УДК 519.17

О.В. КРИВЦУН

ПРЕДСТАВЛЕННЯ ФРАГМЕНТАРНИХ СТРУКТУР ОРІЄНТОВАНИМИ ГРАФАМИ

Анотація. Досліджено властивості фрагментарних структур і встановлено зв'язок між ними та розміченими ациклічними орієнтованими графами з одним джерелом, а також встановлено відповідність класів ізоморфних фрагментарних структур нерозміченим ациклічним орієнтованим графам певного виду, які називаються допустимими графами. Визначено поняття розмірності допустимого графа та відповідних йому ізоморфних фрагментарних структур. Отримано вираз для нижньої оцінки розмірності. Доведено теорему про властивості допустимих графів. Підраховано кількості фрагментарних структур та класів ізоморфних фрагментарних структур малих розмірностей.

Ключові слова: фрагментарна структура, частково впорядкована множина, ациклічний орграф, гіперкуб.

ВСТУП

Фрагментарні структури є узагальненням відомих комбінаторних конструкцій — матроїдів, грідоїдів, спадкових систем [1–3]. Їх часто використовують для пошуку наближених оптимальних розв'язків низки дискретних оптимізаційних задач [4–8], застосовуючи фрагментарний алгоритм побудови максимального за включенням фрагменту, який є «жадібним» алгоритмом на фрагментарній структурі. Згідно з означенням [9, 10] фрагментарна структура — це впорядкована пара (X, Φ), де X — це скінченна множина, $\Phi = \{E_0, E_1, \dots, E_n\}$ — сім'я її підмножин, $E_i \subseteq X$, $i = 0, \dots, n$, таке, що $\forall E_i \in \Phi$, $E_i \neq \varnothing$, $\exists\, e \in E_i$, $E_i \setminus \{e\} \in \Phi$. Елементи множини Φ називаються допустимими фрагментами (фрагментами); одноелементні множини називаються елементарними фрагментами; фрагмент, який не є підмножиною жодного іншого фрагменту, називається максимальним [9]. Множину X будемо називати універсальною множиною. З означення фрагментарної структури (X, Φ) випливає, що сім'я підмножин Φ завжди містить допустимий фрагмент — порожню множину ($E_0 \equiv \varnothing$).

Відповідно до означення фрагментарної структури кожен максимальний фрагмент можна побудувати послідовним додаванням елементів, починаючи з порожньої множини, за умови, що на кожному кроці побудована множина є допустимим фрагментом. Такий алгоритм називається фрагментарним.

Результат роботи фрагментарного алгоритму визначають заданим лінійним порядком на універсальній множині X. Таким чином, будь-який максимальний фрагмент можна описати деякою перестановкою елементів з X. Нехай $A \in \Phi$, $x \in X$. Умова, за якої $A \cup \{x\} \in \Phi$, називається умовою приєднання елемента x. Зазначимо, що фрагментарний алгоритм є своєрідним узагальненням поняття жадібного алгоритму.

Показано що, якщо час, необхідний для перевірки умови приєднання, обмежений поліномом степеня k, тобто становить $O(n^k)$, тоді часова складність цього фрагментарного алгоритму становить $O(n^{k+2})$, де n — кількість елементів універсальної множини. Таким чином, якщо існує алгоритм поліноміальної складності за кількістю елементів універсальної множини для перевірки умови приєднання, тоді задачу побудови максимального фрагмента розв'язують за поліноміальний час.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Означення 1. Підмножини A, B множини X, для яких $B = A \setminus \{x\}$, де $x \in X$, будемо називати послідовними і будемо говорити, що B слідує за A.

Означення 2. Розмітка орієнтованого графа — це така відповідність між вершинами графа і підмножинами множини X, за якої джерелу відповідає порожня множина, а суміжні вершини відповідають послідовним підмножинам, до того ж підмножина початкової вершини дуги слідує за підмножиною кінцевої вершини.

Будь-яка фрагментарна структура породжує деяку розмітку орграфа. Приклади таких орграфів наведено на рис. 1. Орграф, зображений на рис. 1, *б*, породжений фрагментарною структурою із сім'єю $\Phi = \{\varnothing, \{x_1\}, \{x_3\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}\}$. Але не можна стверджувати, що будь-яка розмітка відповідає фрагментарній структурі.

Розмічені орграфи на рис. 2, *а*, *б* не відповідають жодній фрагментарній структурі. Змінимо розмітку цих орграфів так, щоб отримати ізоморфні їм орграфи, які відповідають фрагментарним структурам із сім'ями $\Phi' = \{\varnothing, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}\}$ для орграфа на рис. 3, *а* та $\Phi'' = \{\varnothing, \{x_5\}, \{x_3\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}\}$ для орграфа на рис. 3, *б*.

Розглянемо тепер таку задачу: які графи і які розмітки можуть описувати фрагментарні структури?

Будемо називати ізоморфними фрагментарні структури, що описуються ізоморфними орграфами.

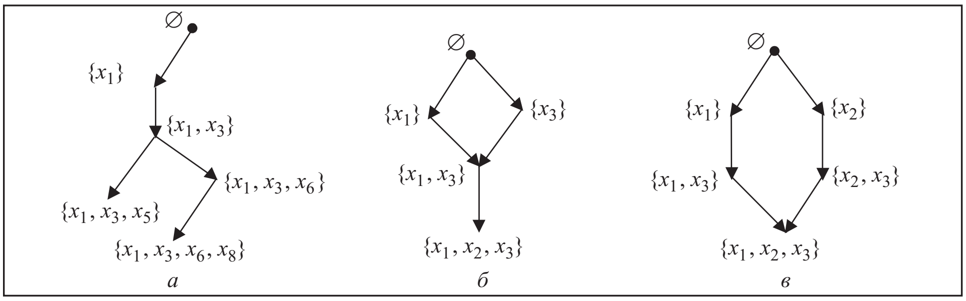

Рис. 1. Розмічені орграфи, що зображають фрагментарні структури

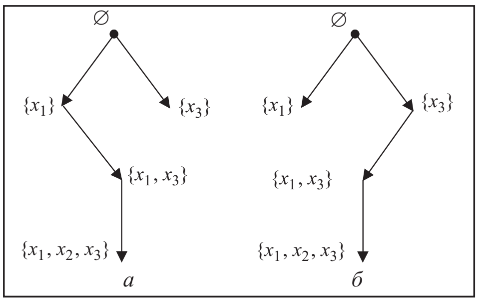

Рис. 2. Ізоморфні розмічені ациклічні орграфи, отримані з графа на рис. 1, *б*, що не відповідають фрагментарним структурам

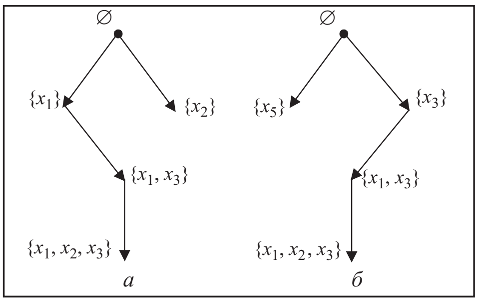

Рис. 3. Ізоморфні розмічені ациклічні орграфи, що відповідають ізоморфним фрагментарним структурам

УМОВИ ВІДПОВІДНОСТІ ОРГРАФІВ ФРАГМЕНТАРНИМ СТРУКТУРАМ

Означення 3. Допустимим графом називається нерозмічений зв'язний орграф з одним джерелом, який відповідає деякому класу F ізоморфних фрагментарних структур таким чином, що його суміжні вершини відповідають послідовним фрагментам цих структур, до того ж напрям дуги збігається з напрямом наступності фрагментів.

Лема 1. Якщо нерозмічений орграф з одним джерелом є допустимим, тоді:

1) джерело є кореневою вершиною;

2) орграф є ациклічним;

3) для будь-якої вершини v_i орграфа всі орієнтовані шляхи від кореня до цієї вершини мають однакову довжину l_i, яка є номером ярусу, якому належить вершина v_i;

4) напівстепінь заходу будь-якої вершини не перевершує номер ярусу цієї вершини.

Доведення. Без втрати загальності можна вважати, що джерело графа відповідає порожній множині. Оскільки джерело єдине, то існує шлях від джерела до кожної вершини, тобто джерело є кореневою вершиною. Додавання дуги до вершини відповідає додаванню одного елемента до відповідного цій вершині фрагмента і отриманню послідовного фрагмента. Таким чином, кількість дуг у будь-якому шляху від кореня до заданої вершини завжди однакова. Звідси випливає, що довжина шляху від кореня до заданої вершини визначає потужність фрагмента цієї вершини. Дуги завжди напрямлені за зростанням потужностей фрагментів, тобто не існує зворотного шляху до будь-якої вершини. Це означає, що граф є ациклічним.

Доведемо четверте твердження. Нехай вершині v_j відповідає фрагмент $E_j = \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}\}$. Оскільки для будь-якої попередньої суміжної вершини шлях від кореня на одиницю менший, то вона відповідає фрагменту, потужність якого на одиницю менша і який можна отримати вилученням із E_j деякого елемента. Існує k способів вилучення одного елемента із множини потужністю k. Тому кількість попередніх суміжних вершин не може бути більшою, ніж k, тобто напівстепінь заходу вершини v_j має бути не більшою, ніж k. ■

Будемо називати далі нерозмічений орграф з одним джерелом, яке є коренем, нерозміченим орграфом з однією кореневою вершиною.

На рис. 4 зображено нерозмічені ациклічні орграфи з однією кореневою вершиною, які не є допустимими. Орграф (див. рис. 4, *а*) не задовольняє першій умові леми 1, тому що два шляхи від кореня до стоку графа мають різну довжину. Орграф (див. рис. 4, *б*) не відповідає другій умові леми 1 — усі шляхи від кореня до стоку орграфа мають довжину 2, а напівстепінь заходу стоку дорівнює 3, тобто є більшою ніж довжина шляхів.

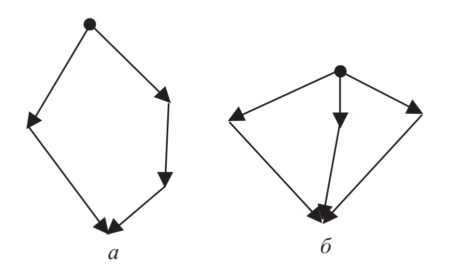

Рис. 4. Нерозмічені ациклічні орграфи, які не відповідають фрагментарним структурам

Розглянемо скінченну множину $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, потужність якої $|X| = m$. Кожній підмножині $A \subseteq X$ можна поставити у відповідність точку в просторі $(\alpha_m, \alpha_{m-1}, \ldots, \alpha_1) \in R^m$, де $\alpha_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_i \in A, \\ 0, & \text{якщо } x_i \notin A. \end{cases}$

Будемо розглядати точки $\{(\alpha_m, \alpha_{m-1}, \ldots, \alpha_1)\}$ як вершини орієнтованого графа, причому з вершини, що відповідає множині A_1, виходить дуга до вершини, що відповідає множині A_2, тоді і тільки тоді, коли $A_1 \subset A_2$ та $|A_2 \setminus A_1| = 1$.

Двійковий m-вимірний орієнтований куб, що визначає впорядкований булеан, є діаграмою Гассе [11]. Він має одне джерело (кореневу вершину) і один сток. На рис. 5 зображено орієнтовані гіперкуби розмірностей 2 і 3 розмічені так, що відповідають діаграмам Гассе.

Необхідну умову того, що нерозмічений ациклічний орграф з однією кореневою вершиною є допустимим, наводить таке твердження.

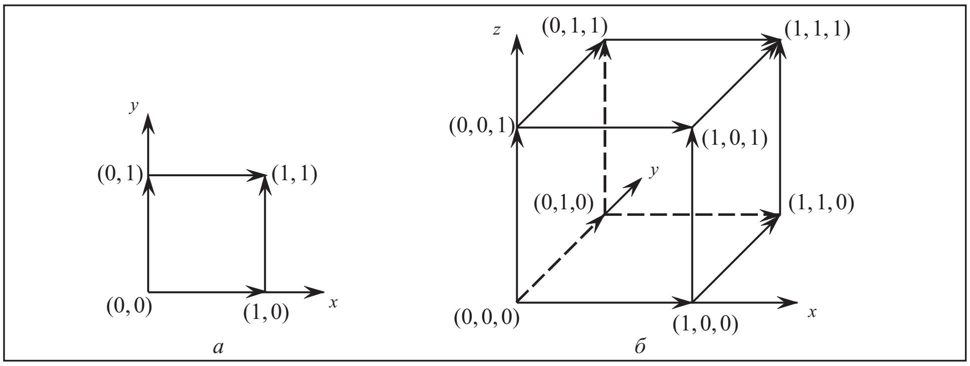

Рис. 5. Діаграми Гассе на гіперкубах розмірностей 2 (*а*) та 3 (*б*)

Лема 2. Для того щоб нерозмічений ациклічний орграф з однією кореневою вершиною був допустимим, необхідно, щоб він був підграфом деякого орієнтованого гіперкуба.

Доведення. Фрагментарні структури є частково упорядкованими множинами, отже, можуть бути зображені діаграмами Гассе, які, у свою чергу, є підграфами гіперкубів. Отже, автоматично виконуються умови леми 1. ■

Далі під підграфом гіперкуба будемо розуміти орграф, для якого виконується умова леми 2.

Допустимий граф, що відповідає класу F ізоморфних фрагментарних структур (Φ, X), визначає структуру сім'ї підмножин $\Phi = \{E_0, E_1, E_2, \ldots, E_n\}$, де $E_i \subseteq X$, $E_0 = \varnothing$. Вочевидь, для будь-якої фрагментарної структури з F виконується нерівність $|X| \geq \left|\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right|$. Тоді, підбираючи відповідну розмітку, за допустимим графом визначимо мінімальну потужність універсальних множин цих фрагментарних структур, яка дорівнює $\left|\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right|$.

Означення 4. Мінімальна потужність N універсальних множин фрагментарних структур з класу F називається розмірністю допустимого графа та відповідних йому ізоморфних фрагментарних структур: $N = |X|_{\min} = \min\limits_{F} \left|\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right|$.

Наприклад, маємо $\left|\bigcup_{i=1}^{4} E_i\right| = |\{x_1, x_2, x_3\}| = 3$ для графа на рис. 3, *а*, для ізоморфного йому графа на рис. 3, *б* маємо $\left|\bigcup_{i=1}^{4} E_i\right| = |\{x_1, x_2, x_3, x_5\}| = 4$, тобто розмірність відповідного нерозміченого допустимого графа $N = 3$. Вочевидь, розмірність не може бути меншою за довжину максимального шляху у графі та не може бути меншою за напівстепінь виходу кореневої вершини. Узагальненням цього твердження є нерівність

$$N \geq \max_i (l_i + p_i),$$

де l_i — номер ярусу i-ї вершини, p_i — її напівстепінь виходу.

Приклади графів з визначеними розмірностями $N = 5$ на рис. 1, *а* та $N = 3$ на рис. 1, *б, в* і на рис. 2, 3.

Будемо називати гіперкуб розмірності N достатнім гіперкубом для заданого допустимого графа, а гіперкуб мінімальної розмірності, підграфом якого є цей допустимий граф, необхідним гіперкубом. Вочевидь, розмірність необхідного гіперкуба допустимого графа є нижньою оцінкою розмірності його достатнього гіперкуба.

Розглянемо приклад, коли необхідний і достатній гіперкуби допустимого графа не збігаються, тобто мають різні розмірності. Орграф на рис. 6, *а* є підграфом квадрата (гіперкуба розмірності 2), але з двох елементів не можна побудувати допустиму розмітку для цього графа, а з трьох елементів — можна. Розмітка орграфа на рис. 6, *б* ілюструє це твердження. Тому розмірність достатнього гіперкуба для орграфа на рис. 6, *а* дорівнює 3, тобто достатнім гіперкубом для відповідного класу фрагментарних структур є куб.

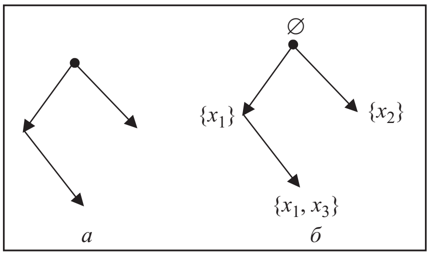

Рис. 6. Нерозмічений (*а*) та розмічений (*б*) орграфи, що відповідають класу фрагментарних структур розмірності 3

Як було показано раніше, не будь-яка розмітка допустимого графа утворює граф, що відповідає фрагментарній структурі. Розглянемо умови, за яких розмічений граф описує деяку фрагментарну структуру.

Наступна теорема надає критерій того, що розмічений ациклічний орграф з однією кореневою вершиною відповідає деякій фрагментарній структурі.

Теорема 1. Розмічений орграф з одним джерелом однозначно задає фрагментарну структуру (X, Φ), якщо виконуються такі умови:

1) джерело відповідає порожній множині;

2) будь-які суміжні вершини відповідають послідовним фрагментам і напрям дуги збігається з напрямом наступності фрагментів;

3) будь-які дві вершини графа, що відповідають послідовним фрагментам, є суміжними, і напрям дуги збігається з напрямом наступності фрагментів.

Доведення. Перша умова випливає з того, що сім'я Φ фрагментарної структури (X, Φ) завжди містить порожню множину.

Друга умова (необхідна): якщо вершини v_i, v_j суміжні, то це означає, що існує такий елемент $e \in X$, $e \notin E_i$, що $E_j = E_i \cup \{e\}$, тобто E_i, E_j — послідовні фрагменти.

Доведемо третю умову (достатню): якщо вершини v_i, v_j відповідають послідовним фрагментам E_i, E_j $(E_i \in \Phi,\ E_j \in \Phi)$, тоді існує такий елемент $e \in E_j$, що $E_j \setminus \{e\} = E_i$, тобто за означенням фрагментарної структури вершини v_i, v_j мають бути з'єднані дугою. ■

Будемо називати допустимою розмітку орграфа з одним джерелом, яка задовольняє умови теореми 1.

Наведемо очевидну теорему, що формулює достатню умову, за якої нерозмічений ациклічний орграф з однією кореневою вершиною є допустимим графом.

Теорема 2. Якщо для нерозміченого орграфа з одним джерелом можна побудувати допустиму розмітку, тоді цей орграф є допустимим графом.

Нехай є допустимий граф, для якого побудовано допустиму розмітку. Якщо для цього виконується $\left| \bigcup_{i=1}^{n} E_i \right| = N$, тоді будемо говорити, що така розмітка мінімальна. Якщо індекси елементів універсальної множини утворюють послідовність $1, 2, \ldots, m$, $m \geq N$, назвемо таку розмітку натуральною. Якщо найбільший індекс m елементів універсальної множини дорівнює розмірності N $(m = N)$ допустимого графа, тоді розмітка є мінімальною, натуральною.

Наприклад, розмітки допустимих графів на рис. 2 не є допустимими; на рис. 1, *а* розмітка мінімальна, але не є натуральною; на рис. 1, *б*, *в*, рис. 3, *а* та рис. 6, *б* розмітки натуральні, мінімальні; розмітка на рис. 3, *б* не є ні натуральною, ні мінімальною, але, якщо елемент x_5 замінити x_4, вона стане натуральною.

Усі підграфи гіперкубів розмірністю менше 3 (тобто точки, відрізки і квадрати) є допустимими графами, в цьому легко переконатися. На рис. 7 зображено всі такі підграфи.

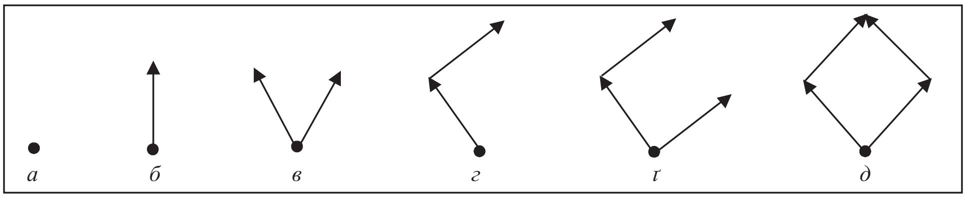

Рис. 7. Допустимі графи розмірностей 0 (*а*), 1 (*б*), 2 (*в*, *г*, *д*) та 3 (*ґ*)

Граф на рис. 7, *ґ*, хоча і є підграфом квадрата, відповідає фрагментарній структурі розмірністі 3. Якщо дві його вершини, суміжні з кореневою, позначити $\{x_1\}$ та $\{x_2\}$, тоді остання вершина має бути позначена множиною, яка складається з двох елементів: x_1 і будь-якого, окрім x_2. Розглянемо квадрат на рис. 7, *д*: якщо дві його вершини, суміжні з кореневою, позначити $\{x_1\}$ та $\{x_2\}$, тоді розмітка стоку визначається однозначно $\{x_1, x_2\}$, тобто розмітки вершин, що належать шляхам, які ведуть до однієї вершини, обмежені множиною цієї вершини (див. рис. 1, *в*). Звідси випливає таке твердження.

Лема 3. Будь-яке орієнтоване дерево є допустимим графом.

Доведення. Оскільки орієнтоване дерево не має вершин з напівстепенями заходу більше 1, то розмітки вершин його різних гілок не обмежені ніякими множинами, і будуючи їх, можна додавати скільки завгодно елементів до універсальної множини. Отже, завжди можна отримати допустиму розмітку. Крім того, це означає, що орієнтовані дерева є підграфами орієнтованих гіперкубів. ■

РЕЗУЛЬТАТИ ДЛЯ МАЛИХ РОЗМІРНОСТЕЙ

За рис. 7 можна підрахувати кількість ізоморфних та неізоморфних фрагментарних структур для розмірностей 0–2. Результат наведено у табл. 1. Існує один допустимий граф (див. рис. 7, *а*) розмірності 0 — точка, яка відповідає єдиній фрагментарній структурі $(\varnothing, \{\varnothing\})$. Також існує один допустимий граф (див. рис. 7, *б*) розмірності 1. Орієнтований квадрат є достатнім гіперкубом для трьох допустимих графів (див. рис. 7 *в*, *г*, *д*), тобто існує три неізоморфні фрагментарні структури.

Випадки з розмірностями 0 $(X = \varnothing)$ і 1 $(X = \{x_1\})$ — тривіальні, для таких допустимих графів можлива тільки одна допустима розмітка. Тому кількість попарно неізоморфних фрагментарних структур і загальна (разом з ізоморфними) кількість фрагментарних структур цих розмірностей однакові. Загальна кількість фрагментарних структур розмірності 2 $(X = \{x_1, x_2\})$ дорівнює чотирьом, тобто на одиницю більша ніж кількість попарно неізоморфних фрагментарних структур. Це пояснюється тим, що граф на рис. 7, *г* можна розмітити двома способами, які зображено на рис. 8.

Загальні кількості фрагментарних структур розмірностей 3 і 4 було підраховано за допомогою комп'ютерної програми. Кількість попарно неізоморфних фрагментарних структур розмірності 4 дотепер не пораховано.

На рис. 9 зображено підграф гіперкуба розмірності 3, тобто куба, який не є допустимим графом. Позначимо три вершини цього графа, які суміжні з кореневою: $\{x_1\}$, $\{x_2\}$ та $\{x_3\}$. Сток куба має бути позначений множиною потужності 3.

Оскільки існують шляхи до стоку, які проходять через три вже позначені вершини, розмітка стоку має бути $\{x_1, x_2, x_3\}$. Ця обставина визначає розмітки решти вершин так, як показано на рис. 9. Побудована розмітка задовольняє другу умову теореми 1, але не задовольняє третю умову цієї теореми, оскільки не існує дуг між вершинами $\{x_2\}$, $\{x_2, x_3\}$ та

Таблиця 1. Кількість фрагментарних структур малих розмірностей

Розмірність фрагментарних структур, N	Кількість фрагментарних структур	
	неізоморфних	разом з ізоморфними
0	1	1
1	1	1
2	3	4
3	19	66
4	—	11898

між вершинами $\{x_1\}$, $\{x_1, x_2\}$, які попарно відповідають послідовним фрагментам. Усі розмітки, що задовольняють другу умову теореми 1, будуть еквівалентні побудованій з точністю до позначення вершин, суміжних з кореневою, звідси випливає, що для цього графа неможливо побудувати допустиму розмітку. Отже, цей граф не є допустимим.

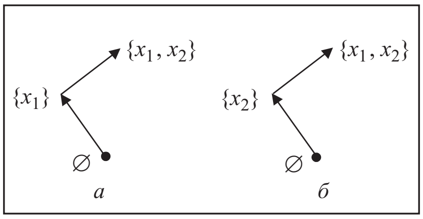

Рис. 8. Допустимі розмітки графа з рис. 7, *г*

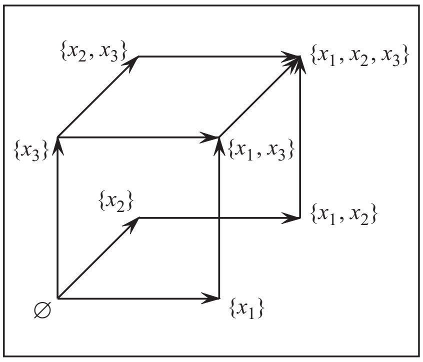

Рис. 9. Підграф гіперкуба розмірності 3, який не є допустимим графом

Будемо називати вхідним підграфом вершини v підграфа гіперкуба такий граф, що складається тільки з усіх шляхів від кореня до цієї вершини v, а вихідним підграфом вершини v — граф, який складається тільки з усіх шляхів, що виходять із цієї вершини. Підграф заданого підграфа гіперкуба, який складається тільки з усіх шляхів від кореневої вершини, що мають довжину l, назвемо підграфом l-го ярусу.

Сформулюємо такі властивості допустимих графів.

Теорема 3. Якщо граф є допустимим, тоді:

1) усі його вхідні підграфи є допустимими;

2) усі його вихідні підграфи є допустимими;

3) підграф кожного його ярусу є допустимим.

Доведення. Розглянемо перше твердження: вхідний підграф вершини v_j відповідає фрагментарній структурі, що утворюється з початкової вилученням всіх фрагментів, які не є підмножинами фрагмента E_j вершини v_j. Отже, він є допустимим.

Розглянемо друге твердження: вихідний підграф вершини v_j відповідає фрагментарній структурі, яка утворюється з початкової шляхом редукції, тобто спочатку вилучають всі фрагменти, які не містять множини E_j. Потім k фрагментів, що залишилися, перетворюються таким чином: $E_i = E_i \setminus E_j$, $i = \overline{1, k}$. Отже, вихідний підграф вершини v_j є допустимим.

Доведемо третє твердження: підграф l-го ярусу відповідає фрагментарній структурі, яка утворюється з початкової видаленням всіх фрагментів потужності більше ніж l. Отже, він є допустимим. ■

Наслідок 1. Якщо між двома вершинами допустимого графа існує шлях, тоді множина всіх шляхів між цими двома вершинами утворює допустимий граф.

Доведення. Побудуємо вихідний граф вершини, яка відповідає меншому фрагменту. Цей граф містить іншу вершину за побудовою. Згідно з умовою 2 теореми 3 він є допустимим. З цього графа побудуємо вхідний граф другої вершини. Отримаємо граф, який складається тільки з шляхів між заданими вершинами, і згідно з умовою 1 теореми 3 він є допустимим. ■

ВИСНОВКИ

Досліджено властивості фрагментарних структур, які дозволили встановити зв'язок з орієнтованими графами певного виду.

Кожній фрагментарній структурі можна поставити у відповідність розмічений ациклічний орієнтований граф з однією кореневою вершиною. Визначено поняття допустимого графа — такого нерозміченого ациклічного орграфа з однією кореневою вершиною, який відповідає класу ізоморфних фрагментарних структур. Також визначено поняття розмірності допустимого графа та відповідних йому ізоморфних фрагментарних структур. Встановлено властивості таких графів, що дозволяє розв'язати задачу переліку [12] цих графів. Проведено розрахунки і отримано результати для малих розмірностей фрагментарних структур.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Whitney H. On the abstract properties of linear dependence. *American Journal of Mathematics.* 1935. Vol. 57, N 3. P. 509–533.
2. Bjorner A., Ziegler G. M. Introduction to greedoids. Cambridge: Cambridge University Press: Matroid Applications, 1992. 180 p.
3. Ильев В.П. Задачи на системах независимости, разрешимые жадным алгоритмом. *Дискретная математика.* 2009. Т. 21, вып. 4. С. 85–94.
4. Козин И.В., Кривцун Е.В., Пинчук В.П. Эволюционно-фрагментарная модель задачи трассировки. *Кибернетика и системный анализ*. 2015. Т. 51, № 3. С. 125–131.
5. Козин И.В., Кривцун Е.В., Полюга С.И. Фрагментарная структура и эволюционный алгоритм для задач прямоугольного раскроя. *Вісник Запорізького національного університету. Сер. Фізико-математичні науки.* 2014. № 2. С. 65–72.
6. Козин И.В., Кривцун Е.В. Моделирование однослойных и двухслойных трассировок. *Управляющие системы и машины.* 2016. № 2. С. 58–64.
7. Козін І.В., Борю С.Ю., Кривцун О.В. Математична модель пакування в контейнери різних типів. *Вісник Запорізького національного університету. Сер. Економічні науки.* 2016. № 2. С. 85–92.
8. Кривцун Е.В. Эволюционно-фрагментарный алгоритм поиска минимального множества аксиом. *Управляющие системы и машины.* 2016. № 5. С. 25–31.
9. Козин И.В., Полюга С.И. О свойствах фрагментарных структур. *Вісник Запорізького національного університету. Сер. Фізико-математичні науки.* 2012. № 1. С. 99–106.
10. Полюга С.І. Фрагментарні оптимізаційні моделі в задачах покриття графів типовими підграфами: дис. … канд. фіз.-мат. наук. Запоріжжя, 2015. 140 с. URL: http://phd.znu.edu.ua/page/dis/06_2016/Polyuga_dis.pdf.
11. Берж К. Теория графов и ее применения. Москва: Изд-во иностранной лит., 1962. 320 с.
12. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. Москва: Мир, 1977. 324 с.

Надійшла до редакції 20.03.2018

Е.В. Кривцун

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФРАГМЕНТАРНЫХ СТРУКТУР ОРИЕНТИРОВАННЫМИ ГРАФАМИ

Аннотация. Исследованы свойства фрагментарных структур и установлена связь между фрагментарными структурами и размеченными ациклическими ориентированными графами с одним источником, также установлено соответствие классов изоморфных фрагментарных структур неразмеченным ациклическим ориентированным графам определенного вида, которые называются допустимыми графами. Определено понятие размерности допустимого графа и соответствующих ему изоморфных фрагментарных структур. Получено выражение для нижней оценки размерности. Доказана теорема о свойствах допустимых графов. Подсчитано количество фрагментарных структур и классов изоморфных фрагментарных структур малых размерностей.

Ключевые слова: фрагментарная структура, частично упорядоченное множество, ациклический орграф, гиперкуб.

O.V. Kryvtsun

REPRESENTATION OF FRAGMENTARY STRUCTURES BY ORIENTED GRAPHS

Abstract. In the paper, the properties of fragmentary structures are investigated and relation between fragmentary structures and marked acyclic oriented graphs with one source is established, also the correspondence of isomorphic fragmentary structure classes with unmarked acyclic oriented graphs of certain type, which are called feasible graphs, is established. The notion of the dimension of a feasible graph and its corresponding isomorphic fragmentary structures is defined. An expression for the lower-bound estimate of the dimension is obtained. A theorem on the properties of feasible graphs is proved. The number of fragmentary structures and classes of isomorphic fragmentary structures of small dimensions is calculated.

Keywords: fragmentary structure, partially ordered set, DAG, hypercube.

Кривцун Олена Володимирівна,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри Запорізького національного технічного університету,
e-mail: kryvtsun@ukr.net.