СИСТЕМНИЙ
АНАЛІЗ

Е.Ф. ГАЛБА, И.В. СЕРГИЕНКО

УДК 519.61

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ И ВЗВЕШЕННЫХ НОРМАЛЬНЫХ ПСЕВДОРЕШЕНИЙ С ВЫРОЖДЕННЫМИ ВЕСАМИ

Аннотация. Статья посвящена обзору работ, в которых построены и исследованы прямые и итерационные методы вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. Рассмотренные методы построены главным образом на основе статей авторов, посвященных развитию теории взвешенной псевдоинверсии в направлении исследования свойств взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. Использованы полученные и исследованные авторами разложения взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и произведения, предельные представления этих матриц, определения разложений взвешенных псевдообратных матриц на основе взвешенных сингулярных разложений матриц с вырожденными весами.

Ключевые слова: взвешенные псевдообратные матрицы с вырожденными весами, взвешенные нормальне псевдорешения с вырожденными весами, итерационные методы, регуляризованные задачи.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] впервые дано определение одного из вариантов взвешенных псевдообратных матриц (взвешенных обобщенных обратных матриц) с вырожденными весами (с положительно-полуопределенными весовыми матрицами). Кроме того, определены необходимые и достаточные условия существования и единственности рассмотренного варианта взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами. В статьях [2–4] исследованы другие варианты псевдообратных матриц с вырожденными весами. Определены необходимые и достаточные условия существования и единственности рассмотренных вариантов взвешенных псевдообратных матриц, а также взвешенные нормальные псевдорешения (решения задач методом взвешенных наименьших квадратов с минимальной взвешенной нормой) с вырожденными весами и установлена их связь с взвешенными псевдообратными матрицами. В упомянутых публикациях получены разложения взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и произведения с положительными показателями степеней и на их основе построены и исследованы итерационные методы для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. В работах [5–8] впервые получены различные варианты взвешенного сингулярного разложения матриц с вырожденными весами. Определены необходимые и достаточные условия существования одного из рассмотренных вариантов взвешенных сингулярных разложений матриц с вырожденными весами. На основе взвешенных сингулярных разложений матриц получены разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричные степенные ряды и произведения с отрицательными показателями степеней, а также предельные представления этих матриц. Последнее послужило основой для построения регуляризованных итерационных процессов вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений, а также регуляризованных задач для вычисления взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. В работе [9] изучена взвешенная псевдоинверсия с вырожденными весами для операторов в гильбертовом пространстве. В ряде работ (например, [10–12]) исследовалась *ML*-взвешенная псевдоинверсия. Отметим работы [13–16], в которых используется взвешенная псевдоинверсия с вырожденными весами, представляющими диагональные матрицы, при построении итерационных методов для решения линейных задач, параллельных алгоритмов, обработке изображений. Ниже будут рассмотрены взвешенные псевдообратные матрицы с вырожденными весами, определенные в работах [1–4].

Настоящая статья состоит из пяти разделов. В разд. 1 вводятся необходимые для дальнейшего изложения обозначения, даны определения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами и их связь со взвешенными нормальными псевдорешениями. В разд. 2 и 3 рассмотрены соответственно прямые и итерационные методы вычисления взвешенных псевдообратных матриц. В разд. 4 приведены прямые методы вычисления взвешенных нормальных псевдорешений. В разд. 5 рассмотрены итерационные методы вычисления взвешенных нормальных псевдорешений.

1. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ. ВЗВЕШЕННЫЕ ПСЕВДООБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ И ВЗВЕШЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ПСЕВДОРЕШЕНИЯ С ВЫРОЖДЕННЫМИ ВЕСАМИ

Отметим, что в дальнейшем везде предполагается вещественность используемых скаляров, векторов, матриц и пространств. Обозначим $\mathbb{R}^n$ n-мерное векторное пространство над полем действительных чисел, где векторы — суть матрицы размера $n \times 1$. Пусть H — симметричная положительно-определенная или положительно-полуопределенная матрица. Обозначим $\mathbb{R}^n(H)$ евклидово пространство в случае положительно-определенной метрики или псевдоевклидово в случае неотрицательной метрики, введенной скалярным произведением $(u, v)_H = (Hu, v)_E$, где $(u, v)_E = u^T v$. Норму (полунорму) в $\mathbb{R}^n(H)$ введем соотношением $\|\cdot\|_H = (u, u)_H^{1/2}$. В случае положительно-полуопределенной матрицы H через $\overline{\mathbb{R}}^n(H) \subset \mathbb{R}^n(H)$ и $\overline{\mathbb{R}}^n(H_{EE}^+) \subset \mathbb{R}^n(H_{EE}^+)$ будем обозначать подпространство векторов u, удовлетворяющих условию $HH_{EE}^+ u = H^{1/2} H_{EE}^{+1/2} u = u$, где $H_{EE}^{+1/2} = (H^{1/2})_{EE}^+$, E — единичная матрица, H_{EE}^+ — псевдообратная матрица Мура–Пенроуза к матрице H [17, 18]. В дальнейшем для матриц A используем обозначение $A_{EE}^{+p} = (A^p)_{EE}^+$, где p — целое или дробное число. Так как нуль-пространства матриц H, H_{EE}^+, HH_{EE}^+ и $H^{1/2} H_{EE}^{+1/2}$ совпадают [19], то полунормы $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_{H_{EE}^+}$ для векторов в $\mathbb{R}^n(H)$, $\mathbb{R}^n(H_{EE}^+)$ становятся нормами в $\overline{\mathbb{R}}^n(H)$, $\overline{\mathbb{R}}^n(H_{EE}^+)$.

Определим норму прямоугольной матрицы [20]. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, а $H \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — симметричная положительно-определенная или положительно-полуопределенная матрица, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — симметричная положительно-определенная или положительно-полуопределенная матрица, x — произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$. Предполагаем выполнение условий $rk(HA) = rk(A)$, $rk(AV) = rk(A)$, где $rk(L)$ — ранг матрицы L. Если матрицы H и V — положительно-определенные, то эти условия заведомо выполняются. Для множества матриц A, удовлетворяющих данным условиям, норму введем соотношением

$$\| A\|_{HV} = \sup_{x\neq 0} \frac{\| H^{1/2} AVx\|_{E_m}}{\| x\|_{E_n}} = \sup_{x\neq 0} \frac{(VA^T HAVx, x)_{E_m}^{1/2}}{(x, x)_{E_n}^{1/2}}, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, а нижний индекс при единичной матрице означает ее порядок.

При таком определении норма матрицы A имеет вид

$$\| A\|_{HV} = [\lambda_{\max}(VA^T HAV)]^{1/2},$$

где $\lambda_{\max}(L)$ — максимальное собственное значение матрицы L.

В [20] показано, что вещественная функция $\|\cdot\|_{HV}$, определенная формулой (1), при выполнении отмеченных условий является аддитивной (обобщенной) матричной нормой.

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$, а $H \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $M \in \mathbb{R}^{p\times p}$ — симметричные положительно-полуопределенные матрицы, причем удовлетворяется одно из условий: $AMM_{EE}^{+} = AM_{EE}^{+}M = A$, $MM_{EE}^{+}B = M_{EE}^{+}MB = B$, тогда (см. [20, 21]) из определения нормы матриц соотношением (1) следует $\| AB\|_{HV} \leq \| A\|_{HM} \, \| B\|_{M_{EE}^{+2}V}$.

В [22] определены взвешенная норма для квадратной матрицы, а также условия, при которых эта норма является мультипликативной матричной нормой. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — произвольная квадратная матрица, а $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — симметричная положительно-полуопределенная матрица, которые удовлетворяют условиям $rk(HA) = rk(AH) = rk(A)$. Тогда норма матрицы A определяется соотношением

$$\| A\|_{H} = \sup_{x\neq 0} \frac{\| Ax\|_{H}}{\| x\|_{H}} = \sup_{x\neq 0} \frac{\| H^{1/2} AH_{EE}^{+1/2} H^{1/2} x\|_{E}}{\| H^{1/2} x\|_{E}}, \; x \in \overline{\mathbb{R}}^{n}(H).$$

Во многих работах определялись симметризуемые матрицы и изучались их свойства. Симметризаторами в основном выступают положительно-определенные матрицы. В работах [23–25] изучались H-симметричные матрицы, где H предполагалась симметричной невырожденной знаконеопределенной матрицей. Определим симметризуемые матрицы с положительно-полуопределенными симметризаторами [22].

Определение 1. Квадратную матрицу U назовем симметризуемой слева или справа с помощью симметричных положительно-полуопределенных матриц M и N, если выполняются соответственно условия

$$MU = U^T M, \; rk(MU) = rk(U); \; UN = NU^T, \; rk(UN) = rk(U).$$

Определение 2. Матрицу Q, определенную равенством $Q^T HQ = I(H)$, где H — симметричная положительно-определенная (положительно-полуопределенная) матрица, $I(H)$ — матрица инерции для H, будем называть H-взвешенной ортогональной (псевдоортогональной).

Отметим, что основные вспомогательные утверждения, на базе которых исследовались фундаментальные свойства взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, приведены в работе [26].

В работах [1–4] установлены необходимые и достаточные условия существования и единственности различных вариантов взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами.

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$, а $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — симметричные положительно-полуопределенные матрицы. Тогда взвешенная псевдообратная матрица для A в работе [1] определяется как матрица $X = A^{+}_{BC}$, удовлетворяющая четырем условиям:

$$AXA = A\,,\ XAX = X\,,\ (BAX)^T = BAX\,,\ (XAC)^T = XAC, \tag{2}$$

т.е. рассматривается случай, когда идемпотентные матрицы AX и XA симметризуемые соответственно слева симметризатором B и справа симметризатором C. Кроме того, показано, что система матричных уравнений (2) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда выполняются следующие соотношения для рангов матриц:

$$rk(BA) = rk(A)\,,\ rk(AC) = rk(A)\,. \tag{3}$$

В работе [2] изучалась взвешенная псевдообратная матрица с вырожденными весами, определенная системой матричных уравнений

$$AXA = A\,,\ XAX = X\,,\ (BAX)^T = BAX\,,\ (CXA)^T = CXA\,, \tag{4}$$

т.е. когда обе идемпотентные матрицы AX и XA симметризуемы слева соответственно вырожденными симметризаторами B и C. В этой работе установлено, что необходимыми и достаточными условиями, при которых система матричных уравнений (4) имеет единственное решение, являются

$$rk(BA) = rk(A),\ AC^{+}_{EE}C = A, \tag{5}$$

В статье [3] изучалась взвешенная псевдообратная матрица с вырожденными весами, определенная системой матричных уравнений

$$AXA = A,\ XAX = X\,,\ (AXB)^T = AXB,\ (CXA)^T = CXA\,, \tag{6}$$

т.е. когда идемпотентная матрица AX симметризуема справа симметризатором B, а идемпотентная матрица XA симметризуема слева симметризатором C. Кроме того, определены необходимые и достаточные условия, при которых система матричных уравнений (6) имеет единственное решение

$$B^{+}_{EE}BA = A\,,\ AC^{+}_{EE}C = A\,. \tag{7}$$

В работе [4] изучалась взвешенная псевдообратная матрица с вырожденными весами, определенная системой матричных уравнений

$$AXA = A,\ XAX = X\,,\ (AXB)^T = AXB,\ (XAC)^T = XAC, \tag{8}$$

т.е. когда обе идемпотентные матрицы AX и XA симметризуемы справа соответственно симметризаторами B и C. В этой работе определены необходимые и достаточные условия, при которых система матричных уравнений (8) имеет единственное решение

$$B_{EE}^{+}BA = A,\ rk(AC) = rk(A). \tag{9}$$

Пусть

$$Ax = f,\ x \in \mathbb{R}^n,\ f \in \mathbb{R}^m \tag{10}$$

является системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с произвольной матрицей $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

В ряде работ устанавливается связь между взвешенными псевдообратными матрицами, определенными выше, и взвешенными нормальными псевдорешениями. Так, в работе [22] показано, что вектор $x^{+} = A_{BC}^{+} f$, где матрица A_{BC}^{+} определена условиями (2), (3), является в $\overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^{+})$ взвешенным нормальным псевдорешением СЛАУ (10) с положительно-полуопределенными весами B и C_{EE}^{+}, а именно единственным решением задачи: найти

$$\min_{x \in \overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^{+}) \cap \Omega} \| x \|_{C_{EE}^{+}},\ \Omega = \operatorname*{Arg\,min}_{x \in \mathbb{R}^n} \| Ax - f \|_B. \tag{11}$$

В работе [2] показано, что вектор $x^{+} = A_{BC}^{+} f$, где матрица A_{BC}^{+} определена условиями (4), (5), является в $\overline{\mathbb{R}}^n(C)$ взвешенным нормальным псевдорешением задачи (10) с положительно-полуопределенными весами B и C, а именно единственным решением задачи: найти

$$\min_{x \in \overline{\mathbb{R}}^n(C) \cap \Omega} \| x \|_C,\ \Omega = \operatorname*{Arg\,min}_{x \in \mathbb{R}^n} \| Ax - f \|_B. \tag{12}$$

В работе [3] показано, что вектор $x^{+} = A_{BC}^{+} f$, где матрица A_{BC}^{+} определена условиями (6), (7), является в $\overline{\mathbb{R}}^n(C)$ взвешенным нормальным псевдорешением СЛАУ (10) с положительно-полуопределенными весами B_{EE}^{+} и C, а именно единственным решением задачи: найти

$$\min_{x \in \overline{\mathbb{R}}^n(C) \cap \Omega} \| x \|_C,\ \Omega = \operatorname*{Arg\,min}_{x \in \mathbb{R}^n} \| Ax - f \|_{B_{EE}^{+}}. \tag{13}$$

В работе [4] показано, что вектор $x^{+} = A_{BC}^{+} f$, где матрица A_{BC}^{+} определена условиями (8), (9), является в $\overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^{+})$ взвешенным нормальным псевдорешением СЛАУ (10) с положительно-полуопределенными весами B_{EE}^{+} и C_{EE}^{+}, а именно единственным решением задачи: найти

$$\min_{x \in \overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^{+}) \cap \Omega} \| x \|_{C_{EE}^{+}},\ \Omega = \operatorname*{Arg\,min}_{x \in \mathbb{R}^n} \| Ax - f \|_{B_{EE}^{+}}. \tag{14}$$

2. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ С ВЫРОЖДЕННЫМИ ВЕСАМИ

Существует достаточно публикаций, посвященных прямым методам вычисления псевдообратных матриц Мура–Пенроуза. Многие из них являются обобщениями методов вычисления, обратных к невырожденным матрицам. Известные способы вычисления псевдообратных матриц Мура–Пенроуза основаны на матричной факторизации и методах ортогонализации, сингулярном разложении матриц, предельном представлении псевдообратных матриц Мура–Пенроуза (см., например, [19, 27–29] и ссылки к ним). Поэтому один из подходов построения прямых методов вычисления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами может быть основан на использовании прямых методов вычисления псевдообратных матриц Мура–Пенроуза, а именно на формулах представления взвешенных псевдообратных матриц через псевдообратные матрицы Мура–Пенроуза. В работе [30] приведены формулы для представления взвешенной псевдообратной матрицы с положительно-полуопределенными весами, удовлетворяющей условиям (2), (3), через псевдообратную матрицу Мура–Пенроуза.

Теорема 1. Взвешенная псевдообратная матрица A_{BC}^{+}, определенная условиями (2), (3), представляется в виде

$$A_{BC}^{+}=C^{1/2}(B^{1/2}AC^{1/2})_{EE}^{+}B^{1/2}=C^{1/2}(C^{1/2}A^{T}BAC^{1/2})_{EE}^{+}C^{1/2}A^{T}B=$$
$$=CA^{T}B^{1/2}(B^{1/2}ACA^{T}B^{1/2})_{EE}^{+}B^{1/2}.$$

Аналогично получаем следующие утверждения.

Теорема 2. Взвешенная псевдообратная матрица A_{BC}^{+}, определенная условиями (4), (5), представляется в виде

$$A_{BC}^{+}=C_{EE}^{+1/2}(B^{1/2}AC_{EE}^{+1/2})_{EE}^{+}B^{1/2}=C_{EE}^{+1/2}(C_{EE}^{+1/2}A^{T}BAC_{EE}^{+1/2})_{EE}^{+}C_{EE}^{+1/2}A^{T}B=$$
$$=C_{EE}^{+}A^{T}B^{1/2}(B^{1/2}AC_{EE}^{+}A^{T}B^{1/2})_{EE}^{+}B^{1/2}.$$

Теорема 3. Взвешенная псевдообратная матрица A_{BC}^{+}, определенная условиями (6), (7), представляется в виде

$$A_{BC}^{+}=C_{EE}^{+1/2}(B_{EE}^{+1/2}AC_{EE}^{+1/2})_{EE}^{+}B_{EE}^{+1/2}=$$
$$=C_{EE}^{+1/2}(C_{EE}^{+1/2}A^{T}B_{EE}^{+}AC_{EE}^{+1/2})_{EE}^{+}C_{EE}^{+1/2}A^{T}B_{EE}^{+}=$$
$$=C_{EE}^{+}A^{T}B_{EE}^{+1/2}(B_{EE}^{+1/2}AC_{EE}^{+}A^{T}B_{EE}^{+1/2})_{EE}^{+}B_{EE}^{+1/2}.$$

Теорема 4. Взвешенная псевдообратная матрица A_{BC}^{+}, определенная условиями (8), (9), представляется в виде

$$A_{BC}^{+}=C^{1/2}(B_{EE}^{+1/2}AC^{1/2})_{EE}^{+}B_{EE}^{+1/2}=C^{1/2}(C^{1/2}A^{T}B_{EE}^{+}AC^{1/2})_{EE}^{+}C^{1/2}A^{T}B_{EE}^{+}=$$
$$=CA^{T}B_{EE}^{+1/2}(B_{EE}^{+1/2}ACA^{T}B_{EE}^{+1/2})_{EE}^{+}B_{EE}^{+1/2}.$$

В работах [31, 2–4] получены соответственно представления взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (2), (3); (4), (5); (6), (7); (8), (9) в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц, т.е. доказаны утверждения.

Теорема 5. Матрица A_{BC}^{+}, удовлетворяющая (2), (3), представима в виде $A_{BC}^{+}=CSA^{T}B$, где $S=f(A^{T}BAC)$ — многочлен от матрицы $A^{T}BAC$ вида $S=-\alpha_{k}^{-1}[(A^{T}BAC)^{k-1}+\alpha_{1}(A^{T}BAC)^{k-2}+\ldots+\alpha_{k-1}E]$, α_{p}, $p=1,\ldots,n$, — коэффициенты характеристического многочлена $f(\lambda)=\lambda^{n}+\alpha_{1}\lambda^{n-1}+\ldots+\alpha_{n}=$ $=\det[\lambda E-A^{T}BAC]$, а α_{k} — последний отличный от нуля коэффициент этого многочлена.

Теорема 6. Матрица A^+_{BC}, удовлетворяющая условиям (4), (5), представима в виде $A^+_{BC} = C^+_{EE} S A^T B$, где $S = f(A^T B A C^+_{EE})$ — многочлен от матрицы $A^T B A C^+_{EE}$ вида $S = -\alpha_k^{-1} [(A^T B A C^+_{EE})^{k-1} + \alpha_1 (A^T B A C^+_{EE})^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1} E]$, α_p, $p = 1, \ldots, n$, — коэффициенты характеристического многочлена $f(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n = \det[\lambda E - A^T B A C^+_{EE}]$, а α_k — последний отличный от нуля коэффициент этого многочлена.

Теорема 7. Матрица A^+_{BC}, удовлетворяющая условиям (6), (7), представима в виде $A^+_{BC} = C^+_{EE} S A^T B^+_{EE}$, где $S = f(A^T B^+_{EE} A C^+_{EE})$ — многочлен от матрицы $A^T B^+_{EE} A C^+_{EE}$ вида $S = -\alpha_k^{-1} [(A^T B^+_{EE} A C^+_{EE})^{k-1} + \alpha_1 (A^T B^+_{EE} A C^+_{EE})^{k-2} + \ldots$ $\ldots + \alpha_{k-1} E]$, α_p, $p = 1, \ldots, n$, — коэффициенты характеристического многочлена $f(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n = \det[\lambda E - A^T B^+_{EE} A C^+_{EE}]$, а α_k — последний отличный от нуля коэффициент этого многочлена.

Теорема 8. Матрица A^+_{BC}, удовлетворяющая условиям (8), (9), представима в виде $A^+_{BC} = C S A^T B^+_{EE}$, где $S = f(A^T B^+_{EE} A C)$ — многочлен от матрицы $A^T B^+_{EE} A C$ вида $S = -\alpha_k^{-1} [(A^T B^+_{EE} A C)^{k-1} + \alpha_1 (A^T B^+_{EE} A C)^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1} E]$, α_p, $p = 1, \ldots, n$, — коэффициенты характеристического многочлена $f(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n = \det[\lambda E - A^T B^+_{EE} A C]$, а α_k — последний отличный от нуля коэффициент этого многочлена.

Из представлений взвешенных псевдообратных матриц в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц, приведенных в теоремах 5–8, следует соответствующее представление псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза, полученное в работе [32]. В [19] описана вычислительная процедура, позволяющая на основе представления псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза в терминах коэффициентов характеристического многочлена матрицы $A^T A$ вычислять псевдообратную матрицу Мура–Пенроуза за приемлемое число арифметических операций. Следовательно, возникает проблема построения соответствующих процедур для вычисления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами на основе их представлений, приведенных в теоремах 5–8.

В ряде работ (см. [26] и ссылки к ней) получены явные формулы для вычисления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами для матриц с рангом, равным единице. Так, при $rk(A) = 1$ имеем соответственно следующие формулы для вычисления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (2), (3); (4), (5); (6), (7); (8), (9):

$$A^+_{BC} = [\mathrm{tr}(A^T B A C)]^{-1} C A^T B, \quad A^+_{BC} = [\mathrm{tr}(A^T B A C^+_{EE})]^{-1} C^+_{EE} A^T B,$$
$$A^+_{BC} = [\mathrm{tr}(A^T B^+_{EE} A C^+_{EE})]^{-1} C^+_{EE} A^T B^+_{EE}, \quad A^+_{BC} = [\mathrm{tr}(A^T B^+_{EE} A C)]^{-1} C A^T B^+_{EE},$$

где $\mathrm{tr}(L)$ — след матрицы L.

Выше отмечалось, что прямые методы вычисления псевдообратных матриц Мура–Пенроуза также строились на основе предельного представления псевдообратных матриц Мура–Пенроуза. Для взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (2), (3), в работе [33] получены их разложения в матричные степенные ряды и произведения с отрицательными показателями степеней, на основе которых получены предельные представления псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (2), (3).

Для любого $p = 1, 2, \ldots$ имеем следующие предельные представления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (2), (3):

$$A^{+}_{\delta,\,p} = \lim_{\delta \to +0} \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (CA^T BA + \delta E)^{-k} CA^T B,$$
$$A^{+}_{\delta,\,p} = \lim_{\delta \to +0} \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} CA^T B (ACA^T B + \delta E)^{-k}. \tag{15}$$

Для любого $n = 1, 2, \ldots$ имеем следующее предельное представление взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (2), (3):

$$A^{+}_{BC} = \lim_{\delta \to +0} \prod_{k=0}^{n-1} \{E + \delta^{2^k} (CA^T BA + \delta E)^{-(2^k)}\} (CA^T BA + \delta E)^{-1} CA^T B. \tag{16}$$

Определение 3. Предельные представления (15), (16) названы в работе [33] многочленными предельными представлениями взвешенных псевдообратных матриц.

При $p = 1$ из (15) имеем одночленные предельные представления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, исследованные в работе [21]. При $p = 1$, $B = E_m$, $C = E_n$ имеем предельное представление псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза, предложенное и исследованное в работе [34].

В статьях [35, 36] исследованы другие виды разложений взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (2), (3), соответственно в матричные степенные ряды и в матричные степенные произведения. Они могут служить альтернативой рассмотренным выше разложениям. На основе этих разложений получены следующие предельные представления псевдообратных матриц с вырожденными весами [37], определенных условиями (2), (3).

Для любого $p = 1, 2, \ldots$ имеем следующее предельное представление взвешенной псевдообратной матрицы, определенной условиями (2), (3):

$$A^{+}_{BC} = \lim_{\alpha \to \infty} \alpha \sum_{k=1}^{p} (E + \alpha CA^T BA)^{-k} CA^T B. \tag{17}$$

Для любого $n = 1, 2, \ldots$ имеем следующее предельное представление взвешенной псевдообратной матрицы, определенной условиями (2), (3):

$$A^{+}_{BC} = \lim_{\alpha \to \infty} \alpha (E + \alpha CA^T BA)^{-1} \prod_{k=0}^{n-1} \{E + (E + \alpha CA^T BA)^{-(2^k)}\} CA^T B. \tag{18}$$

Для взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (4) и условиями

$$B^{+}_{EE} BA = A, \;\; AC^{+}_{EE} C = A, \tag{19}$$

в работах [5, 7] получены разложения в матричные степенные ряды и произведения с отрицательными показателями степеней на основе взвешенного сингулярного разложения матриц. На основании этих разложений получены предельные представления псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (4), (19).

Замечание. Здесь и далее вместо взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (4), (5) и (8), (9), при необходимости будем рассматривать взвешенные псевдообратные матрицы, определенные соответственно условиями (4), (19) и (8), (19), т.е. условия (5) и (9) заменим более жесткими условиями (19). Все свойства взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (4), (5) и (8), (9), справедливы для матриц, определенных условиями (4), (19) и (8), (19) (во втором случае также имеют место задачи (12) и (14), определяющие взвешенные нормальные псевдорешения). Такая замена условий в определении взвешенных псевдообратных матриц обусловлена тем, что взвешенные сингулярные разложения матриц с вырожденными весами получены при выполнении условий (19).

Для любого $p=1,2,\ldots$ (см. [5, 7]) имеем следующее предельное представление взвешенной псевдообратной матрицы, определенной условиями (4), (19):

$$A_{BC}^{+}=\lim_{\delta\to+0}\sum_{k=1}^{p}\delta^{k-1}(C_{EE}^{+}A^{T}BA+\delta E)^{-k}C_{EE}^{+}A^{T}B\,, \tag{20}$$

а для любого $n=1,2,\ldots$ имеем

$$A_{BC}^{+}=\lim_{\delta\to+0}\prod_{k=0}^{n-1}\{E+\delta^{2^{k}}(C_{EE}^{+}A^{T}BA+\delta E)^{-(2^{k})}\}(C_{EE}^{+}A^{T}BA+\delta E)^{-1}C_{EE}^{+}A^{T}B. \tag{21}$$

Для взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (8), (19), в работе [8] на основе взвешенного сингулярного разложения матриц получены следующие предельные представления взвешенных псевдообратных матриц.

Для любого $p=1,2,\ldots$ имеем следующее предельное представление взвешенной псевдообратной матрицы, определенной условиями (8), (19):

$$A_{BC}^{+}=\lim_{\delta\to+0}\sum_{k=1}^{p}\delta^{k-1}(CA^{T}B_{EE}^{+}A+\delta E)^{-k}CA^{T}B_{EE}^{+}, \tag{22}$$

а для любого $n=1,2,\ldots$ имеем

$$A_{BC}^{+}=\lim_{\delta\to+0}\prod_{k=0}^{n-1}\{E+\delta^{2^{k}}(CA^{T}B_{EE}^{+}A+\delta E)^{-(2^{k})}\}(CA^{T}B_{EE}^{+}A+\delta E)^{-1}CA^{T}B_{EE}^{+}. \tag{23}$$

Как отмечалось выше, один из известных способов вычисления псевдообратных матриц Мура–Пенроуза основан на сингулярном разложении матриц. Для вычисления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами можно использовать взвешенные сингулярные разложения матриц, предложенные и исследованные в публикациях [5–8]. В цитируемых работах на основе взвешенных сингулярных разложениях матриц получены разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами. В статьях [6, 7] получено взвешенное сингулярное разложение матриц с вырожденными весами при использовании ортогональных матриц. В этих работах определены необходимые и достаточные условия существования построенного взвешенного сингулярного разложения матриц с вырожденными весами.

Теорема 9. Пусть $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ и выполняются равенства (19), тогда:

1) для матрицы A существуют ортогональные матрицы $U\in\mathbb{R}^{m\times m}$ и $V\in\mathbb{R}^{n\times n}$ такие, что

$$U^{T}B^{1/2}AC_{EE}^{+1/2}V=\Sigma=\begin{cases}\left\|\operatorname{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_r,0,\ldots,0)\;O_m^{n-m}\right\|, & \text{если } m\le n,\\ \left\|\begin{matrix}\operatorname{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_r,0,\ldots,0)\\ O_{m-n}^{n}\end{matrix}\right\|, & \text{если } m\ge n,\end{cases} \tag{24}$$

$$A = B_{EE}^{+1/2} U \Sigma V^T C^{1/2}, \tag{25}$$

где r — ранг матрицы A, столбцы матрицы U — ортонормированные в $\mathbb{R}^m(E)$ собственные векторы матрицы $B^{1/2} A C_{EE}^{+} A^T B^{1/2}$, столбцы матрицы V — ортонормированные в $\mathbb{R}^n(E)$ собственные векторы матрицы $C_{EE}^{+1/2} A^T BAC_{EE}^{+1/2}$, σ_i, $i=1\ldots,r$, — квадратные корни из ненулевых собственных значений матрицы $B^{1/2} A C_{EE}^{+} A^T B^{1/2}$, $O_k^l \in \mathbb{R}^{k \times l}$ — нулевая матрица;

2) условия (19) являются необходимыми и достаточными для существования взвешенного сингулярного разложения матрицы A вида (25).

В [6, 7] получены разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (4), (19), на основе взвешенного сингулярного разложения матриц, определенного в теореме 9.

Теорема 10. Взвешенная псевдобратная матрица для A, определенная условиями (4), (19), имеет разложение

$$A_{BC}^{+} = C_{EE}^{+1/2} V \Sigma_{EE}^{+} U^T B^{1/2}, \tag{26}$$

где матрицы V, U, B, C определены в теореме 9, а матрица Σ_{EE}^{+} — псевдообратная матрица Мура–Пенроуза к матрице Σ, определенной в теореме 9.

Для определения матрицы A_{BC}^{+} необходимо разработать приемлемые алгоритмы вычисления взвешенных сингулярных чисел матрицы A, т.е. вычисления ортогональных матриц V и U, корней квадратных из симметричных положительно-полуопределенных матриц B и C и корней квадратных из псевдообратных по Муру–Пенроузу к этим матрицам. Вычисление матриц $B_{EE}^{+1/2}$ и $C_{EE}^{+1/2}$ базируется на решении проблемы собственных значений для симметричных матриц B и C [19]. В работах [38–40] предложены методы для вычисления обычных сингулярных чисел, идею которых можно использовать для построения процедур вычисления взвешенных сингулярных чисел с вырожденными весами.

Отметим, что в работах [5, 8] предложены и исследованы другие варианты взвешенных сингулярных разложений матриц с вырожденными весами на основе взвешенных ортогональных преобразований, а также получены разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами на основе полученных взвешенных сингулярных разложений матриц. На основании взвешенных сингулярных разложений матриц с вырожденными весами можно определить взвешенное сингулярное разложение матриц с положительно-определенными весами, полученное в работе [41].

3. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ С ВЫРОЖДЕННЫМИ ВЕСАМИ

В ряде работ предложены и исследованы разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричные степенные ряды и произведения с положительными и отрицательными показателями степеней. На основании этих разложений построены итерационные методы вычисления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами. Вначале рассмотрим разложения в матричные степенные ряды и произведения с положительными показателями степеней и итерационные процессы, построенные на основе этих разложений.

Для взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (4), (5), в работе [2] получены следующие разложения в матричные степенные ряды и произведения с положительными показателями степеней:

$$A_{BC}^{+}=\sigma\sum_{k=0}^{\infty}(E-\sigma C_{EE}^{+}A^{T}BA)^{k}C_{EE}^{+}A^{T}B,$$
$$A_{BC}^{+}=\sigma\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E-\sigma C_{EE}^{+}A^{T}BA)^{2^{k}}\}C_{EE}^{+}A^{T}B, \tag{27}$$
$$0<\sigma<2[\lambda_{\max}(C_{EE}^{+}A^{T}BA)]^{-1}. \tag{28}$$

Для этих разложений получены следующие оценки.

Теорема 11. Пусть A_{BC}^{+} — взвешенная псевдообратная матрица, определенная условиями (4), (5),

$$A_{\sigma,p}^{+}=\sigma\sum_{k=0}^{p-1}(E-\sigma C_{EE}^{+}A^{T}BA)^{k}C_{EE}^{+}A^{T}B\ ,\ \ p=1,2,\ldots,$$

действительное число σ определено в (28), тогда имеет место оценка

$$\| A_{BC}^{+}-A_{\sigma,p}^{+}\|_{CB_{EE}^{+1/2}}\le\max_{\lambda_i\ne0}\{\lambda_i^{-1/2}|1-\sigma\lambda_i|^{p}\}\,,$$

где λ_i — собственные значения матрицы $C_{EE}^{+}A^{T}BA$.

Теорема 12. Пусть A_{BC}^{+} — взвешенная псевдообратная матрица, определенная условиями (4), (5),

$$A_{\sigma,n}^{+}=\sigma\prod_{k=0}^{n-1}\{E+(E-\sigma C_{EE}^{+}A^{T}BA)^{2^{k}}\}C_{EE}^{+}A^{T}B,\ \ n=1,2,\ldots,$$

действительное число σ определено в (28), тогда имеет место оценка

$$\| A_{BC}^{+}-A_{\sigma,n}^{+}\|_{CB_{EE}^{+1/2}}\le\max_{\lambda_i\ne0}\{\lambda_i^{-1/2}|1-\sigma\lambda_i|^{2^{n}}\},$$

где λ_i определены в теореме 11.

Для взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (6), (7), в работе [3] получены следующие разложения в матричные степенные ряды и произведения с положительными показателями степеней:

$$A_{BC}^{+}=\sigma\sum_{k=0}^{\infty}(E-\sigma C_{EE}^{+}A^{T}B_{EE}^{+}A)^{k}C_{EE}^{+}A^{T}B_{EE}^{+}\ ,$$
$$A_{BC}^{+}=\sigma\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E-\sigma C_{EE}^{+}A^{T}B_{EE}^{+}A)^{2^{k}}\}C_{EE}^{+}A^{T}B_{EE}^{+}\ , \tag{29}$$
$$0<\sigma<2[\lambda_{\max}(C_{EE}^{+}A^{T}B_{EE}^{+}A)]^{-1}. \tag{30}$$

Для этих разложений получены следующие оценки.

Теорема 13. Пусть A_{BC}^{+} — взвешенная псевдообратная матрица, определенная условиями (6), (7),

$$A_{\sigma,p}^{+}=\sigma\sum_{k=0}^{p-1}(E-\sigma C_{EE}^{+}A^{T}B_{EE}^{+}A)^{k}C_{EE}^{+}A^{T}B_{EE}^{+}\ ,\ \ p=1,2,\ldots,$$

действительное число σ определено в (30), тогда имеет место оценка

$$\| A_{BC}^{+} - A_{\sigma,\,p}^{+} \|_{CB^{1/2}} \le \max_{\lambda_i \ne 0} \{ \lambda_i^{-1/2} |1 - \sigma\lambda_i|^{p} \},$$

где λ_i — собственные значения матрицы $C_{EE}^{+} A^{T} B_{EE}^{+} A$.

Теорема 14. Пусть A_{BC}^{+} — взвешенная псевдообратная матрица, определенная условиями (6), (7),

$$A_{\sigma,\,n}^{+} = \sigma \prod_{k=0}^{n-1} \{ E + (E - \sigma C_{EE}^{+} A^{T} B_{EE}^{+} A)^{2^{k}} \} C_{EE}^{+} A^{T} B_{EE}^{+}, \; n = 1, 2, \ldots,$$

действительное число σ определено в (30), тогда имеет место оценка

$$\| A_{BC}^{+} - A_{\sigma,\,n}^{+} \|_{CB^{1/2}} \le \max_{\lambda_i \ne 0} \{ \lambda_i^{-1/2} |1 - \sigma\lambda_i|^{2^{n}} \},$$

где λ_i определены в теореме 13.

Для взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (8), (9), в работе [4] получены следующие разложения в матричные степенные ряды и произведения с положительными показателями степеней:

$$A_{BC}^{+} = \sigma \sum_{k=0}^{\infty} (E - \sigma CA^{T} B_{EE}^{+} A)^{k} CA^{T} B_{EE}^{+},$$
$$A_{BC}^{+} = \sigma \prod_{k=0}^{\infty} \{ E + (E - \sigma CA^{T} B_{EE}^{+} A)^{2^{k}} \} CA^{T} B_{EE}^{+}, \tag{31}$$

$$0 < \sigma < 2[\lambda_{\max}(CA^{T} B_{EE}^{+} A)]^{-1}. \tag{32}$$

Для этих разложений получены оценки.

Теорема 15. Пусть A_{BC}^{+} — взвешенная псевдообратная матрица, определенная условиями (8), (9),

$$A_{\sigma,\,p}^{+} = \sigma \sum_{k=0}^{p-1} (E - \sigma CA^{T} B_{EE}^{+} A)^{k} CA^{T} B_{EE}^{+}, \; p = 1, 2, \ldots,$$

действительное число σ определено в (32), тогда имеет место оценка

$$\| A_{BC}^{+} - A_{\sigma,\,p}^{+} \|_{C_{EE}^{+} B^{1/2}} \le \max_{\lambda_i \ne 0} \{ \lambda_i^{-1/2} |1 - \sigma\lambda_i|^{p} \},$$

где λ_i — собственные значения матрицы $CA^{T} B_{EE}^{+} A$.

Теорема 16. Пусть A_{BC}^{+} — взвешенная псевдообратная матрица, определенная условиями (8), (9),

$$A_{\sigma,\,n}^{+} = \sigma \prod_{k=0}^{n-1} \{ E + (E - \sigma CA^{T} B_{EE}^{+} A)^{2^{k}} \} CA^{T} B_{EE}^{+}, \; n = 1, 2, \ldots,$$

действительное число σ определено в (32), тогда имеет место оценка

$$\| A_{BC}^{+} - A_{\sigma,\,n}^{+} \|_{C_{EE}^{+} B^{1/2}} \le \max_{\lambda_i \ne 0} \{ \lambda_i^{-1/2} |1 - \sigma\lambda_i|^{2^{n}} \},$$

где λ_i определены в теореме 15.

Для взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (2), (3), в работах [20] и [22, 42] получены соответственно следующие разложения в матричные степенные ряды и произведения с положительными показателями степеней:

$$A_{BC}^{+} = \sigma \sum_{k=0}^{\infty} (E - \sigma CA^T BA)^k CA^T B \,,$$

$$A_{BC}^{+} = \sigma \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E - \sigma CA^T BA)^{2^k}\} CA^T B, \tag{33}$$

$$0 < \sigma < 2[\lambda_{\max}(CA^T BA)]^{-1}. \tag{34}$$

Отметим, что кроме упомянутых разложений (27), (29), (31), (33) в матричные степенные ряды и произведения с положительными показателями степеней четырех типов взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в работах [20, 22, 42] предложены и другие виды разложений.

Из оценок, полученных в теоремах 11–16, следует, что при параметрах σ, удовлетворяющих условиям (28), (30), (32), на основании предложенных разложений взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и произведения можно вычислять приближенные значения взвешенных псевдообратных матриц. Причем погрешность приближения зависит от параметров σ, p и n. Оптимальное значение параметра σ определяется формулой (см. [20]) $\sigma_0 = 2[\lambda_{\min}^{*}(L) + \lambda_{\max}(L)]^{-1}$, где $\lambda_{\min}^{*}(L)$ — минимальное ненулевое собственное значение матрицы L (L — одна из матриц, определенных в теоремах 11–16).

Вначале при построении итерационного процесса для вычисления взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (4), (5), используем первую формулу в (27), т.е. их разложение в матричный степенной ряд с положительными показателями степеней. Тогда для вычисления A_{BC}^{+} получим итерационный процесс

$$X_1 = \sigma C_{EE}^{+} A^T B \,,\ X_k = X_{k-1} + \sigma C_{EE}^{+} A^T B\,(E - AX_{k-1})\,,\ k = 2, 3, \ldots \tag{35}$$

Оценка близости k-го приближения к A_{BC}^{+} по формулам (35) определена в теореме 11, где следует положить $p = k$.

На основании разложений взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричное степенное произведение (вторая формула в (27)) для вычисления матриц A_{BC}^{+}, определенных условиями (4), (5), получим итерационный процесс [2]

$$X_1 = \sigma\{E + (E - \sigma C_{EE}^{+} A^T BA)\} C_{EE}^{+} A^T B,$$

$$X_k = X_{k-1} + (E - \sigma C_{EE}^{+} A^T BA)^{2^{k-1}} X_{k-1}\,,\ k = 2, 3, \ldots \tag{36}$$

Оценка близости k-го приближения к A_{BC}^{+} по формулам (36) определена в теореме 12, где следует положить $n = k$.

Для вычисления взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (6), (7), используя первую формулу в (29), получаем итерационный процесс

$$X_1 = \sigma C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+},\ X_k = X_{k-1} + \sigma C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+} (E - AX_{k-1})\,,\ k = 2, 3, \ldots \tag{37}$$

Оценка близости k-го приближения к A_{BC}^{+} по схеме (37) определена в теореме 13, где следует положить $p=k$.

На основании разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (6), (7), в матричное степенное произведение (вторая формула в (29)) для вычисления A_{BC}^{+} получим итерационный процесс [3]

$$X_1=\sigma\{E+(E-\sigma C_{EE}^{+}A^TB_{EE}^{+}A)\}C_{EE}^{+}A^TB_{EE}^{+}, \qquad (38)$$

$$X_k=X_{k-1}+(E-\sigma C_{EE}^{+}A^TB_{EE}^{+}A)^{2^{k-1}}X_{k-1},\ k=2,3,\ldots$$

Оценка близости k-го приближения к A_{BC}^{+} по схеме (38) определена в теореме 14, где следует положить $n=k$.

Для вычисления взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (8), (9), используем первую формулу в (31) и получим итерационный процесс

$$X_1=\sigma CA^TB_{EE}^{+},\ X_k=X_{k-1}+\sigma CA^TB_{EE}^{+}(E-AX_{k-1}),\ k=2,3,\ldots \qquad (39)$$

Оценка близости k-го приближения к A_{BC}^{+} по схеме (39) определена в теореме 15, где следует положить $p=k$.

На основании разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (8), (9), в матричное степенное произведение (вторая формула в (31)) для вычисления A_{BC}^{+} получим итерационный процесс [4]

$$X_1=\sigma\{E+(E-\sigma CA^TB_{EE}^{+}A)\}CA^TB_{EE}^{+}, \qquad (40)$$

$$X_k=X_{k-1}+(E-\sigma CA^TB_{EE}^{+}A)^{2^{k-1}}X_{k-1},\ k=2,3,\ldots$$

Оценка близости k-го приближения к A_{BC}^{+} по схеме (40) определена в теореме 16, где следует положить $n=k$.

Для вычисления взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (2), (3), используем первую формулу в (33) и получаем итерационный процесс

$$X_0=\sigma CA^TB,\ X_{k+1}=X_k+\sigma CA^TB(E-AX_k),\ k=0,1,\ldots \qquad (41)$$

Оценку близости k-го приближения по формулам (41) к A_{BC}^{+} устанавливает следующая теорема (см. [20]).

Теорема 17. Итерационный процесс (41) при σ, определенным соотношением (34), сходится, причем имеет место оценка

$$\|A_{BC}^{+}-X_{k+1}\|_{C_{EE}^{+}V}\le q^{k+1}\|A_{BC}^{+}-X_0\|_{C_{EE}^{+}V},$$

где $q=\rho(A_{BC}^{+}A-\sigma CA^TBA)<1$, $\rho(L)$ — спектральный радиус матрицы L, $V\in\mathbb{R}^{m\times m}$ — произвольная симметричная положительно-определенная матрица.

На основании разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (2), (3), в матричное степенное произведение (вторая формула в (33)) для вычисления A_{BC}^{+} получим итерационный процесс

$$X_0=\sigma CA^TB,\ X_k=X_{k-1}+(E-\sigma CA^TBA)^{2^{k-1}}X_{k-1},\ k=1,2,\ldots \qquad (42)$$

Оценку близости k-го приближения к A_{BC}^{+} по схеме (42) устанавливает следующая теорема [42].

Теорема 18. Итерационный процесс (42) при параметре σ, определенным соотношением (34), сходится, причем имеет место оценка

$$\| A_{BC}^{+} - X_k \|_{C_{EE}^{+}V} \le q^{2^k} \| A_{BC}^{+} - X_0 \|_{C_{EE}^{+}V},$$

где q и матрица V определены в теореме 17.

Для вычисления взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (2), (3), в работе [42] предложен и исследован итерационный метод p-го порядка $(p \ge 2)$ скорости сходимости

$$X_0 = \sigma C A^T B\,, \; X_{k+1} = X_k + X_k \sum_{i=1}^{p-1} \Psi_k^i, \; \Psi_k = E - A X_k, \; k = 0, 1, \ldots \tag{43}$$

Теорема 19. Итерационный процесс (43) при σ, определенным соотношением (34), сходится, причем имеет место оценка

$$\| A_{BC}^{+} - X_{k+1} \|_{C_{EE}^{+}V} \le q^{p^{k+1}-1} \| A_{BC}^{+} - X_0 \|_{C_{EE}^{+}V},$$

где q и матрица V определены в теореме 17.

Далее рассмотрим разложения в матричные степенные ряды, произведения взвешенных псевдообратных матриц с отрицательными показателями степеней и регуляризованные итерационные процессы вычисления взвешенных псевдообратных матриц с положительно-полуопределенными весовыми матрицами, построенные на основе этих разложений.

Для взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (2), (3), в работе [33] получены разложения в матричные степенные ряды и произведения с отрицательными показателями степеней.

Теорема 20. Для произвольной матрицы $A \ne 0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, симметричных положительно-полуопределенных матриц $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, удовлетворяющих условиям (2), (3), и для действительного числа δ, $0 < \delta < \infty$, имеет место соотношение

$$A_{BC}^{+} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} (C A^T B A + \delta E)^{-k} C A^T B\,, \tag{44}$$

причем

$$\| A_{BC}^{+} - A_{\delta, p}^{+} \|_{C_{EE}^{+}V} \le \delta^p [\lambda_{\min}^{*} (C A^T B A) + \delta]^{-p} \| A_{BC}^{+} \|_{C_{EE}^{+}V}\,, \tag{45}$$

где

$$A_{\delta, p}^{+} = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (C A^T B A + \delta E)^{-k} C A^T B\,, \; p = 1, 2, \ldots,$$

V — любая симметричная положительно-определенная матрица, $\lambda_{\min}^{*}(L)$ — минимальное ненулевое собственное значение матрицы L.

В работе [33] также получены разложение взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричное степенное произведение

$$A_{BC}^{+} = \prod_{k=0}^{\infty} \{E + \delta^{2^k} (C A^T B A + \delta E)^{-(2^k)}\} (C A^T B A + \delta E)^{-1} C A^T B \tag{46}$$

и оценка

$$\| A_{BC}^{+} - A_{\delta, n}^{+} \|_{C_{EE}^{+}V} \le \delta^{2^n} [\lambda_{\min}^{*} (C A^T B A) + \delta]^{-(2^n)} \| A_{BC}^{+} \|_{C_{EE}^{+}V}, \tag{47}$$

где

$$A_{\delta, n}^{+} = \prod_{k=0}^{n-1} \{E + \delta^{2^k} (C A^T B A + \delta E)^{-(2^k)}\} (C A^T B A + \delta E)^{-1} C A^T B\,, \; n = 1, 2, \ldots$$

В [33] построены итерационные процессы для вычисления взвешенных псевдообратных матриц, полученных согласно (44), (46). На основании разложения (44) взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами в матричный степенной ряд для вычисления матрицы A_{BC}^{+}, удовлетворяющей условиям (2), (3), получили итерационный процесс

$$X_0 = 0,\ X_k = (CA^T BA + \delta E)^{-1} (\delta X_{k-1} + CA^T B),\ k = 1, 2, \dots \tag{48}$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (48) к A_{BC}^{+} определяется формулой (45), где следует положить $p = k$.

Далее для построения итерационного процесса используем разложение (46) взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами в матричное степенное произведение, на основании которого для вычисления A_{BC}^{+} получили итерационный процесс

$$\begin{gathered} X_0 = (CA^T BA + \delta E)^{-1} CA^T B, \\ X_k = X_{k-1} + \delta^{2^{k-1}} (CA^T BA + \delta E)^{-(2^{k-1})} X_{k-1},\ k = 1, 2, \dots \end{gathered} \tag{49}$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (49) к A_{BC}^{+} определяется формулой (47), где следует положить $n = k$.

На основании взвешенного сингулярного разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, предложенного в работе [7], получены и исследованы разложения в матричные степенные ряды и произведения взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (4), (19), с отрицательными показателями степеней.

Теорема 21. Для произвольной матрицы $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, симметричных положительно-полуопределенных матриц $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, удовлетворяющих условиям (4), (19), и для действительного числа $0 < \delta < \infty$ имеет место следующее разложение взвешенных псевдообратных матриц в матричный степенной ряд:

$$A_{BC}^{+} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} (C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E)^{-k} C_{EE}^{+} A^T B, \tag{50}$$

причем

$$\| A_{BC}^{+} - A_{\delta, p}^{+} \|_{CB_{EE}^{+1/2}} \leq \sigma_*^{-1} \delta^p (\delta + \sigma_*^2)^{-p}, \tag{51}$$

где

$$A_{\delta, p}^{+} = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E)^{-k} C_{EE}^{+} A^T B,\ p = 1, 2, \dots,$$

σ_* — минимальное ненулевое взвешенное сингулярное число матрицы A, определенное в теореме 9.

В работе [7] также получены разложение взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричное степенное произведение

$$A_{BC}^{+} = \prod_{k=0}^{\infty} \{E + \delta^{2^k} (C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E)^{-(2^k)}\} (C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E)^{-1} C_{EE}^{+} A^T B \tag{52}$$

и оценка

$$\| A_{BC}^{+} - A_{\delta, n}^{+} \|_{CB_{EE}^{+1/2}} \leq \sigma_*^{-1} \delta^{2^n} (\delta + \sigma_*^2)^{-(2^n)}, \tag{53}$$

где

$$A_{\delta, n}^{+} = \prod_{k=0}^{n-1} \{E + \delta^{2^k} (C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E)^{-(2^k)}\} (C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E)^{-1} C_{EE}^{+} A^T B,$$
$$n = 1, 2, \dots,$$

σ_* определено в теореме 21.

В [7] построены итерационные процессы для вычисления взвешенных псевдообратных матриц, основанных на разложениях (50), (52). На основании разложения (50) взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами в матричный степенной ряд для вычисления матрицы A_{BC}^{+}, определенной условиями (4), (19), получен итерационный процесс

$$X_0 = 0\,,\; X_k = (C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E)^{-1} (\delta X_{k-1} + C_{EE}^{+} A^T B)\,,\; k = 1, 2, \ldots \tag{54}$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (54) к A_{BC}^{+} определяется формулой (51), где следует положить $p = k$.

Для построения итерационного метода в [7] также используется разложение (52) взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами в матричное степенное произведение, на основании которого для вычисления матрицы A_{BC}^{+}, определенной условиями (4), (19), получен итерационный процесс

$$\begin{gathered} X_0 = (C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E)^{-1} C_{EE}^{+} A^T B\,, \\ X_k = X_{k-1} + \delta^{2^{k-1}} (C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E)^{-(2^{k-1})} X_{k-1}\,,\; k = 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{55}$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (55) к A_{BC}^{+} определяется формулой (53), где следует положить $n = k$.

На основании взвешенного сингулярного разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, предложенного в работе [8], получены и исследованы разложения в матричные степенные ряды и произведения взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (8), (19), с отрицательными показателями степеней.

Теорема 22. Для произвольной матрицы $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, симметричных положительно-полуопределенных матриц $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, удовлетворяющих условиям (8), (19), и для действительного числа $0 < \delta < \infty$ имеет место следующее разложение взвешенных псевдообратных матриц в матричный степенной ряд:

$$A_{BC}^{+} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} (CA^T B_{EE}^{+} A + \delta E)^{-k} CA^T B_{EE}^{+}, \tag{56}$$

причем

$$\| A_{BC}^{+} - A_{\delta,\, p}^{+} \|_{C_{EE}^{+} B^{1/2}} \le \sigma_*^{-1} \delta^p (\delta + \sigma_*^2)^{-p}, \tag{57}$$

где $A_{\delta,\, p}^{+} = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (CA^T B_{EE}^{+} A + \delta E)^{-k} CA^T B_{EE}^{+}$, $p = 1, 2, \ldots$; σ_* — корень квадратный из минимального ненулевого собственного значения матрицы $CA^T B_{EE}^{+} A$ (взвешенное сингулярное число матрицы A).

В работе [8] также получены разложение взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (8), (19), в матричное степенное произведение

$$A_{BC}^{+} = \prod_{k=0}^{\infty} \{E + \delta^{2^k} (CA^T B_{EE}^{+} A + \delta E)^{-(2^k)}\} (CA^T B_{EE}^{+} A + \delta E)^{-1} CA^T B_{EE}^{+} \tag{58}$$

и оценка

$$\| A_{BC}^{+} - A_{\delta,\, n}^{+} \|_{C_{EE}^{+} B^{1/2}} \le \sigma_*^{-1} \delta^{2^n} (\delta + \sigma_*^2)^{-(2^n)}, \tag{59}$$

где

$$A_{\delta,\, n}^{+} = \prod_{k=0}^{n-1} \{E + \delta^{2^k} (CA^T B_{EE}^{+} A + \delta E)^{-(2^k)}\} (CA^T B_{EE}^{+} A + \delta E)^{-1} CA^T B_{EE}^{+},\; n = 1, 2, \ldots$$

На основании разложений (56), (58) построены итерационные процессы для вычисления взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (8), (19). На основании разложения (56) для вычисления матрицы A_{BC}^{+}, определенной условиями (8), (19), получим итерационный процесс

$$X_0 = 0,\ X_k = (CA^T B_{EE}^{+} A + \delta E)^{-1} (\delta X_{k-1} + CA^T B_{EE}^{+}),\ k = 1, 2, \ldots \tag{60}$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (60) к A_{BC}^{+} определяется формулой (57), где следует положить $p = k$.

На основании разложения (58) для вычисления A_{BC}^{+}, определенной условиями (8), (19), получен итерационный процесс

$$\begin{gathered} X_0 = (CA^T B_{EE}^{+} A + \delta E)^{-1} CA^T B_{EE}^{+}, \\ X_k = X_{k-1} + \delta^{2^{k-1}} (CA^T B_{EE}^{+} A + \delta E)^{-(2^{k-1})} X_{k-1},\ k = 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{61}$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (61) к A_{BC}^{+} определяется формулой (59), где следует положить $n = k$.

Таким образом, на основании разложений в матричные степенные ряды и произведения взвешенных псевдообратных матриц с отрицательными показателями степеней выше были построены регуляризованные итерационные процессы вычисления взвешенных псевдообратных матриц с положительно-полуопределенными весовыми матрицами. Из оценок (45), (47), (51), (53), (57) (59) следует, что погрешность приближения регуляризованных итерационных процессов зависит от количества итераций, параметра δ и первого отличного от нулевого взвешенного сингулярного числа исходной матрицы. Очевидно, что параметр δ необходимо по возможности выбирать наименьшим. Но его величина при уменьшении ограничивается необходимой точностью вычисления обратных матриц к матрицам $CA^T BA + \delta E$, $C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E$, $CA^T B_{EE}^{+} A + \delta E$. Поэтому возникает проблема согласования параметра регуляризации δ с количеством итераций для достижения необходимой точности.

Как отмечено выше, в работах [35, 36] исследованы другие виды разложений взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (2), (3), соответственно в матричные степенные ряды и в матричные степенные произведения. Имеет место следующая теорема о разложении в матричные степенные ряды [35, 26].

Теорема 23. Для произвольной матрицы $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, симметричных положительно-полуопределенных матриц $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющих условиям (2), (3), и для действительного числа $0 < \alpha < \infty$ имеет место следующее разложение взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричные степенные ряды:

$$A_{BC}^{+} = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} (E + \alpha CA^T BA)^{-k} CA^T B. \tag{62}$$

Разложение в матричные степенные произведения устанавливает следующая теорема [36, 26].

Теорема 24. Для произвольной матрицы $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, симметричных положительно-полуопределенных матриц $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющих условиям (2), (3), и для действительного числа $0 < \alpha < \infty$ имеет место разложение взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричные степенные произведения

$$A_{BC}^{+}=\alpha(E+\alpha CA^{T}BA)^{-1}\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E+\alpha CA^{T}BA)^{-(2^{k})}\}CA^{T}B. \qquad (63)$$

Отметим, что кроме разложений (62), (63) в матричные степенные ряды и произведения с отрицательными показателями степеней взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в [35, 36] предложены и другие виды разложений.

Рассмотрим вопрос построения итерационных процессов на основании разложений (62), (63). Вначале используем разложение (62) взвешенной псевдообратной матрицы в матричный степенной ряд, на основании которого для вычисления A_{BC}^{+} получили итерационный процесс [35]

$$X_0=0\,;\ X_{k+1}=\Psi^{-p}X_k+\alpha\sum_{i=1}^{p}\Psi^{-i}CA^{T}B, \qquad (64)$$
$$\Psi=E+\alpha\, CA^{T}BA\,,\ k=0,1,\ \ldots,\ p=1,2,\ldots$$

Теорема 25. Итерационный процесс (64) при $0<\alpha<\infty$ сходится, причем имеет место оценка

$$\|A_{BC}^{+}-X_{k+1}\|_{C_{EE}^{+}V}\le q^{p(k+1)}\|A_{BC}^{+}\|_{C_{EE}^{+}V}, \qquad (65)$$

где $q=\rho[A_{BC}^{+}A(E+\alpha CA^{T}BA)^{-1}]=[1+\alpha\lambda_{\min}^{*}(CA^{T}BA)]^{-1}<1$, $\lambda_{\min}^{*}(L)$ определено в теореме 20, V — произвольная симметричная положительно-определенная матрица.

На основании разложения (63) взвешенной псевдообратной матрицы в матричное степенное произведение для вычисления A_{BC}^{+} [36] получили итерационный процесс

$$X_0=\alpha(E+\alpha CA^{T}BA)^{-1}CA^{T}B,\ X_k=X_{k-1}+(E+\alpha CA^{T}BA)^{-(2^{k-1})}X_{k-1}, \qquad (66)$$
$$k=1,2,\ldots$$

Теорема 26. Итерационный процесс (66) при $0<\alpha<\infty$ сходится, причем имеет место оценка

$$\|A_{BC}^{+}-X_k\|_{C_{EE}^{+}V}\le q^{2^{k}}\|A_{BC}^{+}\|_{C_{EE}^{+}V},$$

где q и матрица V определены в теореме 25.

Значение q зависит от параметра α и уменьшается с увеличением этого параметра. Для увеличения скорости сходимости итерационных процессов (64), (66) необходимо выбирать α достаточно большим. Но с увеличением параметра α будет возрастать обусловленность матрицы $E+\alpha C^{-1}A^{T}BA$, с которой связана точность вычисления обратной матрицы к матрице $E+\alpha C^{-1}A^{T}BA$. Поэтому для итерационного процесса (64) необходим выбор параметров α, p и определение числа итераций, а для итерационного процесса (66) — выбор параметра α и определение числа итераций при построении и реализации итерационных процессов.

4. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЗВЕШЕННЫХ НОРМАЛЬНЫХ ПСЕВДОРЕШЕНИЙ С ВЫРОЖДЕННЫМИ ВЕСАМИ

Один из известных способов вычисления нормальных псевдорешений основан на сингулярном разложении матриц (см., например, [40, 43, 44]). Для вычисления взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами можно использовать взвешенное сингулярное разложение матриц, предложенное и исследованное в работах [5–8], где на основе взвешенных сингулярных разложений матриц получены разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами. В работах [7, 8] получено взвешенное сингулярное разложение матриц с вырожденными весами при использовании ортогональных матриц. Определены необходимые и достаточные условия существования построенного взвешенного сингулярного разложения матриц с вырожденными весами (см. теорему 9 настоящей статьи). В [40] предложены алгоритмы для вычисления нормальных псевдорешений, которые можно использовать для построения процедур вычисления взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами, т.е. для решения задач (11)–(14).

Ниже рассмотрим регуляризованные задачи, построенные с помощью многочленных предельных представлений взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в работах [33, 7, 8].

На основе первого из (15) предельных представлений взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (2), (3), в работе [33] получена и исследована СЛАУ для решения задачи (11)

$$(CA^T BA + \delta E)^p x = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (CA^T BA + \delta E)^{p-k} CA^T Bf. \tag{67}$$

Теорема 27. Пусть x^+ — решение задачи (11), $x_{\delta,\, p}$ — решение одной из систем (67), тогда справедлива оценка

$$\| x^+ - x_{\delta,\, p} \|_{C_{EE}^+} \le \delta^p [\lambda^*_{\min}(CA^T BA) + \delta]^{-p} \| A_{BC}^+ \|_{C_{EE}^+ E_m} \| f \|_{E_m},$$

где $\lambda^*_{\min}(CA^T BA)$ — минимальное ненулевое собственное значение матрицы $CA^T BA$.

На основе предельного представления (16) взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (2), (3), в работе [33] получена и исследована СЛАУ для нахождения приближения к решению задачи (11)

$$\begin{gathered}\prod_{k=0}^{n-1} (CA^T BA + \delta E)^{2^k} (CA^T BA + \delta E) x = \\ = \prod_{k=0}^{n-1} \{ (CA^T BA + \delta E)^{2^k} + \delta^{2^k} E \} CA^T Bf.\end{gathered} \tag{68}$$

Теорема 28. Пусть x^+ — решение задачи (11), $x_{\delta,\, n}$ — решение одной из систем (68); тогда справедлива оценка

$$\| x^+ - x_{\delta,\, n} \|_{C_{EE}^+} \le \delta^{2^n} [\lambda^*_{\min}(CA^T BA) + \delta]^{-(2^n)} \| A_{BC}^+ \|_{C_{EE}^+ E_m} \| f \|_{E_m},$$

где $\lambda^*_{\min}(CA^T BA)$ определено в теореме 27.

На основе предельного представления (20) взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (4), (19), в работе [7] получена и исследована СЛАУ для нахождения приближения к взвешенному нормальному псевдорешению системы (10):

$$(C_{EE}^+ A^T BA + \delta E)^{p-m} x = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (C_{EE}^+ A^T BA + \delta E)^{p-m-k} C_{EE}^+ A^T Bf, \tag{69}$$
$$m = 0, 1, \ldots, p.$$

В частности, имеем

$$(C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E)^p x = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E)^{p-k} C_{EE}^{+} A^T Bf \quad \text{при} \quad m = 0, \tag{70}$$

$$(C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E) x = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E)^{1-k} C_{EE}^{+} A^T Bf \quad \text{при} \quad m = p-1, \tag{71}$$

$$x = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E)^{-k} C_{EE}^{+} A^T Bf \quad \text{при} \quad m = p. \tag{72}$$

При вычислении приближения к взвешенному нормальному псевдорешению по формуле (72) и при $p \geq 2$ для решения СЛАУ (71) необходимо определить обратную матрицу к матрице $C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E$. При решении СЛАУ (70) обратная матрица не вычисляется, но при этом может ухудшаться обусловленность матрицы $(C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E)^p$. Вопрос выбора СЛАУ для вычисления решения одной из систем (69), по-видимому, будет зависеть не столько от объема вычислительной работы, сколько от величины погрешности, вносимой вычислительным процессом.

Имеет место утверждение из [7].

Теорема 29. Пусть x^{+} — решение задачи (12), $x_{\delta, p}$ — решение одной из систем (69), тогда справедлива оценка

$$\| x^{+} - x_{\delta, p} \|_C \leq \sigma_*^{-1} \delta^p (\delta + \sigma_*^2)^{-p} \| f \|_B,$$

где σ_* — минимальный ненулевой диагональный элемент матрицы Σ, определенной в (24).

На основе предельного представления (21) взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (4), (19), в работе [7] получена и исследована следующая СЛАУ для нахождения приближения к взвешенному нормальному псевдорешению системы (10):

$$(C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E)^{n-m} x =$$
$$= \prod_{k=0}^{n-1} \{ (C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E)^{n-m-1} + \delta^{2^k} (C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E)^{n-m-(2^k)-1} \} C_{EE}^{+} A^T Bf, \tag{73}$$
$$m = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Имеет место следующее утверждение из [7].

Теорема 30. Пусть x^{+} — решение задачи (12), а $x_{\delta, n}$ — решение одной из систем (73), тогда справедлива оценка

$$\| x^{+} - x_{\delta, n} \|_C \leq \sigma_*^{-1} \delta^{2^n} (\delta + \sigma_*^2)^{-(2^n)} \| f \|_B,$$

где σ_* определено в теореме 29.

На основе предельного представления (22) взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (8), (19), в работе [8] получена и исследована следующее СЛАУ для нахождения приближения к взвешенному нормальному псевдорешению системы (10):

$$(CA^T B_{EE}^{+} A + \delta E)^{p-m} x = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (CA^T B_{EE}^{+} A + \delta E)^{p-m-k} CA^T B_{EE}^{+} f, \tag{74}$$
$$m = 0, 1, \ldots, p.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 31. Пусть x^{+} — решение задачи (14), $x_{\delta,\,p}$ — решение одной из систем (74), тогда справедлива оценка

$$\| x^{+} - x_{\delta,\,p} \|_{C_{EE}^{+}} \le \sigma_{*}^{-1} \delta^{p} (\delta + \sigma_{*}^{2})^{-p} \| f \|_{B_{EE}^{+}},$$

где σ_{*} — корень квадратный из минимального ненулевого собственного значения матрицы $CA^{T} B_{EE}^{+} A$.

На основе предельного представления (23) взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (8), (19), в работе [8] получена и исследована следующая СЛАУ для нахождения приближения к взвешенному нормальному псевдорешению системы (10):

$$(CA^{T} B_{EE}^{+} A + \delta E)^{n-m} x = \prod_{k=0}^{n-1} \{(CA^{T} B_{EE}^{+} A + \delta E)^{n-m-1} +$$

$$+ \delta^{2^{k}} (CA^{T} B_{EE}^{+} A + \delta E)^{n-m-(2^{k})-1} \} CA^{T} B_{EE}^{+} f, \;\; m = 0, 1, \ldots, n. \qquad (75)$$

Теорема 32. Пусть x^{+} — решение задачи (14), $x_{\delta,\,n}$ — решение одной из систем (75), тогда справедлива оценка

$$\| x^{+} - x_{\delta,\,n} \|_{C_{EE}^{+}} \le \sigma_{*}^{-1} \delta^{2^{n}} (\delta + \sigma_{*}^{2})^{-(2^{n})} \| f \|_{B_{EE}^{+}},$$

где параметр σ_{*} определен в теореме 31.

Таким образом, на основе многочленных предельных представлений взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами получены регуляризованные задачи для вычисления взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. Из оценок, приведенных в теоремах 27–32, следует, что погрешность приближения зависит от параметра δ и первого отличного от нулевого взвешенного сингулярного значения матрицы. Очевидно, что параметр δ следует выбирать по возможности наименьшим. Но его величина ограничивается с уменьшением необходимой точности вычисления обратной матрицы относительно матриц $CA^{T} BA + \delta E$, $C_{EE}^{+} A^{T} BA + \delta E$, $CA^{T} B_{EE}^{+} A + \delta E$. Поэтому при решении задач (67), (69), (74) стоит проблема согласования параметров δ, p и m, а при решении задач (68), (73), (75) — параметров δ, n и m. При решении прикладных задач исходные данные, как правило, задаются с погрешностью. Следовательно, возникает вопрос согласования параметров δ, p, m или δ, n, m с величиной погрешности исходных данных относительно получения необходимой точности приближенного решения регуляризованными методами. Это особенно важно, поскольку вычисление псевдорешений относится к классу некорректных задач (нет непрерывной зависимости решения задачи от изменения исходных данных). Однако имеются работы, в которых на основе взвешенного сингулярного разложения матриц с положительно-определенными весами проведен анализ влияния возмущений исходных данных на решения задач вычисления взвешенных нормальных псевдорешений с положительно-определенными весами (см., например, [45, 46]).

Отметим, что метод регуляризации для нахождения нормальных псевдорешений СЛАУ и для вычисления L-псевдорешений предложен и исследован соответственно в монографиях [47] и [48]. В работе [49] предложена расширенная регуляризованная задача для нахождения нормальных псевдорешений СЛАУ.

5. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЗВЕШЕННЫХ НОРМАЛЬНЫХ ПСЕВДОРЕШЕНИЙ С ВЫРОЖДЕННЫМИ ВЕСАМИ

Изложим построенные на основании разложений взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричные степенные ряды и произведения итерационные методы вычисления взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. Вначале рассмотрим итерационные процессы для вычисления взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами, построенные на основе разложения взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и произведения с положительными показателями степеней.

На основании разложения в матричный степенной ряд взвешенных псевдообратных матриц (первая формула в (27)), определенных условиями (4), (5), в работе [2] для решения задачи (12) получен итерационный процесс

$$x_1 = \sigma C_{EE}^{+} A^T Bf,\ x_k = x_{k-1} + \sigma C_{EE}^{+} A^T B(f - Ax_{k-1}),\ k = 2, 3, \ldots \qquad (76)$$

Теорема 33. Итерационный процесс (76) сходится к решению задачи (12), при этом имеет место оценка

$$\| x^{+} - x_k \|_C \le \max_{\lambda_i \ne 0} \{ \lambda_i^{-1/2} |1 - \sigma\lambda_i|^k \} \| f \|_B,$$

где x^{+} — решение задачи (12), λ_i — собственные значения матрицы $C_{EE}^{+} A^T BA$, а параметр σ определен в (28).

На основании разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричное степенное произведение (вторая формула в (27)) для решения задачи (12) получен итерационный процесс

$$x_1 = \sigma\{E + (E - \sigma C_{EE}^{+} A^T BA)\} C_{EE}^{+} A^T Bf,$$
$$x_k = x_{k-1} + (E - \sigma C_{EE}^{+} A^T BA)^{2^{k-1}} x_{k-1},\ k = 2, 3, \ldots \qquad (77)$$

Теорема 34. Итерационный процесс (77) сходится к решению задачи (12), при этом имеет место оценка

$$\| x^{+} - x_k \|_C \le \max_{\lambda_i \ne 0} \{ \lambda_i^{-1/2} |1 - \sigma\lambda_i|^{2^k} \} \| f \|_B,$$

где x^{+} и λ_i определены в теореме 33, а σ — в (28).

На основании разложения в матричный степенной ряд взвешенных псевдообратных матриц (первая формула в (29)), определенных условиями (6), (7), в работе [3] для решения задачи (13) получен итерационный процесс

$$x_1 = \sigma C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+} f,\ x_k = x_{k-1} + \sigma C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+} (f - Ax_{k-1}),\ k = 2, 3, \ldots \qquad (78)$$

Теорема 35. Итерационный процесс (78) сходится к решению задачи (13), при этом имеет место оценка

$$\| x^{+} - x_k \|_C \le \max_{\lambda_i \ne 0} \{ \lambda_i^{-1/2} |1 - \sigma\lambda_i|^k \} \| f \|_{B_{EE}^{+}},$$

где x^{+} — решение задачи (13), λ_i — собственные значения матрицы $C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+} A$, параметр σ определен в (30).

На основании разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричное степенное произведение (вторая формула в (29)) для решения задачи (13) получен итерационный процесс

$$x_1 = \sigma\{E + (E - \sigma C_{EE}^+ A^T B_{EE}^+ A)\} C_{EE}^+ A^T B_{EE}^+ f,$$
$$x_k = x_{k-1} + (E - \sigma C_{EE}^+ A^T B_{EE}^+ A)^{2^{k-1}} x_{k-1}, \ k = 2, 3, \ldots \tag{79}$$

Теорема 36. Итерационный процесс (79) сходится к решению задачи (13), причем имеет место оценка

$$\| x^+ - x_k \|_C \le \max_{\lambda_i \ne 0} \{ \lambda_i^{-1/2} |1 - \sigma\lambda_i|^{2^k} \} \| f \|_{B_{EE}^+},$$

где x^+, λ_i и σ определены в теореме 35.

На основании разложения в матричный степенной ряд взвешенных псевдообратных матриц (первая формула в (31)), определенных условиями (8), (9), в работе [4] для решения задачи (14) получен итерационный процесс

$$x_1 = \sigma C A^T B_{EE}^+ f, \ x_k = x_{k-1} + \sigma C A^T B_{EE}^+ (f - A x_{k-1}), \ k = 2, 3, \ldots \tag{80}$$

Теорема 37. Итерационный процесс (80) сходится к решению задачи (14), при этом имеет место оценка

$$\| x^+ - x_k \|_{C_{EE}^+} \le \max_{\lambda_i \ne 0} \{ \lambda_i^{-1/2} |1 - \sigma\lambda_i|^k \} \| f \|_{B_{EE}^+},$$

где x^+ — решение задачи (14), λ_i — собственные значения матрицы $CA^T B_{EE}^+ A$, параметр σ определен в (32).

На основании разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричное степенное произведение (вторая формула в (31)) для решения задачи (14) получен итерационный процесс

$$x_1 = \sigma\{E + (E - \sigma C A^T B_{EE}^+ A)\} C A^T B_{EE}^+ f,$$
$$x_k = x_{k-1} + (E - \sigma C A^T B_{EE}^+ A)^{2^{k-1}} x_{k-1}, \ k = 2, 3, \ldots \tag{81}$$

Теорема 38. Итерационный процесс (81) сходится к решению задачи (14), причем имеет место оценка

$$\| x^+ - x_k \|_{C_{EE}^+} \le \max_{\lambda_i \ne 0} \{ \lambda_i^{-1/2} |1 - \sigma\lambda_i|^{2^k} \} \| f \|_{B_{EE}^+},$$

где x^+, λ_i и σ определены в теореме 37.

На основании разложения в матричный степенной ряд взвешенных псевдообратных матриц (первая формула в (33)), определенных условиями (2), (3), в работе [22] для решения задачи (11) получен итерационный процесс

$$x_0 = \sigma C A^T B f, \ x_{k+1} = x_k + \sigma C A^T B (f - A x_k), \ k = 0, 1, \ldots \tag{82}$$

Теорема 39. Итерационный процесс (82) сходится к решению задачи (11), при этом имеет место оценка

$$\| x^+ - x_{k+1} \|_{C_{EE}^+} \le q^{k+1} \| x^+ - x_0 \|_{C_{EE}^+},$$

где x^+ — решение задачи (11), $q = \rho(A_{BC}^+ A - \sigma C A^T B A) < 1$, $\rho(L)$ — спектральный радиус матрицы L, а σ определен в (34).

На основании разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричное степенное произведение (вторая формула в (33)) в работе [41] для решения задачи (11) получен итерационный процесс

$$x_0 = \sigma CA^T Bf,\ x_k = x_{k-1} + (E - \sigma CA^T BA)^{2^{k-1}} x_{k-1},\ k = 1, 2, \ldots \tag{83}$$

Теорема 40. Итерационный процесс (83) сходится к решению задачи (11), при этом имеет место оценка

$$\| x^+ - x_k \|_{C_{EE}^+} \le q^{2^k} \| x^+ \|_{C_{EE}^+},$$

где x^+, σ и q определены в теореме 39.

Далее рассмотрим регуляризованные итерационные процессы для вычисления взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами, построенные на основе разложения взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и произведения с отрицательными показателями степеней.

На основании разложения в матричный степенной ряд (44) взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (2), (3), в работе [33] для решения задачи (11) получен итерационный процесс

$$x_0 = 0,\ x_k = (CA^T BA + \delta E)^{-1} (\delta x_{k-1} + CA^T Bf),\ k = 1, 2, \ldots \tag{84}$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (84) к решению задачи (11) определена в теореме 27, где следует положить $p = k$.

Итерационный процесс (84) можно переписать в виде

$$x_0 = 0,\ \delta x_k + CA^T BAx_k = \delta x_{k-1} + CA^T Bf,\ k = 1, 2, \ldots \tag{85}$$

Для реализации итерационного процесса (84) достаточно один раз вычислить обратную матрицу к матрице $CA^T BA + \delta E$, а при реализации итерационного процесса (85) необходимо на каждой итерации решать систему линейных алгебраических уравнений. Вопрос выбора итерационного метода, по-видимому, будет зависеть не столько от объема вычислительной работы, сколько от величины погрешности, вносимой вычислительным процессом.

Отметим, что положив в (85) $B = E_m$, $C = E_n$, получим итерационный процесс, предложенный и исследованный в монографии [50] при решении некорректных задач для операторных уравнений и названный авторами итерационным методом регуляризации. В работе [51] предложены и исследованы итерационные методы регуляризации решения задач 2-связного псевдообращения для операторных уравнений.

На основании разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (2), (3), в матричное степенное произведение (46) в работе [33] для решения задачи (11) получен итерационный процесс

$$\begin{gathered} x_0 = (CA^T BA + \delta E)^{-1} CA^T Bf, \\ x_k = x_{k-1} + \delta^{2^{k-1}} (CA^T BA + \delta E)^{-(2^{k-1})} x_{k-1},\ k = 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{86}$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (86) к решению задачи (11) определена в теореме 28, где следует положить $p = k$.

На основании разложения в матричный степенной ряд (62) взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (2), (3), в работе [35] для решения задачи (11) получен итерационный процесс

$$x_0 = 0\,;\; x_{k+1} = \Psi^{-p} x_k + \alpha \sum_{i=1}^{p} \Psi^{-i} CA^T Bf,\;\; \Psi = E + \alpha\, CA^T BA,\;\; k = 0, 1, \ldots \tag{87}$$

Теорема 41. Итерационный процесс (87) сходится при $0 < \alpha < \infty$ к решению задачи (11), при этом имеет место оценка

$$\| x^+ - x_{k+1} \|_{C_{EE}^+} \le q^{p(k+1)} \| x^+ \|_{C_{EE}^+},$$

где x^+ — решение задачи (11), параметр q определен в теореме 25.

На основании разложения в матричное степенное произведение (63) взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (2), (3), в работе [36] для решения задачи (11) получен итерационный процесс

$$x_0 = \alpha (E + \alpha CA^T BA)^{-1} CA^T Bf,\;\; x_k = x_{k-1} + (E + \alpha CA^T BA)^{-(2^{k-1})} x_{k-1}, \tag{88}$$

$$k = 1, 2, \ldots,\;\; 0 < \alpha < \infty.$$

Теорема 42. Итерационный процесс (88) сходится при $0 < \alpha < \infty$ к решению задачи (11), при этом имеет место оценка

$$\| x^+ - x_k \|_{C_{EE}^+} \le q^{2^k} \| x^+ \|_{C_{EE}^+},$$

где x^+ — решение задачи (11), а параметр q определен в теореме 25.

На основании разложения в матричный степенной ряд (50) взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (4), (5), в работе [7] для решения задачи (12) получен итерационный процесс

$$x_0 = 0\,,\;\; x_k = (C_{EE}^+ A^T BA + \delta E)^{-1} (\delta x_{k-1} + C_{EE}^+ A^T Bf)\,,\;\; k = 1, 2, \ldots \tag{89}$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (89) к x^+ определена в теореме 29, где следует положить $p = k$.

На основании разложения в матричное степенное произведение (52) взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (4), (19), в работе [7] для решения задачи (12) получен итерационный процесс

$$\begin{gathered} x_0 = (C_{EE}^+ A^T BA + \delta E)^{-1} C_{EE}^+ A^T Bf\,, \\ x_k = x_{k-1} + \delta^{2^{k-1}} (C_{EE}^+ A^T BA + \delta E)^{-(2^{k-1})} x_{k-1}\,,\;\; k = 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{90}$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (90) к x^+ определена в теореме 30, где следует положить $n = k$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье дан обзор работ, в которых построены и исследованы прямые и итерационные методы вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. Особое внимание уделяется построению и исследованию регуляризованных систем линейных уравнений и итерационных процессов для решения этих задач. Рассмотренные методы построены главным образом на основе статей, посвященных получению и исследованию разложений взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и произведения, а также многочленных предельных представлений этих матриц, представления взвешенных псевдообратных матриц в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц, разложения взвешенных псевдообратных матриц на основе взвешенных сингулярных разложений матриц с вырожденными весами. Остаются открытыми вопросы согласования параметров регуляризации регуляризованных линейных систем, построенных на основе многочленных предельных представлений взвешенных псевдообратных матриц, с другими параметрами, определяющими структуру этих систем, согласования параметров регуляризации регуляризованных итерационных методов с количеством итераций, учет влияния взвешенных сингулярных чисел и погрешности исходных данных на точность получаемых решений прямыми и итерационными методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ward J.F., Boullion T.L., Lewis T.O. Weighted pseudoinverses with singular weights. *SIAM J. Appl. Math.* 1971. Vol. 21, N 3. P. 480–482.
2. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Взвешенные псевдообратные матрицы и взвешенные нормальные псевдорешения с вырожденными весами. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2009. Т. 49, № 8. С. 1347–1363.
3. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Существование и единственность взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. *Український математичний журнал.* 2011. Т. 63, № 1. С. 80–101.
4. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Теоремы существования и единственности в теории взвешенной псевдоинверсии с вырожденными весами. *Кибернетика и системный анализ.* 2011. № 1. С. 14–33.
5. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Взвешенное сингулярное разложение и взвешенное псевдообращение матриц с вырожденными весами. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2012. Т. 52, № 12. С. 2115–2132.
6. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Необходимые и достаточные условия существования одного из вариантов взвешенного сингулярного разложения матриц с вырожденными весами. *Доклады РАН.* 2014. Т. 455, № 3. С. 261–264.
7. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Необходимые и достаточные условия существования взвешенного сингулярного разложения матриц с вырожденными весами. *Український математичний журнал.* 2015. Т. 67, № 3. С. 406–426.
8. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф. Взвешенное сингулярное разложение матриц с вырожденными весами на основе взвешенных ортогональных преобразований. *Кибернетика и системный анализ.* 2015. Т. 51, № 4. С. 28–43.
9. Corach G., Maestripieri A. Weighted generalized inverses, oblique projections, and least-squares problems. *Numer. Funct. Anal. and Optimization.* 2005. Vol. 26, N 6. P. 659–673.
10. Mitra S.K., Rao C.R. Projections under seminorms and generalized Moore–Penrose inverses. *Linear Algebra and Appl.* 1974. Vol. 9. P. 155–167.
11. Elden L. Perturbation theory for the least squares problem with linear equality constraints. *SIAM J. Numer. Anal.* 1980. Vol. 17, N 3. P. 338–350.
12. Elden L. A weighted pseudoinverse generalized singular values and constrained least squares problems. *BIT.* 1982. Vol. 22, N 4. P. 487–502.
13. Censor Y., Gordon D., Gordon R. Component averaging: An efficient iterative parallel algorithm for large and sparse unstructured problems. *Parallel Comput.* 2001. Vol. 27, N 6. P. 777–808.
14. Censor Y., Gordon D., Gordon R. BICAV: an inherently parallel algorithm for sparse systems with pixel-dependent weighting. *IEEE Transactions on Medical Imaging.* 2001. Vol. 20. P. 1050–1060.
15. Censor Y., Elfving T. Block-iterative algorithms with diagonally skaled oblique projections for the linear feasibility problem. *SIAM J. Matrix. Anal.* 2002. Vol. 24, N 1. P. 40–58.
16. Censor Y., Elfving T. Iterative algorithms with seminorm-induced oblique projections. *Abstract Appl. Anal.* 2003. N 7. P. 387–406.
17. Moore E.H. On the reciprocal of the general algebraic matrix. *Abstract. Bull. Amer. Math. Soc.* 1920. Vol. 26. P. 394–395.
18. Penrose R. A generalized inverse for matrices. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 1955. Vol. 51, N 3. P. 406–413.
19. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. Москва: Наука, 1977. 223 с.
20. Галба Е.Ф., Молчанов И.Н., Скопецкий В.В. Итерационные методы для вычисления взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами. *Кибернетика и системный анализ.* 1999. № 5. С. 150–169.

21. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Предельные представления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами и регуляризация задач. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2004. Т. 44, № 11. С. 1928–1946.

22. Галба Е.Ф. Итерационные методы для вычисления взвешенного нормального псевдорешения с вырожденными весами. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 1999. Т. 39, № 6. С. 882–896.

23. Lancaster P., Rozsa P. Eigenvectors of H-self-adjoint matrices. *Z. Angew. Math. und Mech.* 1984. Vol. 64, N 9. S. 439–441.

24. Gohberg I., Lancaster P., Rodman L. Indefinite linear algebra and applications. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser Verlag, 2005. 357 p.

25. Икрамов Х.Д. Об алгебраических свойствах классов псевдоперестановочных и H-самосопряженных матриц. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 1992. Т. 32, № 8. С. 155–169.

26. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф. Взвешенная псевдоинверсия с вырожденными весами. *Кибернетика и системный анализ.* 2016. Т. 52, № 5. С. 56–80.

27. Nashed M. Z. Generalized inverses and applications. New York: Acad. Press, 1976. 1054 p.

28. Ваарманн О. Обобщенные обратные отображения. Таллин: Валгус, 1988. 120 с.

29. Ben-Israel A., Greville T.N.E. Generalized inverses: Theory and applications. Second edition. New York: Springer Verlag, 2003. 420 p.

30. Галба Е.Ф. Представление взвешенной псевдообратной матрицы через другие псевдообратные матрицы. *Доповіді НАН України.* 1997. № 4. С. 12–17.

31. Галба Е.Ф. Взвешенное псевдообращение матриц с вырожденными весами. *Український математичний журнал.* 1994. Т. 46, № 10. С. 1323–1327.

32. Decell H.P. An application of the Cayley–Hamilton theorem to generalized matrix inversion. *SIAM Rev.* 1965. Vol. 7, N 4. P. 526–528.

33. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Разложения и многочленные предельные представления взвешенных псевдообратных матриц. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2007. Т. 47, № 5. С. 747–766.

34. Broeder G.G., Charnes A. Contributions to the theory generalized inverses for matrices. *ONR Res. Memo.* Northwestern Univ. 1962. N 39.

35. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Разложение в ряды взвешенных псевдообратных матриц и итерационные методы для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений. *Кибернетика и системный анализ.* 2006. № 1. С. 32–62.

36. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Разложение взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричные степенные произведения и итерационные методы. *Український математичний журнал.* 2007. Т. 59, № 9. С. 1269–1290.

37. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Представления и разложения взвешенных псевдообратных матриц, итерационные методы и регуляризация задач. 2. Вырожденные веса. *Кибернетика и системный анализ.* 2008. № 3. С. 75–102.

38. Golub G., Kahan W. Calculating the singular values and pseudoinverse of matrix. *J. SIAM Numer. Anal.* 1965. Ser. B2. P. 205–224.

39. Golub G., Kahan W. Least squares, singular values, and matrix approximations. *Aplikace matematiku.* 1968. Vol. 13. P. 44–51.

40. Golub G., Reinsch C. Singular values decompositions and least squares solutions. *Numer. Math.* 1970. Vol. 14. P. 403–420.

41. Галба Е.Ф. Взвешенное сингулярное разложение и взвешенное псевдообращение матриц. *Український математичний журнал.* 1996. Т. 48, № 10. С. 1426–1430.

42. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Итерационные методы высоких скоростей сходимости для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2005. Т. 45, № 10. С. 1731–1755.

43. Уилкинсон Дж., Райнш К. Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра. Москва: Машиностроение, 1976. 392 с.

44. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. Москва: Наука, 1986. 232 с.

45. Химич А.Н., Николаевская Е.А. Анализ достоверности компьютерных решений систем линейных алгебраических уравнений с приближенно заданными исходными данными. *Кибернетика и системный анализ.* 2008. № 6. С. 83–95.

46. Николаевская Е.А., Химич А.Н. Оценка погрешности взвешенного нормального псевдорешения с положительно-определенными весами. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2009. Т. 49, № 3. С. 422–430.

47. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1974. 288 с.

48. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. Москва: Наука, 1987. 240 с.

49. Жданов А.И. Метод расширенных регуляризованных нормальных уравнений. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2012. Т. 52, № 2. С. 205–208.

50. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах. Москва: Наука, 1986. 183 с.

51. Уваров В.Е., Шафиев Р.А. Итерационный метод регуляризации задачи 2-связного псевдообращения для операторного уравнения. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2006. Т. 46, № 10. С. 1735–1743.

Надійшла до редакції 22.05.2017

Є.Ф. Галба, І.В. Сергієнко

МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ЗВАЖЕНИХ ПСЕВДООБЕРНЕНИХ МАТРИЦЬ І ЗВАЖЕНИХ НОРМАЛЬНИХ ПСЕВДОРОЗВ'ЯЗКІВ З ВИРОДЖЕНИМИ ВАГАМИ

Анотація. Стаття присвячена огляду робіт, в яких побудовано і досліджено прямі та ітераційні методи обчислення зважених псевдообернених матриць і зважених нормальних псевдорозв'язків з виродженими вагами. Розглянуті методи побудовано головним чином на основі статей авторів, присвячених розвитку теорії зваженої псевдоінверсії в напрямку дослідження властивостей зважених псевдообернених матриць і зважених нормальних псевдорозв'язків з виродженими вагами. Використано одержані та досліджені авторами розклади зважених псевдообернених матриць в матричні степеневі ряди і добутки, граничні представлення цих матриць, визначення розкладу зважених псевдообернених матриць на основі зважених сингулярних розкладів матриць з виродженими вагами.

Ключові слова: зважені псевдообернені матриці з виродженими вагами, зважені нормальні псевдорозв'язки з виродженими вагами, ітераційні методи, регуляризовані задачі.

E.F. Galba, I.V. Sergienko

METHODS FOR COMPUTING WEIGHTED PSEUDOINVERSE MATRICES AND WEIGHTED NORMAL PSEUDOSOLUTIONS WITH SINGULAR WEIGHTS

Abstract. This paper surveys articles in which direct and iterative methods are constructed and investigated for computing weighted pseudoinverse matrices and weighted normal pseudosolutions with singular weights. The considered methods are mainly constructed based on the authors' articles devoted to the development of the theory of weighted pseudoinversion in the direction of investigating the characteristics of both weighted pseudoinverse matrices and weighted normal pseudosolutions with singular weights. This article uses the following results obtained and investigated by the authors: expansions of weighted pseudoinverse matrices into matrix power series and products, limit representations of such matrices, and determination of decompositions of weighted pseudoinverse matrices based on weighted singular decompositions of matrices with singular weights.

Keywords: weighted pseudoinverse matrix with singular weights, weighted normal pseudosolution with singular weights, iterative method, regularized problem.

Галба Евгений Федорович,
доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: e.f.galba@ukr.net.

Сергиенко Иван Васильевич,
академик НАН Украины, директор Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: aik@publik.icub.kiev.ua.