

АЛГОРИТМИ МЕТОДУ ДИСКРЕТНИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ ДЛЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Анотація. Розглянуто алгоритми методу дискретних особливостей для обчислювальних технологій. Алгоритми перетворюють дискретизовані інтегральні представлення із розривними функціями і змінюють порядок особливостей у системі дискретних особливостей. За результатами перетворення виникає можливість коректно обчислювати значення функцій та їхніх похідних при параметричній залежності характеристичних функцій від часу. Алгоритми обчислювальних технологій можна використовувати як для двовимірних, так і для тривимірних гідродинамічних задач нестационарного відривного обтікання.

Ключові слова: метод дискретних вихорів, метод дискретних особливостей, обчислювальні технології.

ПРО ЗАГАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧ

У багатьох випадках [1–10] для розв'язання плоскої задачі про нестационарне обтікання непроникних, рухомих зі швидкостями \vec{W}_d і \vec{W}_v границь — контурів $L_d(t)$ і $L_v(t)$, в деформованій області $D(t)$ використовують математичну модель з параметричною залежністю від часу t , яка в термінах теорії функцій комплексної змінної (ТФКЗ) має інтегральні представлення:

$$\begin{aligned} \Phi(z, t) &= \varphi(x, y, t) + i\psi(x, y, t) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} \gamma(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \gamma(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}(z, t) &= u(x, y, t) - iv(x, y, t) = \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} \frac{\gamma(\omega, t)}{z - \omega} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{\gamma(\omega, t)}{z - \omega} d\omega, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\Gamma_0 = \int_{L_d(t)} \gamma(\omega, t) d\omega + \int_{L_v(t)} \gamma(\omega, t) d\omega = \text{const}. \quad (3)$$

У силу мінливості області із заздалегідь невідомою формою частини границь розв'язати задачу про нестационарне обтікання непроникних рухомих границь можливо тільки чисельними методами.

ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПРЕДСТАВЛЕНЬ

Для чисельного розв'язання задач аерогідромеханіки часто [1–10] використовують так званий вихровий метод — метод дискретних особливостей [5], який базується на дискретизації інтегральних представлень (1), (2) відповідно до умов теорем з робіт [2, 4–6]. У цьому випадку інтегральні представлення (1)–(3) (в комплексних змінних) в області з кусково-гладкою границею, що допускає розбиття на сукупність граничних елементів $L = \sum_{j=1}^M L_j$, запишемо у вигляді

$$\Phi(z, t) = \varphi(x, y, t) + i\psi(x, y, t) =$$

$$= \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t)}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}(t)) + \sum_p^P \sum_{s=1}^{n(t)} \frac{\delta_s^p}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0s}^p(t)), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}(z, t) &= u(x, y, t) - iv(x, y, t) = \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z} = \\ &= \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_0(t)}{2\pi i(z - \omega_{0j})} + \sum_p^P \sum_{s=1}^{n(t)} \frac{\delta_s^p}{2\pi i(z - \omega_s^p(t))}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\Gamma_0 = \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) + \sum_p^P \sum_{i=1}^{n(t)} \delta_i^p = \text{const.} \quad (6)$$

У термінах дійсної змінної метод дискретних особливостей надає дискретне представлення характеристичної функції у вигляді

$$\varphi(x, y, t) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t)}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_{0j}}{x - x_{0j}} \right) + \sum_p^P \sum_{s=1}^{n(t)} \frac{\delta_s^p}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_s^p(t)}{x - x_s^p(t)} \right), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \psi(x, y, t) &= - \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t)}{2\pi} \ln((x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2)^{1/2} - \\ &- \sum_p^P \sum_{s=1}^{n(t)} \frac{\delta_s^p}{2\pi i} \ln((x - x_s^p(t))^2 + (y - y_s^p(t))^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\bar{V}(x, y, t) = \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t) \bar{V}_j(x, y, x_{0j}(t), y_{0j}(t)) + \sum_p^P \sum_{i=1}^{n(t)} \delta_i^p \bar{V}_i^p(x, y, x_i^p(t), y_i^p(t)), \quad (9)$$

де

$$\bar{V}_j(x, y, x_{0j}(t), y_{0j}(t)) = \left(\frac{y_{0j}(t) - y}{2\pi R_j^2}, \frac{x - x_{0j}(t)}{2\pi R_j^2} \right), \quad (10)$$

$$R_j = \max \left\{ r_j, \sqrt{(x - x_{0j}(t))^2 + (y - y_{0j}(t))^2} \right\}.$$

ЩОДО ПРОБЛЕМ ОБЧИСЛЕННЯ

В інтегральному представленні (1) з логарифмічним ядром підінтегральний вираз є багатозначною функцією з точкою розгалуження $\omega \in L_{ab}$. Значення виразу (1) для будь-якої точки z вважають цілком визначеним і має місце за умови, що для багатозначної функції $\ln(z - \omega)$ обрано її гілку і задано розріз, що проходить уздовж контуру L_{ab} . Для визначення обраної гілки форма розрізу може бути довільною, але для виділення безперервного (в області) значення функції зручно, щоб розріз проходив уздовж модельованого контуру. У правій частині рівняння (4) записано суму комплексних логарифмів. Однак якщо для (1) можна вважати, що розрив проходить уздовж контуру L_{ab} (рис. 1), то для системи вихорів (4) система розрізів буде проходити по множині прямих ліній (рис. 2), які з'єднують точки з дискретними особливостями Γ_k з нескінченно віддаленою точкою.

Якщо для інтегрального представлення (1) характеристичної функції-потенціалу можна вважати, що розріз в області збігається з контуром (див. рис. 1), то у термінах методу дискретних вихорів (МДВ) (4), (7) напрямки розрізів являють собою систему променів для всієї системи дискретних вихорів (див. рис. 2).

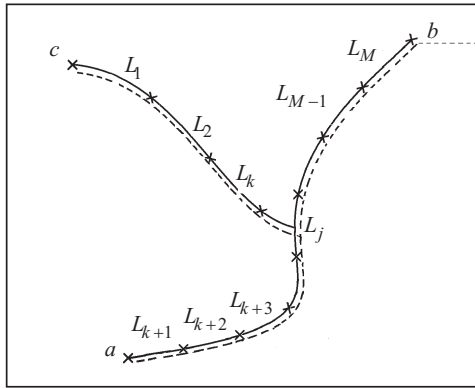


Рис. 1. Лінія розрізу (уздовж контуру) визначає область однозначності для інтегрального представлення

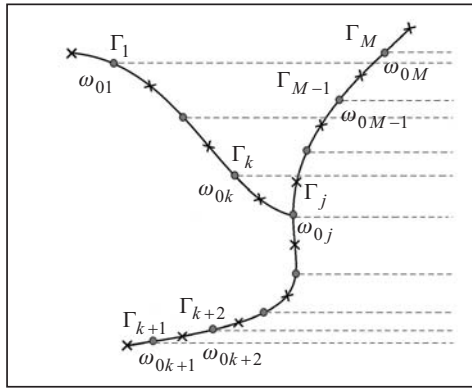


Рис. 2. Лінії розрізу (за променями), які виділяють область однозначності для системи дискретних особливостей на контурі

Для характеристичної функції в представленнях (1), (4) обчислення її значення у частині області (поза контуром, що моделюється системою дискретних вихорів, залишаючись при цьому в «термінології» МДВ) стає неможливим. Інакше кажучи, проблемою МДВ є наявність системи розривів (уздовж ліній, які з'єднують вихори з нескінченно віддаленою точкою (див. рис. 2)) в області значень функції поза контуром, яку в загальному випадку неможливо усунути зміною кількості дискретних вихорів.

Для нестационарних гідродинамічних задач [1, 6–9] зі змінною в часі геометрією границь (рух, деформація і породження нових елементів при відриві вихорів), а також змінною циркуляцією навколо границь необхідно обчислювати похідну від потенціалу за часом, формальний вираз якої у термінах МДВ має вигляд

$$\frac{\partial \varphi(x, y, t_{n+1})}{\partial t} = \sum_{j=1}^M \frac{\dot{\Gamma}_j(t_{n+1})}{2\pi} \arctg \left(\frac{y - y_j(t_{n+1})}{x - x_j(t_{n+1})} \right) + \sum_{p=1}^P \frac{\delta_n^p}{2\pi} \arctg \left(\frac{y - y_i^p(t_{n+1})}{x - x_i^p(t_{n+1})} \right) -$$

$$- \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) (\vec{V}_j(x, y, x_{0j}(t_{n+1}), y_{0j}(t_{n+1})), \vec{W}_d(x_{0j}(t_{n+1}), y_{0j}(t_{n+1}))) -$$

$$- \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i^p (\vec{V}_i(x, y, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})), \vec{W}_v(x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1}))). \quad (11)$$

У правій частині виразу (11) перші два доданки містять розривні функції (які мають логарифмічні особливості (10) відповідно до вихревого представлення (7)), що не дозволяє використовувати його для обчислення значень похідної в області поза границями. Через наявність неоднозначних функцій в (4), (7) за обтічним контуром довільної форми утворюється «зона тіні» (що складається з системи розривів уздовж ліній розрізів (див. рис. 2)), в якій неможливо обчислити похідні та усі характеристики, які визначаються через похідні (локальні і розподілені кінематичні та динамічні характеристики течії).

У силу наведеного вище обчислення характеристик течії з використанням виразів (1), (4), (11) можливе тільки для обмеженої множини задач із границями, які мають просту (прямолінійну) геометрію. Для більш загального випадку задач з границями складної форми (див. рис.1) виникають проблеми з обчисленням як функції, так і похідної (проблема наявності системи розривів у значенні функції поза контуром $L = L_d + L_v$). Ці проблеми, які є властивістю дискретних вихорів для плоских задач, можна розв'язати перетворенням, що виділяє однозначну

гілку для системи функцій $\ln(z - \omega_{0j})$ шляхом підвищення порядку системи особливостей і одночасним «перенаправленням» системи ліній розриву в одну лінію, тобто розрізу уздовж контуру границі L [3]. Розглянемо алгоритми обчислювальних технологій. Алгоритм перетворення системи особливостей може бути реалізований на довільному плоскому криволінійному контурі.

АЛГОРИТМ ПЕРЕТВОРЕННЯ І ВИДІЛЕННЯ РОЗРІЗУ ДЛЯ БАГАТОЗНАЧНОЇ ФУНКЦІЇ НА ДОВІЛЬНОМУ КОНТУРІ

Випадок довільного контуру може бути зведений до системи зв'язаних гіллястих контурів. Розташування вихорів на гіллястому контурі відрізняється від розташування вихорів на простому контурі тільки перенумерацією дискретних вихорів на контурі залежно від індексу гілки (рис. 3).

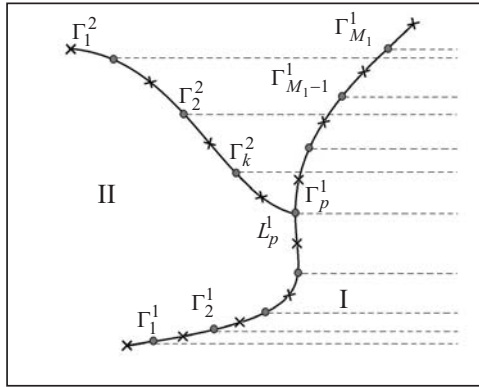


Рис. 3. Результат перенумерації вихорів на гіллястому контурі

Нехай гілки на гіллястому контурі поділяються на первинну (основну) (I) та вторинну (II). Початкову нумерацію вихорів на гіллястому контурі (див. рис. 2) необхідно змінити залежно від індексу гілки таким чином, щоб вихор у точці розгалуження належав до вихорів як на основній, так і на вторинній гілках контуру:

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}). \quad (12)$$

Перенумерація вихорів на гіллястому контурі (див. рис. 3) виконана таким чином, щоб вузловий вихор (у точці розгалуження) належав як до первинної, так і до вторинної гілок контуру. Кількість вихорів на кожній гілці визначають числами $M_j, j=1, 2$, а загальна кількість вихорів $M = M_1 + M_2 - 1$ (вузловий вихор враховується двічі). Таким чином, характеристична функція має вигляд

$$\Phi(z) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{M_1} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}^1) + \sum_{j=1}^{M_2} \frac{\Gamma_j^2}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}^2). \quad (13)$$

Так, для впорядкованої системи дискретних вихорів (13) допустиме перетворення, яке забезпечує перехід до системи вихрових пар [3, 5] і сумарного вихору:

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{M_1} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{\sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi i} (\ln(z - \omega_{0j}^2) - \ln(z - \omega_{0j+1}^2)) + \\ & \sum_{j=1}^{M_2} \frac{\Gamma_j^2}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M_2}^2). \end{aligned} \quad (14)$$

На рис. 4 наведено перетворення вихорів на вихрові пари на вторинній гілці гіллястого контуру. Далі виконано перетворення вихрових пар на диполі на вторинній гілці гіллястого контуру (рис. 5):

$$\Phi(z) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{M_1} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi i} \times$$

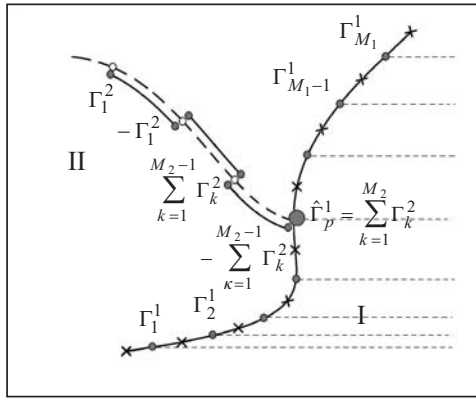


Рис. 4. Схема перетворення вихорів на вихрові пари на вторинній гілці гіллястого контуру

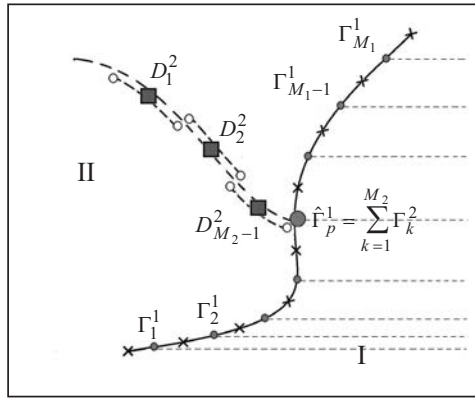


Рис. 5. Схема перетворення вихрових пар на диполі на вторинній гілці гіллястого контуру

$$\times \left(\frac{\ln(z - \omega_{0j+1}^2 + \omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) - \ln(z - \omega_{0j+1}^2)}{\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2} \right) + \frac{\sum_{j=1}^{M_2} \Gamma_j^2}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M_2}^2) \quad (15)$$

або інакше

$$\Phi(z) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{M_1} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi i(z - \omega_j^2)} + \frac{\Gamma_0^2}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M_2}^2). \quad (16)$$

У силу того, що

$$\omega_j^2 = 0.5(\omega_{0j+1}^2 + \omega_{0j}^2)\omega_{0p}^1 = \omega_{0M_2}^2, \quad \Gamma_p^1 = \Gamma_0^2 = \sum_{j=1}^{M_2} \Gamma_j^2, \quad (17)$$

сумарний вихор потрапляє в перший доданок правої частини формули (16):

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M_1} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi i(z - \omega_j^2)}. \quad (18)$$

Далі виконаємо перетворення вихорів у систему вихрових пар на основній гілці гіллястого контуру (рис. 6):

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{\sum_{k=1}^{M_1} \Gamma_k^1}{2\pi i} (\ln(z - \omega_{0j}^1) - \ln(z - \omega_{0j+1}^1)) + \frac{\Gamma_0^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M_1}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi i(z - \omega_j^2)}. \quad (19)$$

Подальші перетворення вихрових пар у диполь основної гілки гіллястого контуру (рис. 7):

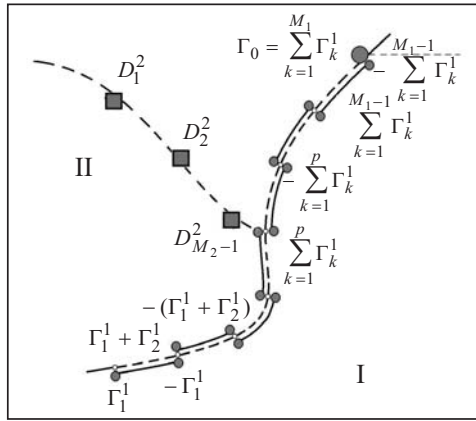


Рис. 6. Перетворення вихорів на вихрові пари на основній гілці гіллястого контуру

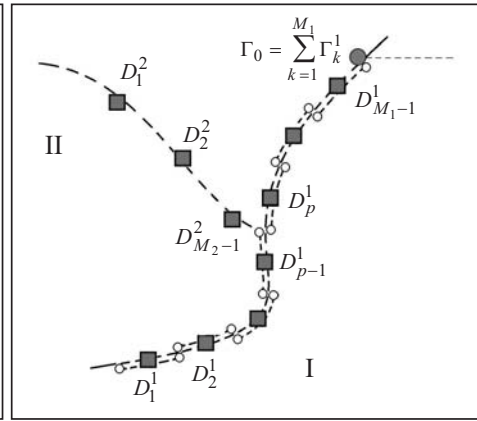


Рис. 7. Перетворення вихрових пар у диполь основної гілки гіллястого контуру

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{(\omega_{0j+1}^1 - \omega_{0j}^1) \sum_{k=1}^{M_1} \Gamma_k^1}{2\pi i} \left(\frac{\ln(z - \omega_{0j+1}^1 + \omega_{0j+1}^1 - \omega_{0j}^1) - \ln(z - \omega_{0j+1}^1)}{\omega_{0j+1}^1 - \omega_{0j}^1} \right) + \frac{\Gamma_0^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M_1}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi i (z - \omega_j^2)} \quad (20)$$

призводять до виразу

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{(\omega_{0j+1}^1 - \omega_{0j}^1) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^1}{2\pi i (z - \omega_j^1)} + \frac{\Gamma_0^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M_1}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi i (z - \omega_j^2)}, \quad (21)$$

де

$$\omega_j^1 = 0.5(\omega_{0j+1}^1 + \omega_{0j}^1), \quad \omega_{0p}^1 = \omega_{0M_2}^2, \quad \Gamma_0^1 = \sum_{j=1}^{M_1} \Gamma_j^1. \quad (22)$$

Остаточного представлення у вигляді суми диполів і сумарного вихору на гіллястому контурі (рис. 8) набуває вигляду

$$\Phi(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{D_j^1}{2\pi i (z - \omega_j^1)} + \frac{\Gamma_0^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M_1}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{D_j^2}{2\pi i (z - \omega_j^2)}, \quad (23)$$

де

$$\Gamma_0^1 = \Gamma_0 = \sum_{j=1}^M \Gamma_j; \quad D_j^p = (\omega_{0j+1}^p - \omega_{0j}^p) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^p, \quad p=1, 2, \dots,$$

а загальна кількість диполів дорівнюватиме $M_1 + M_2 - 2$.

Для адитивного представлення (23) у вигляді суми диполів і логарифма дійсна частина має вигляд

$$\varphi(x, y) = \text{Re } \Phi(z) = \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{\sum_{k=1}^j \Gamma_k^1}{2\pi} \left(\frac{(y_{0j+1}^1 - y_{0j}^1)(x - x_j^1) - (x_{0j+1}^1 - x_{0j}^1)(y - y_j^1)}{(x - x_j^1)^2 + (y - y_j^1)^2} \right) + \frac{\Gamma_0^1}{2\pi} \arctg \frac{y - y_{0M_1}^1}{x - x_{0M_1}^1} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{\sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi} \left(\frac{(y_{0j+1}^2 - y_{0j}^2)(x - x_j^2) - (x_{0j+1}^2 - x_{0j}^2)(y - y_j^2)}{(x - x_j^2)^2 + (y - y_j^2)^2} \right), \quad (24)$$

а уявна частина —

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = \text{Im } \Phi(z) = & - \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{\sum_{k=1}^j \Gamma_k^1}{2\pi} \left(\frac{(x_{0j+1}^1 - x_{0j}^1)(x - x_j^1) + (y_{0j+1}^1 - y_{0j}^1)(y - y_j^1)}{(x - x_j^1)^2 + (y - y_j^1)^2} \right) - \\ & - \frac{\Gamma_0}{2\pi} \ln ((x - x_{0M_1}^1)^2 + (y - y_{0M_1}^1)^2)^{0.5} - \\ & - \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{\sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi} \left(\frac{(x_{0j+1}^2 - x_{0j}^2)(x - x_j^2) + (y_{0j+1}^2 - y_{0j}^2)(y - y_j^2)}{(x - x_j^2)^2 + (y - y_j^2)^2} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

У наведеному алгоритмі поділ гілок контуру на основну і вторинну достатньо умовний. Його можна виконати й іншим способом. Свобода вибору гілок на контурі, вибір початку і напрямки обходу контурів впливають тільки на чисельні значення розподілених диполів і положення сумарного вихору (від якого виконується розріз), але не впливає на чисельні значення функції поза контуром. Замкненість контуру також не впливає на алгоритм перетворення системи дискретних вихорів у систему диполів і сумарний вихор, але вибір початку і кінця контурів визначає положення результтивного вихору і, як наслідок, положення лінії розрізу в області.

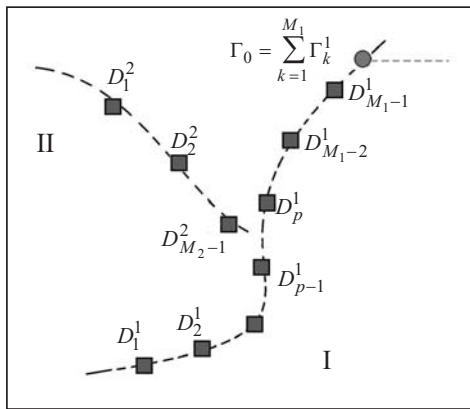


Рис. 8. Розподіл диполів і сумарного вихору на гіллястому контурі

ПОКРОКОВИЙ АЛГОРИТМ МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ВІДРИВНОГО ОБТІКАННЯ РУХОМОГО КОНТУРУ

Крок 1 (рис. 9). Вважаємо, що на момент часу $t = t_n$ відомі положення і геометрична форма границь $L(t_n) = L_d(t_n) + L_v(t_n)$, чисельні значення розподілених вихорів $\Gamma_j(t_n)$, $j = \overline{1, M}$, на контурі і вихорів δ_i^p , $i = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, P}$, в сліді та розподіл усіх кінематичних $\varphi(x, y, t_n) = \text{const}$, $\psi(x, y, t_n) = \text{const}$, $\vec{V}(x, y, t_n)$ і динамічних характеристик відповідно до (6)–(9).

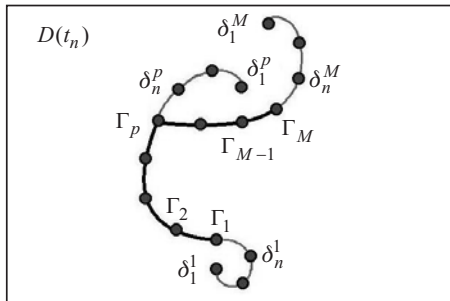


Рис. 9. Розташування вихорів на контурі і в сліді

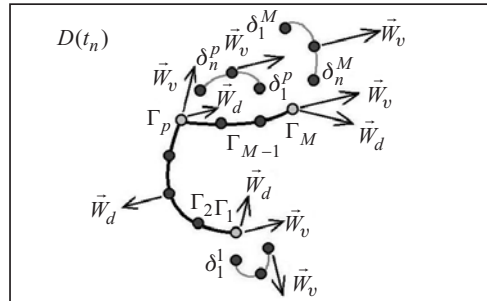


Рис. 10. Вектори швидкостей вихорів на контурі і в сліді

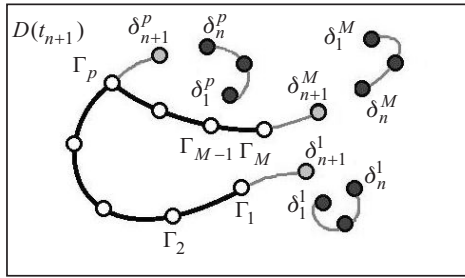


Рис. 11. Положення вихорів, які визначають форму границь

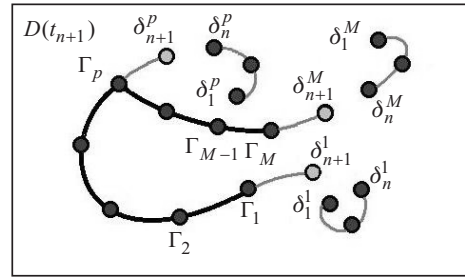


Рис. 12. Границі з визначеними інтенсивностями вихорів

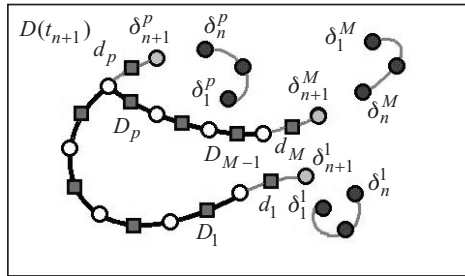


Рис. 13. Дипольне представлення відриву та на контурі

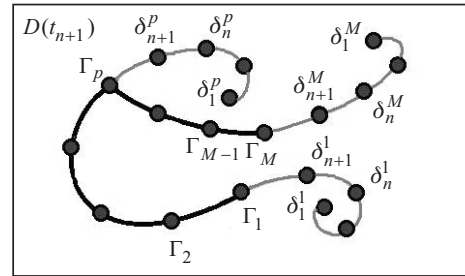


Рис. 14. Представлення вихорів з відомими інтенсивностями

Крок 2 (рис. 10). У той же момент часу ($t = t_n$) обчислюють швидкості $\vec{W}_d(x_{0j}(t_n), y_{0j}(t_n))$, що визначають переміщення всіх точок контуру $L_d(t_n)$, і відповідно до (9) — швидкості $\vec{W}_v(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n)) = \vec{V}(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n), t_n)$ переміщення всіх p точок контуру $L_v(t_n)$. При визначенні швидкостей у всіх точках відриву — кінцевих і кутових точках контуру $L_d(t_n)$ (які є точками сполучення контурів $L_d(t_n)$ і $L_v(t_n)$) слід враховувати, що $\vec{W}_v(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n)) \neq \vec{W}_d(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n), t_n)$.

Крок 3 (рис. 11). Для моменту часу $t = t_{n+1}$ визначають нове положення і форму границь $L(t_{n+1}) = L_d(t_{n+1}) + L_v(t_{n+1})$, тобто для всіх точок \vec{r} границі $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ чисельно розв'язують задачі Коші, причому крок за часом $\tau_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ визначають так, щоб дискретне представлення границь (розбиття на граничні елементи) $L(t_{n+1}) = L_d(t_{n+1}) + L_v(t_{n+1})$ в p точках відриву зберігало рівномірну обмеженість: $\max |d\vec{r}_{n+1}^p| = |\vec{r}_{n+1}^p - \vec{r}_n^p| \leq \Delta = \max_p \Delta_p$.

Крок 4 (рис. 12). На цей же момент часу ($t = t_{n+1}$) для вже відомого нового положення і форми границь $L(t_{n+1}) = L_d(t_{n+1}) + L_v(t_{n+1})$ та відомих значень інтенсивностей δ_i^p ($i = 1, n+1$; $p = 1, P$) з розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь визначають нові значення вихрових інтенсивностей $\Gamma_j(t_{n+1})$ ($j = 1, M$), які знаходяться на контурі $L_d(t_{n+1})$.

Крок 5 (рис. 13). Для $t = t_{n+1}$ для вже обчислених параметрах для (7)–(9) виконують перетворення вихрової системи (7)–(9) (на контурі $L(t_{n+1}) = L_d(t_{n+1}) + L_v(t_{n+1})$) в дипольне представлення (23)–(25), що дозволяє обчислювати кінематичні ($\varphi(x, y, t_{n+1}) = \text{const}$, $\psi(x, y, t_{n+1}) = \text{const}$, $\vec{V}(x, y, t_{n+1})$) та динамічні характеристики.

Крок 6 (рис. 14). Оскільки на момент часу $t = t_{n+1}$ після проведення всіх необхідних розрахунків знайдено всі параметри задачі, цей крок стає аналогічним кроку 1. Для продовження моделювання на наступному часовому проміжку виконується циклічний перехід до кроку 1.

Зауваження. Обчислення на кроці 5 кінематичних і динамічних характеристик задачі пов'язане з проблемою некоректного обчислення похідної (11); подолати її можливо, враховуючи вимоги теореми Томсона [1, 5] про незмінність циркуляції швидкості по замкнутому рідкому контуру протягом усього часу руху, яка для дискретних представлень [1, 4, 5] має вигляд

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^M \Gamma_j + \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^n \delta_i^p \right) = 0. \quad (26)$$

У такому формулюванні враховано постулат про «вмерзлість» вихорів у середовищі, що допускає «стікання» в слід складок вихрової поверхні (поверхні розривів дотичних швидкостей), що породжують нові елементи границь. Новий (вихровий) елемент границі (породжений відривом) є елементом розриву в полі швидкості, що призводить до приросту циркуляції.

За умов теореми Томсона зміна циркуляції по замкнутому контуру, який охоплює тільки обтічну границю, викликає зміну циркуляції поза границею $L_d(t)$ за рахунок породження відриву нових елементів сліду на обтічній границі. Циркуляція швидкості по контуру, що охоплює фіксований матеріальний об'єм із вже сформованим слідом, при баротропному русі ідеальної рідини під впливом поля об'ємних сил з однозначним потенціалом не змінюється. У наслідок цього справедливо

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^M \Gamma_j + \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^n \delta_i^p \right) = \sum_{j=1}^M \dot{\Gamma}_j(t) + \sum_{p=1}^P \dot{\delta}_n^p = 0. \quad (27)$$

Із (3) та із викладеного вище випливає, що при відривному обтіканні за умов теореми Томсона зміна циркуляції в сліді компенсується зміною циркуляції швидкості по замкнутому рідкому контуру, який охоплює тільки обтічну границю, тобто

$$\sum_{j=1}^M \dot{\Gamma}_j(t_n) = - \sum_{p=1}^P \dot{\delta}_n^p. \quad (28)$$

Розв'язати проблему обчислення похідної в (11) надає можливість така теорема.

Теорема 1. Нехай виконується умова (28), тоді вираз для обчислення значення похідної за часом (11) від дискретного представлення (7) має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x, y, t_{n+1})}{\partial t} = & \sum_{j=1}^{M-1} (\bar{D}_j, \bar{V}_j(x, y, \bar{x}_j(t_{n+1}), \bar{y}_j(t_{n+1}))) + \\ & + \sum_p^P (\bar{d}_p, \bar{V}_p(x, y, \bar{x}_n^p(t_{n+1}), \bar{y}_n^p(t_{n+1}))) - \\ - & \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) (\bar{V}_j(x, y, x_{0j}(t_{n+1}), y_{0j}(t_{n+1})), \bar{W}_d(x_{0j}(t_{n+1}), y_{0j}(t_{n+1}))) - \\ - & \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i^p (\bar{V}_i(x, y, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})), \bar{W}_v(x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1}))), \quad (29) \end{aligned}$$

де

$$\begin{cases} \bar{D}_j = (x_{j+1} - x_j, y_{j+1} - y_j) Q_j, & \begin{cases} \bar{x}_j = 0.5(x_{0j+1} + x_{0j}), \\ \bar{y}_j = 0.5(y_{0j+1} + y_{0j}); \end{cases} \\ \bar{d}_p = (x_p - x_n^p, y_p - y_n^p) q_p; & \begin{cases} \bar{x}_n^p = 0.5(x_n^p + x_{0p}), \\ \bar{y}_n^p = 0.5(y_n^p + y_{0p}). \end{cases} \end{cases} \quad (30)$$

Таким чином, похідна (11) від характеристичної функції-потенціалу (7) має представлення (29) з дипольними особливостями із (9) та з векторними інтенсивностями (30). Як доказ розглянемо алгоритм перетворення виразу (11) у вираз (29).

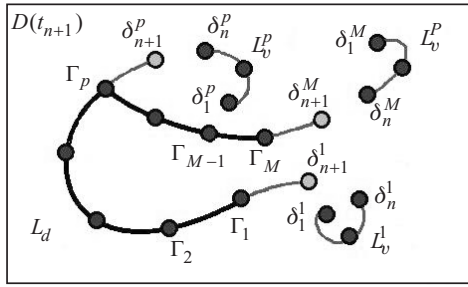


Рис. 15. Схема розподілу вихорів на $L(t_{n+1}) = L_d(t_{n+1}) + L_v(t_{n+1})$ при відриві

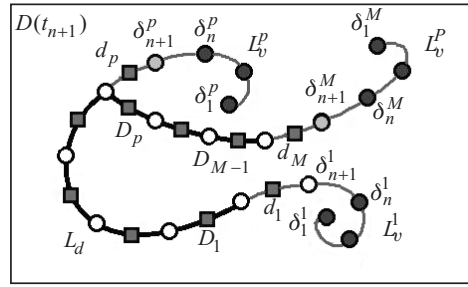


Рис. 16. Схема розподілу вихорів і диполів на $L(t_{n+1}) = L_d(t_{n+1}) + L_v(t_{n+1})$ при відриві

Нехай маємо алгоритм (12)–(25) перетворення і виділення розрізу для багатозначної функції на довільному контурі. З (11) випливає можливість «вихрового» представлення для похідної, причому в силу (28) зміни циркуляції на обтічному контурі компенсовано виникненням додаткових циркуляцій в сліді, які спричинені породженням нових елементів непроникних границь (утворенням вихрових поверхонь відриву потоку). Алгоритм перетворення «вихрової» системи (рис. 15), яка при створенні системи «дискретних вихрових пар» трансформується у «дипольну» систему (рис. 16), представлено на рис. 17.

Нехай для $t = t_{n+1}$ значення похідних від інтенсивностей вихорів, які розподілені на контурі $L_d(t_{n+1})$ та відірвалися від $L_d(t_{n+1})$ і поповнили $L_v(t_{n+1})$ новоутворених вихорів, можуть визначатися, наприклад, різницевим методом:

$$\dot{\Gamma}_j(t_{n+1}) = (\Gamma_j(t_{n+1}) - \Gamma_j(t_n)) / (t_{n+1} - t_n), \quad \dot{\delta}_{n+1}^p = \delta_{n+1}^p / (t_{n+1} - t_n). \quad (31)$$

Тоді для алгоритму перетворення вихрового представлення в дипольне в силу (28) потрібні тільки складові з інтенсивностями (31).

АЛГОРИТМ ПЕРЕТВОРЕННЯ СИСТЕМИ ВИХОРИВ У СИСТЕМУ ДИПОЛІВ ТА ВИХОРИВ З УРАХУВАННЯМ ВІДРИВУ

Схема перетворення системи вихорів у систему диполів при відриві на $L_d(t_{n+1})$ з утворенням нових елементів границі $L_v(t_{n+1})$ на кінцях $L_d(t_{n+1})$ відповідно до рис. 15 у розгорненому вигляді зображено на рис. 17, а.

На рис. 17, б сформовано дискретні вихрові пари із тих вихорів, які відірвалися; вносяться виправлення в значення похідних від інтенсивностей кінцевих вихорів на контурі $L_d(t_{n+1})$. На рис. 17, в зображено перевизначення: виділення «вихрових пар» із вихорів, які відірвалися, та приєднаних «вихорів» на контурі $L_d(t_{n+1})$:

$$\hat{q}_j = \hat{q}_i(t_{n+1}) = \dot{\Gamma}_j(t_{n+1}), \quad \hat{q}_p(t_{n+1}) = \dot{\Gamma}_p(t_{n+1}) + \dot{\delta}_{n+1}^p. \quad (32)$$

На рис. 17, г зображено формування дискретних вихрових пар з похідних від вихорів на контурі $L_d(t_{n+1})$:

$$Q_1 = \hat{q}_1, \quad Q_i = \sum_{k=1}^i \hat{q}_k, \quad i = 1, 2, \dots, M-1. \quad (33)$$

Для цієї побудови вираз (11) для похідної від потенціалу набуває вигляду

$$\frac{\partial \varphi(x, y, t_{n+1})}{\partial t} = \sum_{j=1}^{M-1} \left\{ \frac{Q_j}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_j(t_{n+1})}{x - x_j(t_{n+1})} \right) - \frac{Q_j}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_{0j+1}(t_{n+1})}{x - x_{0j+1}(t_{n+1})} \right) \right\} +$$

$$+ \sum_{p=1}^P \left\{ \frac{q_p}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_i^p(t_{n+1})}{x - x_i^p(t_{n+1})} \right) - \frac{q_p}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_{0p}(t_{n+1})}{x - x_{0p}(t_{n+1})} \right) \right\} -$$

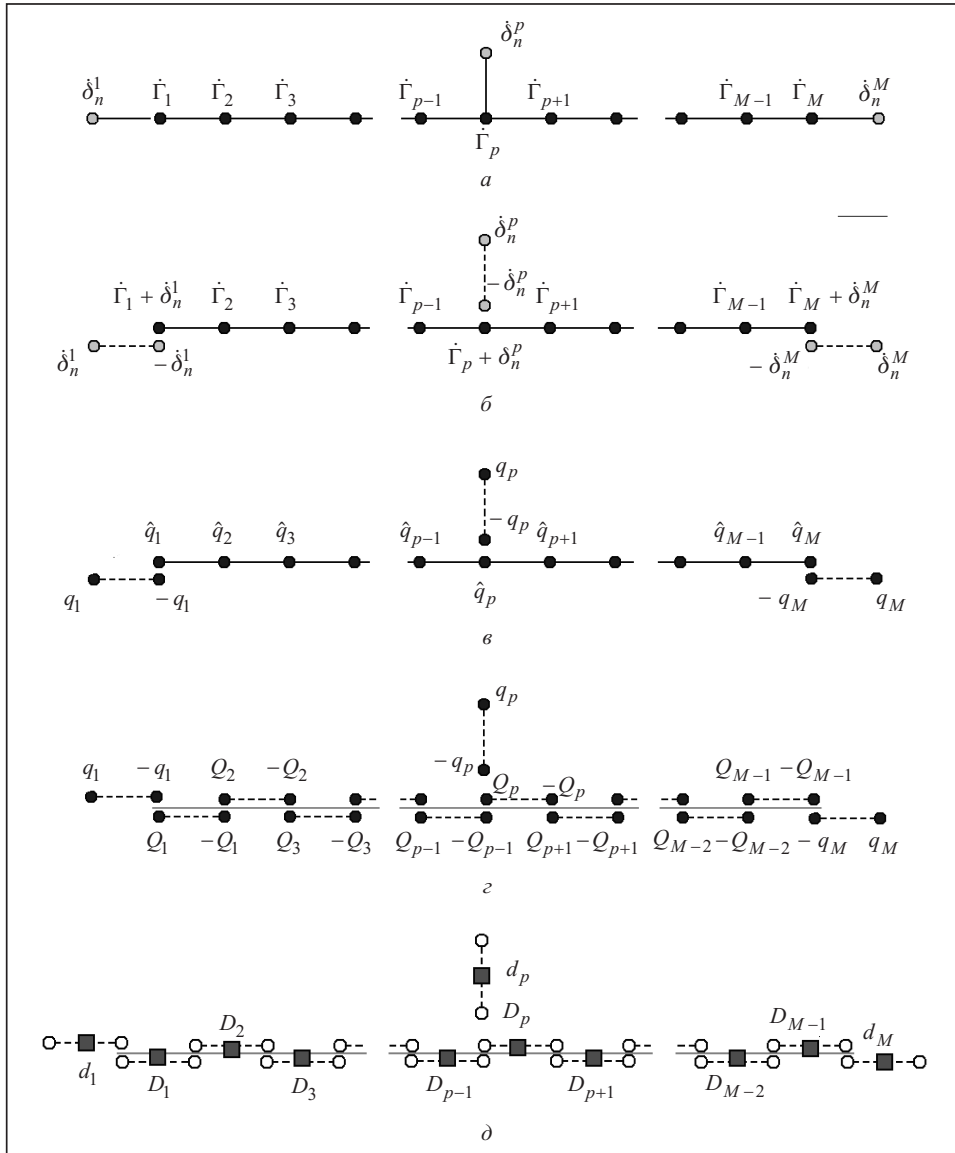


Рис. 17. Схема перетворення системи вихорів у систему диполів

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) (\vec{V}_j(x, y, x_{0j}(t_{n+1}), y_{0j}(t_{n+1})), \vec{W}_d(x_{0j}(t_{n+1}), y_{0j}(t_{n+1}))) - \\
 & - \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i^p (\vec{V}_i(x, y, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})), \vec{W}_v(x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1}))). \quad (34)
 \end{aligned}$$

Для заміни в (34) перших двох доданків різницеvim аналогом дипольного представлення (15) з урахуванням (31), (33) отримуємо

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi(x, y, t_n)}{\partial t} = & \sum_{j=1}^{M-1} \left\{ \frac{Q_j (\bar{y}_j - y)(x_{0j+1} - x_{0j}) + (x - \bar{x}_j)(y_{0j+1} - y_{0j})}{2\pi (x - \bar{x}_j)^2 + (y - \bar{y}_j)^2} \right\} + \\
 & + \sum_{p=1}^P \left\{ \frac{q_p (\bar{y}_n^p - y)(x_{0p} - x_n^p) + (x - \bar{x}_n^p)(y_{0p} - \bar{y}_n^p)}{2\pi (x - \bar{x}_n^p)^2 + (y - \bar{y}_n^p)^2} \right\} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) (\vec{V}_j(x, y, x_{0j}(t_n), y_{0j}(t_n)), \vec{W}_d(x_{0j}(t_n), y_{0j}(t_n))) - \\
& - \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i^p (\vec{V}_i(x, y, x_i^p(t_n), y_i^p(t_n)), \vec{W}_v(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n))). \quad (35)
\end{aligned}$$

У випадку заміни першого доданку в (35) дипольним аналогом, як у представлення (16), отримуємо вираз для похідної (11) у вигляді (29).

На рис. 17, δ зображено дипольне представлення виразу (29), яке отримано з виразу для системи «дискретних пар» (35) з похідними від вихорів на контурі $L_d(t_{n+1})$.

Розглянуті алгоритми та перетворення дозволяють визначити зміни значень кінематичних і динамічних характеристик, що визначаються через похідну для будь-якого моменту часу $t = t_{n+1}$.

Узагальнимо основні результати.

— Алгоритм перетворення системи дискретних представлень із розривними (багатозначними) функціями в систему регулярних дискретних особливостей є регуляризованим.

— Регуляризація системи дискретних особливостей полягає в зведенні системи розподілених ліній розривів дискретизованої характеристичної функції до єдиної лінії розриву, яка проходить вздовж контуру та з'єднує контур з нескінченно віддаленою точкою.

— За умови $\Gamma_0 = 0$ вибір початкового елемента (із впорядкованої системи дискретизованих представлень) для регуляризованого перетворення не впливає на чисельне значення характеристичної функції у будь-якій точці області (поза границями).

— Регуляризовані перетворення дозволяють коректно обчислювати значення дискретизованої характеристичної функції та її похідних при параметричній залежності характеристичних функцій від часу. Алгоритми обчислювальних технологій застосовують як для двовимірних, так і для тривимірних гідродинамічних задач нестационарного відривного обтікання.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. Москва: Наука, 1978. 351 с.
2. Chemiy D.I. Approximation of solution of initial-boundary problem with moving boundary. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1997. N 2(82). P. 112–123.
3. Chemiy D.I. Computational technologies of discrete vortices method. *Bulletin of National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»*. 2016. N 6 (1178). P. 116–123.
4. Chemiy D.I. Derivatives of integral expressions. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ser. Physics & Mathematics*. 2016. N 3. P. 121–126.
5. Довгий С.О., Ліфанов І.К. Метод сингулярних інтегральних рівнянь. Теорія та застосування. Київ: Наук. думка, 2004. 510 с.
6. Klyushin D.A., Lyashko S.I., Nomirovsky D.A., Petunin Yu.,I., Semenov V.V. Generalized solutions of operator equations and extreme elements. New York; Dordrecht; Heidelberg; London: Springer, 2012. 200 p.
7. Lyashko S.I., Nomirovskii D.A. Generalized solutions and optimal controls in systems describing the dynamics of a viscous stratified fluid. *Differential Equations*. 2003. Vol. 39, N 1. P. 90–98.
8. Lyashko S.I., Nomirovski D.A., Generalized solvability and optimization of parabolic systems in domains with thin weakly permeable inclusions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2002. Vol. 39, N 5. P. 737–745.

9. Lyashko N.I., Grishchenko A.E., Onotskii V.V. A regularization algorithm for singular controls of parabolic systems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2006. Vol. 42, N 1. P. 75–82.
10. Sarpkaya T. Computational methods with vortices — the 1988 Freeman Scholar Lecture. *Journal of Fluids Engineering*. 1989. Vol. 111/5, March. P. 1–60.

Надійшла до редакції 22.05.2017

С.А. Довгий, С.И. Ляшко, Д.И. Черний
АЛГОРИТМЫ МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ДЛЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Аннотация. Рассмотрены алгоритмы метода дискретных особенностей для вычислительных технологий. Алгоритмы преобразуют дискретизированные интегральные представления с разрывными функциями и изменяют порядок особенности в системе дискретных особенностей. Преобразования позволяют корректно вычислять значения функций и их производных при параметрической зависимости характеристических функций от времени. Алгоритмы вычислительных технологий применимы как для двумерных, так и для трехмерных гидродинамических задач нестационарного отрывного обтекания.

Ключевые слова: метод дискретных вихрей, метод дискретных особенностей, вычислительные технологии.

S.O. Dovgiy, S.I. Lyashko, D.I. Cherniy
ALGORITHMS OF DISCRETE SINGULARITIES METHOD FOR COMPUTATIONAL TECHNOLOGIES

Abstract. Algorithms of computational technologies for hydrodynamic models that are representable as a system of discrete features are considered. The algorithms transform discrete integral representations with discontinuous functions and change the order of singularities in a system of discrete singularities. The transformations allow us to correctly calculate the values of the functions and their derivatives under the parametric dependence of the characteristic functions on time. The algorithms of computational technologies are applicable for both two-dimensional and three-dimensional hydrodynamic problems of non-stationary detached flow.

Keywords: discrete vortex method, discrete singularity method, computational technologies.

Довгий Станіслав Олексійович,

чл.-кор. НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач відділу Інституту телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ, e-mail: pryjmalnya@gmail.com.

Ляшко Сергій Іванович,

чл.-кор. НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри Київського національного університету імені Тараса Шевченка, e-mail: lyashko.serg@gmail.com.

Черний Дмитро Іванович,

кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри Київського національного університету імені Тараса Шевченка, e-mail: Dmitro.Cherniy@gmail.com.