. 4. Графики зависимости RL_{av} от параметра s

Полученные результаты соответствуют прогнозируемым и имеют логическое объяснение. Из них следует, что с увеличением значения точки заказа s повышается средний уровень запасов, при этом увеличение значений параметра γ приводит к уменьшению среднего уровня запасов системы (см. рис. 1). Отметим, что интуитивно предполагаемое соотношение $\Gamma_{av} \approx \gamma S_{av}$ (см. также формулы (3) и (4)) оказывается справедливым, при этом с ростом параметра s точность этого соотношения повышается, т.е. в первой серии экспериментов $\gamma \in [1.35; 1.38]$, а во второй — $\gamma \in [2.41; 2.45]$.

Вероятность пребывания сервера на прогулке является убывающей функцией относительно параметра s . Чем больше интенсивность порчи единицы запаса, тем выше указанная вероятность, и с ростом параметра s она уменьшается с большей скоростью (см. рис. 2). С ростом параметра s уменьшается также вероятность потери заявок. Значения этого показателя в обеих сериях экспериментов почти совпадают, т.е. в различных экспериментах ее значения отличаются в третьем знаке после запятой (см. рис. 3). И наконец, средняя интенсивность потери заявок из очереди вследствие их нетерпеливости является убывающей функцией относительно параметра s , но возрастающей относительно параметра γ (см. рис. 4).

Полученные результаты позволяют решать задачи вычисления надлежащих значений точки заказа в целях удовлетворения заданным ограничениям на определенные (или на все) характеристики системы. Например, если в первой серии экспериментов требуется найти такие значения параметра s , чтобы удовлетворить ограничения $PL \leq 10^{-4}$ и $S_{av} \leq 0.5S$, то легко можно определить, что решением этой задачи являются $s \in [0, \dots, 25]$. Заметим, что данная задача не имеет решения для второй серии экспериментов.

В проведенных численных экспериментах умеренные значения для параметров S и N выбраны для оценки точности разработанных приближенных формул.

Их точность достаточно высока, а полученные результаты близки к результатам работы [10]. Вместе с тем, в отличие от известных работ, предложенный метод позволяет вычислять характеристики систем практически любой размерности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена марковская модель системы обслуживания-запасания с одним сервером и скоропортящимися запасами, в которой нетерпеливые заявки могут образовывать очередь ограниченной длины. В случае отсутствия заявок и/или запасов системы сервер уходит на многократную прогулку. В системе принята (s, S) -политика пополнения запасов, при этом времена выполнения заказов и обслуживания заявок — положительные с.в. Показано, что математической моделью системы является трехмерная цепь Маркова. Разработаны точный и приближенный методы для определения ее характеристик. Точный метод основан на решении балансовых уравнений для вероятностей состояний и эффективен для систем умеренной размерности. Приближенный подход основан на иерархическом укрупнении состояний трехмерных цепей Маркова. Его можно применять для асимптотического анализа систем любой размерности.

Предложенный метод позволяет анализировать экономические показатели системы, а также изучать модели с повторными заявками, с рабочей прогулкой и др. Такие задачи могут быть предметом дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nahmias S. Perishable inventory theory: A review. *Operations Research*. 1982. Vol. 30. P. 680–708.
2. Nahmias S. Perishable inventory theory. Heidelberg: Springer, 2011. 80 p.
3. Baron O., Berman O., Perry D. Continuous review inventory models for perishable items ordered in batches. *Mathematics Methods of Operations Research*. 2010. Vol. 72. P. 217–247.
4. Doshi B.T. Queueing systems with vacations. A survey. *Queueing Systems*. 1986. Vol. 1, Iss. 1. P. 29–66.
5. Tian N., Zhang Z.G. Vacation queueing models. Heidelberg: Springer, 2006. 386 p.
6. Ke J.C., Wu C.H., Zhang Z.G. Recent developments in vacation queueing models. *International Journal of Operations Research*. 2010. Vol. 7, Iss. 4. P. 3–8.
7. Daniel J.K., Ramanarayanan R. An (s, S) -inventory system with two servers and rest periods to the server. *Naval Research Logistics*. 1988. Vol. 35. P. 119–123.
8. Narayanan V.C., Deepak T.G., Krishnamoorthy A., Krishnamoorthy B. On an (s, S) -inventory policy with service time, vacation to server and correlated lead time. *Quality Technology and Quantitative Management*. 2008. Vol. 5. P. 129–143.
9. Sivakumar B. An inventory system with retrial demands and multiple server vacations. *Quality Technology and Quantitative Management*. 2011. Vol. 8. P. 125–146.
10. Jajaraman B., Sivakumar B., Arivarignan G. A perishable inventory system with postponed demands and multiple server vacations. *Modeling and Simulation Engineering* (Hindawi Publ. Cor.). 2012. Article ID 620960. 17 p.
11. Jeganathan K. Perishable inventory system at service facilities with multiple server vacations and impatient customers. *Journal of Statistics Applications and Probability Letters*. 2014. Vol. 3, Iss. 3. P. 63–73.
12. Kathiresan S., Anbazhagan N., Jeganathan K. An inventory system with retrial demands and working vacation. *International Journal of Scientific and Research Publications*. 2014. Vol. 4, Iss. 12. P. 1–25.
13. Jeganathan K., Anbazhagan N., Vigneshwaran B. Perishable inventory system with server interruptions, multiple server vacations and policy. *International Journal of Operations Research and Information System*. 2015. Vol. 6, Iss. 2. P. 32–52.
14. Yadavalli V.S.S., Jeganathan K. Perishable inventory model with two heterogeneous servers including one with multiple vacations and retrial customers. *Journal of Control and Systems Engineering*. 2015. Vol. 3, Iss. 1. P. 10–34.
15. Padmavathi I., Sivakumar B., Arivarignan G. A retrial inventory system with single and modified multiple vacation for server. *Annals of Operation Research*. 2015. Vol. 233, Iss. 1. P. 335–364.
16. Servi L., Finn S. M/M/1 queue with working vacations (M/M/1/WV). *Performance Evaluation*. 2002. Vol. 50. P. 41–52.

17. Do T.V. M/M/1 retrial queue with working vacations. *Acta Informatica*. 2010. Vol. 47. P. 67–75.
18. Neuts M.F. Matrix-geometric solutions in stochastic models: An algorithmic approach. Baltimore: John Hopkins Univ. Press, 1981. 332 p.
19. Koroliuk V.S., Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Rustamov A.M. Methods for analysis of multi-channel queueing models with instantaneous and delayed feedbacks. *Cybernetics and System Analysis*. 2016. Vol. 52, N 1. P. 58–70.
20. Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Bagirova S.A. Analysis of queueing-inventory systems with impatience consume customers. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48, N 1. P. 53–68.
21. Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Shahmaliyev M.O. Perishable queueing-inventory models with repeated consumer customers. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48, N 6. P. 22–38.

Надійшла до редакції 28.10.2016

В.С. Королюк, А.З. Меліков, Л.А. Пономаренко, А.М. Рустамов
АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ СИСТЕМИ ІЗ СЕРВЕРОМ НА «ПРОГУЛЯНЦІ»
ТА ШВИДКОПСУВНИМИ ЗАПАСАМИ

Анотація. Запропоновано модель системи обслуговування-запасання із сервером на «прогулянці» і швидкопсувними запасами, в якій час обслуговування вимог є додатною випадковою величиною. Сервер йде на прогулянку за відсутності запасів і/або черги вимог. Після закінчення прогулянки він негайно починає обслуговування вимог при наявності запасів; інакше сервер повертається у режим очікування. Вимоги у черзі є «нетерплячими», і поповнення запасів здійснюється згідно з політикою двох рівнів. Розроблено метод асимптотичного аналізу системи. Наведено результати чисельних експериментів.

Ключові слова: система обслуговування-запасання, «прогулянка» сервера, політика двох рівнів, швидкопсувні запаси.

V.S. Koroliuk, A.Z. Melikov, L.A. Ponomarenko, A.M. Rustamov
ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE SYSTEM WITH SERVER VACATION
AND PERISHABLE INVENTORY

Abstract. The authors propose a model of queueing-inventory system with perishable inventory and server vacations in which service times are positive random quantities. Server takes vacations if either inventory level is zero or queue is empty or both cases happen. At the end of vacation, server immediately starts serving the calls if inventory level is not zero; otherwise it takes new vacation. Calls in the queue are impatient and restocking follows the two-level policy. The method of asymptotic system analysis is developed and results of numerical experiments are presented.

Keywords: queueing-inventory system, server vacations, two-level policy, perishable inventory.

Королюк Владимир Семенович,
 академик НАН Украины, профессор, советник при дирекции Института математики НАН Украины,
 Киев, e-mail: vskorol@yahoo.com.

Меликов Агаси Зарбали оглы,
 чл.-кор. НАН Азербайджана, профессор, заведующий отделом Института систем управления НАН
 Азербайджана, Баку, e-mail: agassi.melikov@rambler.ru.

Пonomarenko Леонид Анатольевич,
 доктор техн. наук, профессор, главный научный сотрудник Международного научно-учебного центра
 информационных технологий и систем НАН Украины и МОН Украины, Киев,
 e-mail: laponomarenko@ukr.net.

Рустамов Анар Муршид оглы,
 кандидат техн. наук, доцент Университета «Кавказ», Баку, Азербайджан, e-mail: anar.rustamov@gmail.com.