



Б.Е. ПАНЧЕНКО, Ю.Д. КОВАЛЕВ, И.Н. САЙКО

УДК 519.6, 539.3

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА И С НЕОПРЕДЕЛЯЕМЫМ ИНДЕКСОМ В ЗАДАЧЕ О ДИФРАКЦИИ ПЛОСКИХ ВОЛН НА НЕПОДВИЖНОМ ВКЛЮЧЕНИИ

Аннотация. Сведением к двум разным типам систем сингулярных интегральных уравнений (СИУ) проведено численное исследование задачи математической физики о воздействии стационарных волн плоской деформации на неподвижное включение (заземленное отверстие) с произвольным контуром, находящимся в бесконечной изотропной среде. Задача решена с использованием системы СИУ первого рода, а также системы СИУ второго рода с неопределяемым индексом. Исследована обусловленность моделей с использованием кластерных высокоточных вычислительных схем.

Ключевые слова: сингулярные интегральные уравнения, индекс уравнения, число обусловленности, численный эксперимент, дифракция плоских волн, неподвижное жесткое включение (заземленное отверстие).

ВВЕДЕНИЕ

Современное состояние вычислительной техники позволяет развивать новую традицию экспериментальных исследований — численную высокоточную верификацию математических моделей. Например, при решении краевых задач математической физики [1–8] или иных технологических проблем [9] синтезируются модели, позволяющие с той или иной степенью точности численно исследовать необходимые характеристики. Применение аналитико-численных решений, таких, например, как метод сингулярных интегральных уравнений (СИУ), многократно использованный разными авторами [10–19], позволяет прогнозировать устойчивый результат. Тем не менее решение каждой конкретной краевой задачи требует всестороннего численного исследования полученных характеристик и особенно показателя самой модели: устойчивости решения [20–22]. Могут возникать ситуации, когда получаемые системы СИУ не обладают приемлемыми свойствами, например СИУ первого рода или даже СИУ с неопределяемым индексом, которые мало изучены.

Рассмотрим краевую задачу о взаимодействии гармонических волн плоской деформации (в интерпретации механики сплошных сред) с единичным неподвижным жестким включением (отверстием с заземленным контуром, в дальнейшем — неподвижным включением), имеющим произвольное сечение контура и

© Б.Е. Панченко, Ю.Д. Ковалев, И.Н. Сайко, 2020

находящимся в бесконечном изотропном пространстве. Также может быть рассмотрена и система аналогичных отражателей [13].

Как видно из [2–5, 14, 15, 23], указанная задача всесторонне исследована и является одной из классических задач математической физики. Методами теории потенциала она была сведена к разным типам интегральных уравнений (ИУ) [3–5, 14, 15]. Были получены прикладные выводы, но численных исследований самих моделей не проводилось.

В настоящей статье решение также строилось в виде ИУ — использована система СИУ первого рода, а также система второго рода с неопределяемым индексом. Проведены численные исследования этих моделей с использованием высокоточных вычислений [13] и простейшего метода прямоугольников. Суть таких исследований заключается в проверке устойчивости решения с использованием простейшей (по существу, самой грубой) вычислительной схемы. Получены новые результаты.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим в неограниченной изотропной среде бесконечный вдоль оси OZ неподвижный цилиндр, поперечное сечение которого ограничено замкнутым контуром L типа Ляпунова. В качестве внешнего воздействия на неоднородность будем рассматривать набегающую из бесконечности монохроматическую волну расширения–сжатия (P -случай)

$$U_0 = 0, V_0 = \operatorname{Re} \{ \tau e^{-i\gamma_1 y - i\omega t} \}, \gamma_1 = \frac{\omega}{c_1}, c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (1)$$

или волну сдвига (SV -случай)

$$U_0 = \operatorname{Re} \{ \tau e^{-i\gamma_2 y - i\omega t} \}, V_0 = 0, \gamma_2 = \frac{\omega}{c_2}, c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (2)$$

Здесь τ — амплитуда падающей волны; c_1, c_2 — скорости продольной и поперечной волн соответственно; ω — частота колебаний; t — время; λ и μ — постоянные Лямэ; ρ — плотность среды; i — мнимая единица ($i^2 = -1$).

При взаимодействии волны с неоднородностью возникают отраженные волны только двух типов — продольные и поперечные. Пусть $u = \operatorname{Re} \{ \tau e^{-i\omega t} U_1(x, y) \}$ и $v = \operatorname{Re} \{ \tau e^{-i\omega t} V_1(x, y) \}$ — смещения отраженного поля. Тогда общее поле амплитуд перемещений соответствует сумме

$$U = U_0 + U_1, V = V_0 + V_1. \quad (3)$$

Предположим, что поперечное сечение отражателя описывается гладкой замкнутой кривой L , в точках которой удовлетворяются граничные условия. В случае неподвижного включения они имеют вид [2, 3, 23]

$$U \Big|_L = V \Big|_L = 0. \quad (4)$$

При установившихся волновых колебаниях изотропной среды (зависимость от времени выражается множителем $e^{-i\omega t}$) амплитудные значения отраженных волн перемещений удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}
(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \rho \omega^2 U &= 0, \\
\mu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \rho \omega^2 V &= 0.
\end{aligned}
\tag{5}$$

Комбинации амплитудных значений напряжений связаны с комбинациями амплитуд U и V , что выражено формулами

$$\begin{aligned}
\tau_x + \tau_y &= 2(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial(U + iV)}{\partial z} + \frac{\partial(U - iV)}{\partial \bar{z}} \right), \\
\tau_y - \tau_x + 2i\tau_{xy} &= -4\mu \frac{\partial(U - iV)}{\partial z}, \\
\tau_y - \tau_x - 2i\tau_{xy} &= -4\mu \frac{\partial(U + iV)}{\partial \bar{z}}.
\end{aligned}
\tag{6}$$

Следуя методике решения краевых задач, впервые примененной для описанной постановки в [14], построим систему СИУ. Пусть L — некоторая кривая в поперечном сечении цилиндра. Обозначим S_1 и S_2 амплитуды соответственно тангенциальной и нормальной компонент вектора напряжений на L . Тогда в произвольной точке кривой $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L$ эти напряжения выражаются через компоненты тензора амплитуд напряжений следующим образом:

$$\begin{aligned}
2i(S_1 + iS_2) &= (\tau_x + \tau_y)e^{i\varphi_0} + (\tau_y - \tau_x - 2i\tau_{xy})e^{-i\varphi_0}, \\
-2i(S_1 - iS_2) &= (\tau_x + \tau_y)e^{-i\varphi_0} + (\tau_y - \tau_x + 2i\tau_{xy})e^{i\varphi_0},
\end{aligned}
\tag{7}$$

где φ_0 — угол положительной касательной к L в точке $\zeta_0 \in L$ с осью Ox .

На границе включения представляют интерес распределения компонент тензора амплитуд напряжений τ_{s_0} , τ_{n_0} , $\tau_{n_0 s_0}$, которые находим по формулам

$$\begin{aligned}
\tau_{n_0} &= S_1 \sin \varphi_0 - S_2 \cos \varphi_0, \\
\tau_{n_0 s_0} &= S_1 \cos \varphi_0 + S_2 \sin \varphi_0, \quad \tau_{s_0} = (\tau_x + \tau_y) - \tau_{n_0}.
\end{aligned}
\tag{8}$$

Будем строить интегральные представления амплитуд перемещений U_1 и V_1 так, чтобы они автоматически удовлетворяли уравнениям движения (5) и условиям излучения на бесконечности, т.е. чтобы они представляли расходящиеся волны. Следуя [14], представим U_1 и V_1 в виде потенциалов типа простого слоя:

$$\begin{aligned}
U_1(x, y) &= \int_L \{f_1(s)G_{11}(s, s_0) + f_2(s)G_{12}(s, s_0)\} ds, \\
V_1(x, y) &= \int_L \{f_1(s)G_{21}(s, s_0) + f_2(s)G_{22}(s, s_0)\} ds, \\
z = x + iy, \quad \zeta &= \xi + i\eta \in L.
\end{aligned}
\tag{9}$$

Здесь $f_1(s)$ и $f_2(s)$ — неизвестные функции, G_{mn} — компоненты матрицы Грина ($m, n = 1, 2$), удовлетворяющие соотношениям [14]

$$G_{11} + iG_{21} = d \left(\frac{k}{4} \Phi_{20} - c\Phi_{00} \right), \quad G_{11} - iG_{21} = \frac{d}{4} e^{-2i\alpha} \Phi_{22},$$

$$G_{12} + iG_{22} = \frac{d}{4} e^{2i\alpha} \Phi_{22}, \quad G_{12} - iG_{22} = d \left(\frac{k}{4} \Phi_{20} - c \Phi_{00} \right), \quad (10)$$

$$d = \frac{i}{4\mu(1-\nu)}, \quad k = 3 - 4\nu, \quad c = \left(\frac{1}{2} - \nu \right) \gamma_2^2,$$

$$z - \xi = r e^{i\alpha}, \quad \Phi_{kj} = \frac{\gamma_1^k H_j^{(1)}(\gamma_1 r) - \gamma_2^k H_j^{(1)}(\gamma_2 r)}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2},$$

где $H_j^{(1)}(x)$ — функция Ханкеля первого рода j -го порядка.

Анализ формул (10) показывает, что функции $G_{11} - iG_{21}$ и $G_{12} + iG_{22}$ непрерывны в нуле, а функции $G_{11} + iG_{21}$ и $G_{12} - iG_{22}$ обладают логарифмической особенностью:

$$G_{11} + iG_{21} = G_{12} - iG_{22} = \frac{\lambda + 2\mu}{4\pi} \ln r + \dots$$

По этой причине подстановка представлений (9) в граничные условия (4) сводит краевую задачу к системе двух СИУ с логарифмическими ядрами, численная реализация которых затруднительна.

С целью получить системы СИУ с ядром типа Коши [10–12] представления (9) дифференцировались по дуговой координате s_0 . Имеем

$$\left. \frac{d(U + iV)}{ds_0} \right|_L = \left. \frac{d(U - iV)}{ds_0} \right|_L = 0, \quad (11)$$

$$\left. \frac{dW}{ds_0} \right|_L = \left(\frac{\partial W}{\partial z} e^{-i\varphi_0} + \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} e^{-i\varphi_0} \right)_{z \rightarrow \xi_0}, \quad \bar{z} = x - iy.$$

Необходимые для (11) производные имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (G_{11} + iG_{21}) &= -\frac{d}{8} (k\Phi_{31} - 4c\Phi_{11}) e^{-i\alpha}, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (G_{11} - iG_{21}) &= \frac{d}{8} \Phi_{31} e^{-i\alpha}, \\ \frac{\partial}{\partial z} (G_{12} + iG_{22}) &= \frac{d}{8} \Phi_{31} e^{i\alpha}, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (G_{12} - iG_{22}) &= -\frac{d}{8} (k\Phi_{31} - 4c\Phi_{11}) e^{i\alpha}. \end{aligned} \quad (12)$$

Можно показать, что ядро Φ_{11} , определенное в (10), является непрерывным, а ядро Φ_{31} — сингулярно ($\Phi_{31} = \frac{2i}{\pi r} + F_{31}$, где F_{31} — непрерывно). Подставляя (12) в граничные условия (11), получаем систему СИУ [14, 15] первого рода:

$$\int_L f_1(s) B_{11}(s, s_0) + f_2 B_{12}(s, s_0) ds = N_1(s_0), \quad (13)$$

$$\int_L f_1(s) B_{21}(s, s_0) + f_2 B_{22}(s, s_0) ds = N_2(s_0),$$

где

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= -d \left[\frac{k}{2\pi i} \frac{\cos(\varphi_0 - \alpha)}{r_0} + \left(\frac{k}{4} F_{31} - c\Phi_{11} \right) \cos(\varphi_0 - \alpha) \right], \\
 B_{12} &= d \left[\frac{1}{4\pi i} \frac{e^{i\varphi_0} - e^{i(2\alpha - \varphi_0)}}{\bar{\xi} - \bar{\xi}_0} + \frac{1}{8} (F_{31} e^{i(\varphi_0 + \alpha)} - F_{33} e^{i(3\alpha - \varphi_0)}) \right], \\
 B_{21} &= d \left[\frac{1}{4\pi i} \frac{e^{-i\varphi_0} - e^{-i(2\alpha - \varphi_0)}}{\xi - \xi_0} + \frac{1}{8} (F_{31} e^{-i(\varphi_0 + \alpha)} - F_{33} e^{-i(3\alpha - \varphi_0)}) \right], \\
 B_{22} &= -d \left[\frac{k}{2\pi i} \frac{\cos(\varphi_0 - \alpha)}{r_0} + \left(\frac{k}{4} F_{31} - c\Phi_{11} \right) \cos(\varphi_0 - \alpha) \right], \\
 \Phi_{31} &= \frac{2i}{\pi r_0} + F_{31}, \quad \Phi_{33} = \frac{2i}{\pi r_0} + F_{33}, \quad \xi_0 - \xi = r e^{i\alpha}, \quad e^{i\varphi_0} = \frac{d\xi_0}{ds_0}, \\
 N_1(s_0) &= -N_2(s_0) = -\gamma_1 \tau e^{-i\gamma_1 \eta_0} \sin \varphi_0 \quad \text{в } P\text{-случае,} \\
 N_1(s_0) &= N_2(s_0) = i\gamma_2 \tau e^{-i\gamma_2 \eta_0} \sin \varphi_0 \quad \text{в } SV\text{-случае.}
 \end{aligned}$$

Переменные d , k , c и Φ_{kj} заданы выше.

Необходимые дополнительные условия (ДУ) для разрешимости сингулярных интегральных уравнений первого рода (13) вытекают из равенства нулю смещений на L в некоторой фиксированной точке s_* или из равенства нулю средних смещений на L [10, 11]. В последнем случае имеем (l — длина контура L)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{l} \int \int_L \{f_1(s) L_{11}(s, s_0) + f_2 L_{12}(s, s_0)\} ds ds_0 &= A_1, \\
 \frac{1}{l} \int \int_L \{f_1(s) L_{21}(s, s_0) + f_2 L_{22}(s, s_0)\} ds ds_0 &= A_2,
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$L_{11} = G_{11} + iG_{21}, \quad L_{12} = G_{12} + iG_{22}, \quad L_{21} = G_{11} - iG_{21}, \quad L_{22} = G_{12} - iG_{22},$$

$$A_1 = -A_2 = -\frac{1}{l} \int_L \tau i e^{-i\gamma_1 \eta_0} ds_0 \quad \text{в } P\text{-случае,}$$

$$A_1 = A_2 = -\frac{1}{l} \int_L \tau i e^{-i\gamma_2 \eta_0} ds_0 \quad \text{в } SV\text{-случае.}$$

В настоящей статье применялось ДУ как в одной точке контура [10, 11], так и интегральное ДУ. Разные типы дополнительного условия определяют разные математические модели, соответствующие разным задачам.

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Для численной реализации алгоритма в настоящей статье использован метод, теоретически обоснованный в работах [10, 11] и основанный на приближении плотностей интегральных уравнений тригонометрическими многочленами и в последующем точном вычислении интегралов с непрерывными и сингулярными ядрами.

Проведем параметризацию контура L по формулам $\zeta = \zeta(\beta)$, $\zeta_0 = \zeta(\beta_0)$, $0 \leq \beta, \beta_0 \leq 2\pi$.

Интерполяционный многочлен для неизвестных плотностей интегральных уравнений (13) имеет вид

$$f(\beta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(\beta_k) \sin \frac{N(\beta_k - \beta)}{2} \frac{1}{P(\beta)}, \quad \beta_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad (15)$$

где $P(\beta) = \operatorname{tg} \frac{\beta_k - \beta}{2}$ в случае четного числа узлов $N = 2n$ и $P(\beta) = \sin \frac{\beta_k - \beta}{2}$ в случае нечетного числа узлов $N = 2n + 1$.

Подстановка (15) в интегралы с сингулярными ядрами дает

$$\int_0^{2\pi} f(\beta) R(\beta, \beta_0^m) d\beta \approx \frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^N f(\beta_k) R(\beta_k, \beta_0^m), \quad (16)$$

$$\beta_0^m = \frac{2m-1}{N} \pi, \quad m = 1, 2, \dots, N,$$

если $R(\beta, \beta_0)$ — непрерывное ядро, и

$$\int_0^{2\pi} f(\beta) \operatorname{ctg} \frac{\beta - \beta_0^m}{2} d\beta \approx \frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^N f(\beta_k) \operatorname{ctg} \frac{\beta_k - \beta_0^m}{2} \quad (17)$$

в случае получения ядра Гильберта.

Отметим, что формула (17) аналогична правилу приближенного вычисления регулярных интегралов (16). Поэтому при численной реализации сингулярных интегралов с ядром Гильберта сингулярность выделять не обязательно. В статье использовалась квадратурная формула (16) как для регулярных, так и для сингулярных интегралов.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДОСТОВЕРНОСТИ МОДЕЛИ

Для исследования достоверности полученной модели рассматривалось пространство, содержащее цилиндрическое неподвижное включение эллиптического поперечного сечения, аналогичное описанному в работе [3]:

$$\xi = a \cos \beta, \quad \eta = b \sin \beta, \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi. \quad (18)$$

На контуре включения проводилось вычисление напряжений как в [3]:

$$|\sigma_n| = |\tau_{n_0}| / P, \quad |\tau_{ns}| = |\tau_{n_0 s_0}| / P,$$

где компоненты тензора амплитуд напряжений τ_{n_0} , $\tau_{n_0 s_0}$ находились по формулам (8), P — максимальное значение напряжения в падающей волне, равное $\gamma_1 \tau(\lambda + 2\mu)$ в случае излучения P -волны (1) и равное $\gamma_2 \tau \mu$ — в случае излучения SV -волны (2).

На рис. 1 приведены графики распределения амплитудных значений напряжения $|\sigma_n|$ вдоль контура единичной неоднородности, находящейся под воздействием гармонической P -волны (рис. 1, *a* взят из работы [3] вместе с подписью), и графики, полученные с помощью описанной модели с использованием системы СИУ первого рода (рис. 1, *б*). Для иллюстрации достоверности графики представлены в зеркальном виде.

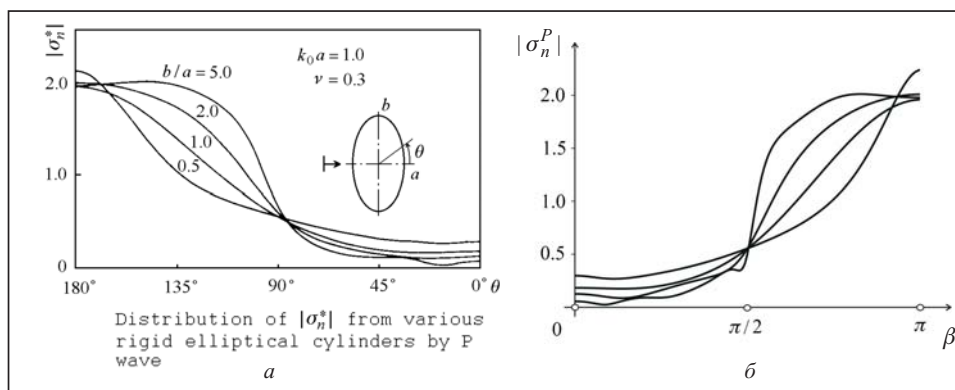


Рис. 1

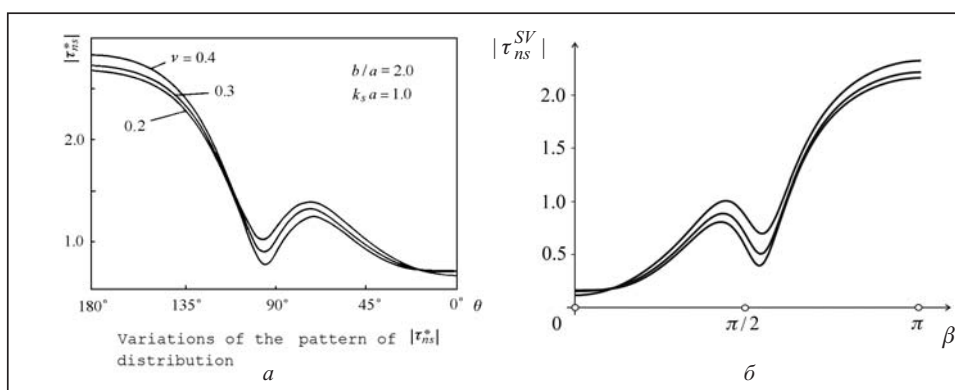


Рис. 2

На рис. 2, а (взяты из [3] вместе с подписью) приведены графики распределения амплитудных значений напряжения $|\tau_{ns}|$ вдоль контура неоднородности, находящейся под воздействием гармонической SV -волны. Графики, приведенные на рис. 2, б, получены в настоящей статье.

Графики распределения амплитудных значений контурного напряжения $|\sigma_n|$ для P -волны приведены на рис. 3, а, а для SV -волны — на рис. 3, б (получены в настоящей работе и дополняют коллекцию графиков работы [3]). Схема распространения волны, как и в работе [3], — вдоль оси OX . На рис. 3, а кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям параметра $\nu = 0.2; 0.3; 0.4$ при $b/a = 2$ и $\gamma_1 a = 1$, а кривые 1, 2, 3 и 4 на рис. 3, б соответствуют значениям параметра $b/a = 5; 2; 1; 0.5$ при $\nu = 0.3$ и $\gamma_2 a = 1.0$.

Достоверность численных результатов проверялась также решением, предложенным в [23] (и использованным в [2]) для кругового неподвижного включения при воздействии P -волны, которое для рассматриваемой задачи можно назвать эталонным. В табл. 1 приведены значения максимальных контурных напряжений (и соответствующих угловых координат), полученных с помощью решений [23] и [14]. При этом для СИУ (13) было использовано интегральное ДУ (14). Однако при дальнейшем исследовании полученной модели в соответствии с вычислительной схемой, предложенной в [13] (и как видно из сравнения результатов табл. 1), обнаружена потеря стабилизации решения (и даже измене-

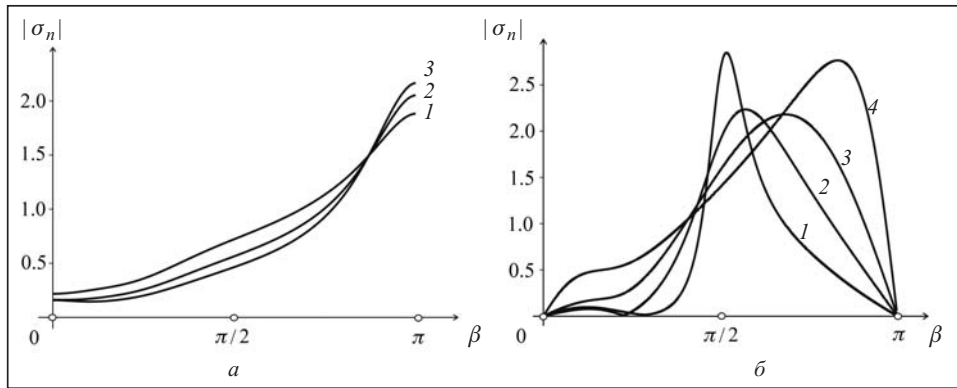


Рис. 3

Таблица 1

Тип напряжения	Волновое число $\gamma_1 a$	Угол β (в радианах)	Решение из [23]	Решение из [14]
$ \tau_{ns} $	1.0	4.231802036822	0.80455864008	0.80455864019
$ \tau_{ns} $	2.0	2.116826870065	0.70027291215	0.70027291250
$ \sigma_n $	1.0	π	1.96083639533	1.96083639573
$ \sigma_n $	2.0	π	1.97264122430	1.97264122400

ние значений уже стабилизированных цифр), начиная с девятого знака после точки. Начиная с размерности $N = 1500$, число обусловленности матрицы системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) колеблется между восьмым и 11-м порядком.

Вычисления проводились с использованием кластера СКИТ-3 Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины и библиотек MPI, поддерживающих работу приложения в распараллеленном режиме.

СПОСОБ РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ СИУ-2

Для более полной верификации полученных результатов решение поставленной задачи сводилось к иному типу уравнений — к системе СИУ второго рода. Для получения уравнений применялся метод разрешающих функций, описанный в [16].

В виде потенциалов типа простого слоя выберем функции, которые автоматически удовлетворяют соответствующим уравнениям Гельмгольца:

$$\Phi(z) = \int_L f_1(\xi) H_0^{(1)}(\gamma_1 r) ds, \quad \Psi(z) = \int_L f_2(\xi) H_0^{(1)}(\gamma_2 r) ds. \quad (19)$$

Тогда в соответствии с методом, изложенным в [16], искомые перемещения могут быть выражены следующими формулами:

$$U = \partial_1 \Phi(z) + \partial_2 \Psi(z),$$

$$V = \partial_2 \Phi(z) - \partial_1 \Psi(z),$$

где обозначены операторы $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$.

Имеем итоговые дифференциальные представления в виде

$$U = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \Phi(z) + i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \Psi(z), \quad (20)$$

$$V = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \Phi(z) - \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \Psi(z).$$

Тогда интегральные представления для компонент перемещений имеют вид

$$U + iV = 2 \int_L f_1(\xi) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} H_0^{(1)}(\gamma_1 r) ds - 2i \int_L f_2(\xi) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} H_0^{(1)}(\gamma_2 r) ds, \quad (21)$$

$$U - iV = 2 \int_L f_1(\xi) \frac{\partial}{\partial z} H_0^{(1)}(\gamma_1 r) ds + 2i \int_L f_2(\xi) \frac{\partial}{\partial z} H_0^{(1)}(\gamma_2 r) ds.$$

Используя известные [14–16] формулы для производных от функций Ханкеля $\frac{\partial}{\partial \xi} H_0^{(1)}(\gamma r) = -\frac{\gamma}{2} e^{-i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma r)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} H_0^{(1)}(\gamma r) = -\frac{\gamma}{2} e^{i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma r)$ с учетом выделения особенностей $H_1^{(1)}(\gamma r) = \frac{2}{i\pi\gamma r} + H_1^*(\gamma r)$ и переходя на контур с применением формул Сохоцкого–Племеля [10–12], получаем окончательный вид системы СИУ второго рода. Ниже ϕ_0 — угол положительной нормали к L в точке $\xi_0 \in L$ с осью OX , $re^{i\alpha} = \xi - \xi_0$ и $ds = -ie^{-i\phi} d\xi = ie^{i\phi} d\bar{\xi}$. Другие переменные аналогичны переменным описанной выше модели СИУ первого рода:

$$-2if_1(\xi_0)e^{-i\phi_0} + 2f_2(\xi_0)e^{-i\phi_0} - \gamma_1 \int_L f_1(\xi)e^{-i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma_1 r) ds -$$

$$-i\gamma_2 \int_L f_2(\xi)e^{-i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma_2 r) ds = U_0 - iV_0, \quad (22)$$

$$-2if_1(\xi_0)e^{i\phi_0} - 2f_2(\xi_0)e^{i\phi_0} - \gamma_1 \int_L f_1(\xi)e^{i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma_1 r) ds +$$

$$+i\gamma_2 \int_L f_2(\xi)e^{i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma_2 r) ds = U_0 + iV_0.$$

Очевидно, что при получении решения в напряжениях ($|\sigma_n|$ и $|\tau_{ns}|$) искомые плотности удовлетворяют интегро-дифференциальным представлениям; это существенно повышает потребность в объеме вычислительных ресурсов для достижения необходимой точности вычислительного эксперимента. Достоверность этой модели проиллюстрируем рисунками.

На рис. 4 и 5 приведены графики распределения амплитудных значений напряжений $|\sigma_{ns}|$ и $|\sigma_n|$ вдоль контура неоднородности, находящейся под воздействием гармонической P -волны и SV -волны соответственно. Рис. 4, *a* и рис. 5, *a* взяты из работы [15], в которой напряжение $|\tau_{ns}|$ обозначено $|\sigma_{ns}|$ (для графиков на рис. 4, 5 обозначение взято из цитируемой работы). Графики, приведенные на рис. 4, *б* и рис. 5, *б* получены в настоящей статье.

Как и в [15], на рис. 4, *a* кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют значениям $\gamma_1 a = 0.4, 0.7, 1.0, 1.3$ при $b/a = 2$ и $\nu = 0.3$, а на рис. 5, *a* кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям параметра $\nu = 0.2, 0.3, 0.4$ при $b/a = 2$ и $\gamma_2 a = 1$.

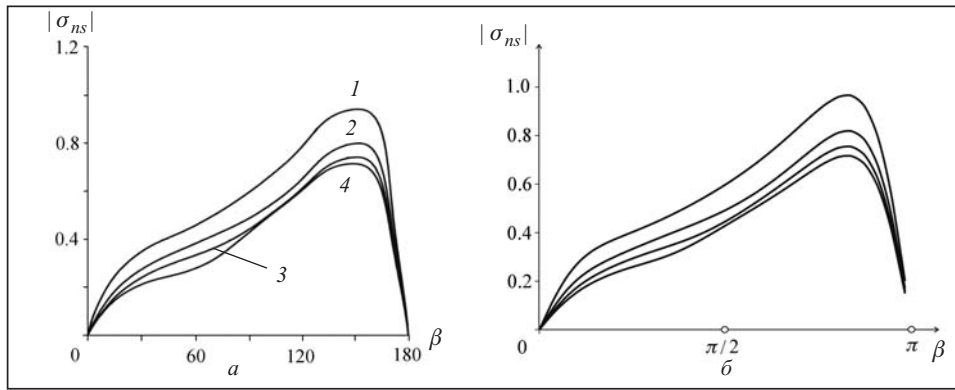


Рис. 4

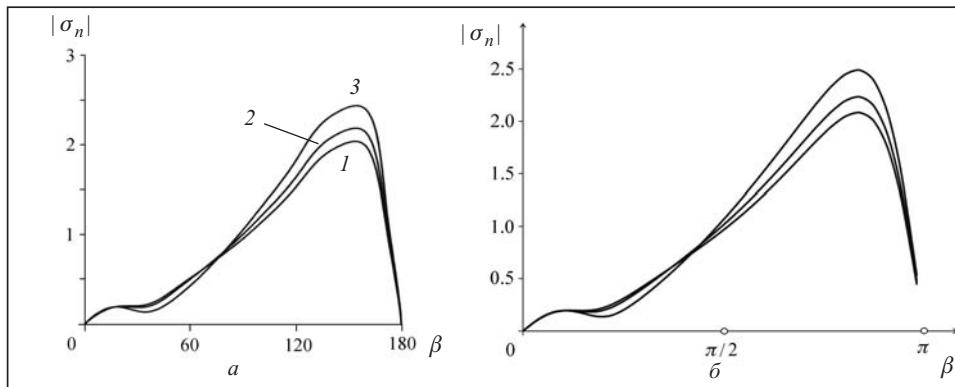


Рис. 5

Сравнение значений перемещений двух приведенных моделей в области на расстояниях от $3a$ до $10a$ от центра неоднородности показало совпадение до седьмого знака после точки. При этом система СИУ первого рода доопределялась интегральным дополнительным условием (14). Однако повышение точности решений данной дискретной модели оказалось также невозможным. Анализ полученной системы СИУ второго рода показал, что суммы и разности коэффициентов характеристической системы из [12] равны нулю, а это не позволяет определить ее индекс.

Для определения индекса системы СИУ второго рода используем выражение из [12] $\chi = \frac{1}{2\pi i} [\ln \det (DS^{-1})]_L = \frac{1}{2\pi} \left[\arg \frac{\det (A-B)}{\det (A+B)} \right]_L$, где матрицы сумм $S = A+B$ и разностей $D = A-B$, названные в [12] основными, определяются из характеристической системы уравнений $K_0 f = A(\xi_0) f(\xi_0) + \frac{B(\xi_0)}{\pi i} \int \frac{f(\xi)}{\xi - \xi_0} d\xi$.

Для первого уравнения системы (22) имеем $K_0 f_1 = -if_1(\xi_0)e^{-i\phi_0} + \frac{i}{\pi i} \int_L f_1(\xi) \frac{e^{-i\phi} d\xi}{\xi - \xi_0}$ и $K_0 f_2 = f_2(\xi_0)e^{-i\phi_0} - \frac{1}{\pi i} \int_L f_2(\xi) \frac{e^{-i\phi} d\xi}{\xi - \xi_0}$. Тогда очевидно,

что первая строка основной матрицы S имеет только нулевые элементы: $S_{11} = -ie^{i\phi_0} + ie^{i\phi_0} = 0$ и $S_{12} = e^{-i\phi_0} - e^{-i\phi_0} = 0$. Для второго уравнения системы (22) вторая строка основной матрицы D также имеет только нулевые элемен-

ты: $D_{21} = -ie^{i\phi_0} + ie^{i\phi_0} = 0$ и $D_{22} = -e^{i\phi_0} + e^{i\phi_0} = 0$. Это означает, что каждый определитель основных матриц $\det(S)$ и $\det(D)$ равен нулю всюду на L . Таким образом, данная система не может быть отнесена к «нормальному» типу [12] — ее индекс неопределим.

Известно [12], что невозможность определения индекса системы СИУ не позволяет исследовать соответствующую задачу сопряжения. Ее решение и исследование разрешимости СИУ с интегралами типа Коши тесно взаимосвязаны. Однако в [12, с. 121] отмечается, что «теория таких сингулярных уравнений может быть развита до определенного этапа без привлечения задачи сопряжения (или аналогичной задачи)». Хотя авторам настоящей статьи пока не удалось получить теоретические результаты, позволяющие проанализировать полученную «нетипичную» систему СИУ, работы в направлении построения новой теории СИУ остаются актуальными [17, 18]. Существование приведенной в настоящей статье системы, моделирующей решение классической краевой задачи [2–5, 23], подтверждает эту актуальность.

Известно, что в [12] случай одновременного равенства нулю определителей основных матриц системы СИУ не рассмотрен. Однако целесообразно рассмотреть систему (22) в ином аспекте. Предположим, что указанные выше определители основных матриц в более общем случае будут эквивалентными бесконечно малыми функциями при некотором аргументе $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\det(\varepsilon_D)}{\det(\varepsilon_S)} = 1$ позволяет отнести систему (22) к нормальному типу — к системе

уравнений Фредгольма второго рода с нулевым индексом, хотя в [12] строгое условие определения индекса такого анализа не предусматривает.

При дальнейшем повышении точности дискретной модели данное решение также претерпевает изменение ранее стабилизированных значений. При размерности СЛАУ более чем $N = 1500$ число ее обусловленности также имеет 11-й порядок. При этом все определители СЛАУ для всех исследуемых параметров близки к нулю, что дает возможность получать лишь неустойчивые решения. Для системы СИУ первого рода это исключено ввиду использования дополнительного условия.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛА ОБУСЛОВЛЕННОСТИ СЛАУ

Для проведения исследования числа обусловленности СЛАУ, получаемой в процессе реализации использованной в работе математической модели — системы СИУ первого рода с интегральным дополнительным условием, используем вычислительную схему, апробированную в [13]. Анализ многих литературных источников позволяет заключить, что исследования числа обусловленности СЛАУ, получаемой в процессе численной реализации систем СИУ, практически не проводились. В работе [19] (одной из немногочисленных работ на эту тему) предложен метод прогнозирования числа обусловленности систем СИУ, однако система СИУ первого рода там не рассмотрена. Изложенные ниже экспериментальные исследования могут заполнить этот пробел.

На рис. 6, а приведена зависимость числа обусловленности C_P матрицы СЛАУ от волнового числа $\gamma_1 a$ для P -волны, взаимодействующей с круговым включением, а на рис. 6, б — взаимодействующей с включением эллиптической

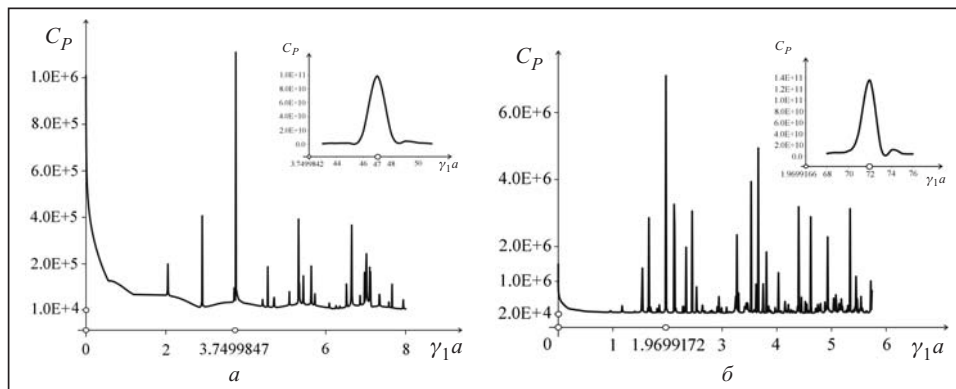


Рис. 6

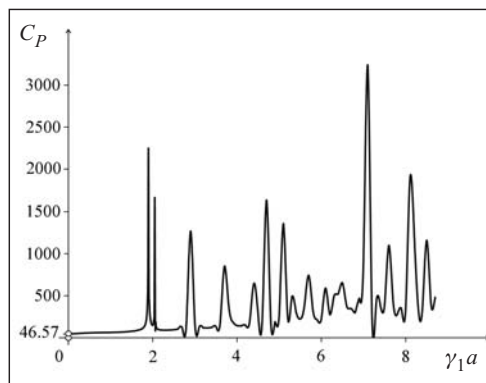


Рис. 7

формы, где $b/a = 0.2$. Как видим, на исследуемом отрезке изменения $\gamma_1 a = \{0; 8\}$ число обусловленности C_P является осциллирующей функцией, число резких изменений которой увеличивается с ростом отношения осей эллипса отражателя. Причем как для случая круговой, так и для эллиптической неоднородности существует некоторое волновое число $\gamma_1 a$, равное 3.7499847 и 1.9699172 соответственно, при котором число обусловленности растет лавинообразно —

вплоть до $C_P = 10^{11} \div 10^{12}$. На графиках отдельно выделены пики.

Для сравнения на рис. 7 приведена зависимость числа обусловленности C_P матрицы СЛАУ от волнового числа $\gamma_1 a$ для P -волны, взаимодействующей с круговым отверстием со свободным от сил контуром [13]. Данная зависимость совпадает с важным выводом работы [1] об удовлетворительной вычислительной устойчивости решения для значений волновых чисел, близких к нулю, и о заметном ухудшении устойчивости для $\gamma_1 a > 2$.

Как видно из графиков, характер соответствующих зависимостей для модели о взаимодействии P -волны с неподвижным включением полностью противоположен зависимости для отверстия со свободным от сил контуром. При этом значения числа обусловленности на исследуемом интервале $\gamma_1 a$ для отверстия со свободным от сил контуром не является критичным в отличие от модели дифракции на неподвижном включении.

Результаты исследований соответствующих функций для SV -волн имеют схожие свойства, поэтому здесь не приводятся.

Разработанная схема численного эксперимента позволила сформировать уникальную таблицу высокоточных значений (до 10^{-9}) максимумов напряжений и соответствующих угловых координат на контуре эллиптического неподвижного включения. По мнению авторов, такая таблица сформирована впервые. В табл. 2 приведен фрагмент этого результата. Объект воздействия — эллиптическая неоднородность с указанными соотношениями осей b/a и волновыми числами $\gamma_1 a$ и $\gamma_2 a$.

Таблица 2

Тип напряжения	Тип волны	Соотношение сил b/a	Волновые числа $\gamma_1 a$ и $\gamma_2 a$	Угол β (в радианах)	Значение максимума напряжений
$ \tau_{ns} $	P	2.5	1.0	3.568418043	0.768847265
$ \tau_{ns} $	P	2.5	1.7	3.575753080	0.692199102
$ \tau_{ns} $	P	5.0	1.0	2.936553365	0.892519995
$ \tau_{ns} $	P	5.0	1.7	3.349197404	0.771068955
$ \tau_{ns} $	SV	2.5	1.0	π	3.912802208
$ \tau_{ns} $	SV	2.5	1.7	π	5.581266807
$ \tau_{ns} $	SV	5.0	1.0	π	5.058362558
$ \tau_{ns} $	SV	5.0	1.7	π	7.036265048
$ \sigma_n $	P	2.5	1.0	π	2.108209816
$ \sigma_n $	P	2.5	1.7	π	2.015249855
$ \sigma_n $	P	5.0	1.0	π	2.352339483
$ \sigma_n $	P	5.0	1.7	π	2.157445727
$ \sigma_n $	SV	2.5	1.0	2.728934906	2.329773281
$ \sigma_n $	SV	2.5	1.7	3.551254281	3.464610649
$ \sigma_n $	SV	5.0	1.0	3.344222974	2.812280920
$ \sigma_n $	SV	5.0	1.7	3.344465718	4.034423103

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В исследуемой задаче выявлен неизвестный ранее эффект значительного роста числа обусловленности при определенном значении волнового числа. Как видно, результаты исследований модели (на основе СИУ) дифракции плоских волн на отверстии, свободном от сил, принципиально отличаются от аналогичных результатов для модели дифракции плоских волн на отверстии, контур которого заземлен (неподвижное включение).

Несмотря на то, что теоретически исследовать СИУ с неопределяемым индексом в рамках классического подхода не представляется возможным [12], численные эксперименты показали, что такие модели существуют и целесообразны. Для указанной задачи модель СИУ с неопределяемым индексом является приемлемым дополнением, верифицирующим решения.

Для задачи дифракции упругих волн на гладких препятствиях параллельные алгоритмы позволяют значительно сократить время вычислений и более детально проанализировать характеристики волнового поля. Это дает возможность получить значения максимумов контурных напряжений, а также значения координат дислокации максимумов с повышенной точностью, что позволит избежать разрушений конструкций, работающих в условиях динамических нагрузок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Селезов И.Т., Кривонос Ю.Г. Математические методы в задачах распространения и дифракции волн. Киев: Наук. думка, 2012. 204 с.
2. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. Киев: Наук. думка, 1978. 307 с.
3. Shibahara M., Tateno S., Kuroyanagi O. Diffraction of steady stress waves by arbitrary shaped discontinuities in elastic medium. *Bulletin of the JSME*. 1980. Vol. 23, Iss. 178. P. 493–500.

4. Colton D., Kress R. Integral equation methods in scattering theory. Philadelphia: SIAM, 2013. 271 p.
5. Jain D.L., Kanwal R.P. Scattering of elastic waves by circular cylindrical flaws and inclusion. *J. Appl. Phys.* 1979. Vol. 50, N 6. P. 4067–4109. <https://doi.org/10.1063/1.326489>.
6. Boström A. Scattering by a smooth elastic obstacle. *J. Acoust. Soc. Amer.* 1980. Vol. 67, Iss. 6. P. 1904–1913.
7. Mow C.C., Pao Y.-H. The diffraction of elastic waves and dynamic stress concentration. Santa Monica: Rand Corporation, 1971. 681 p.
8. Pao Y.H. Elastic waves in solids. *J. Appl. Mech.* 1983. Vol. 50, Iss. 4b, P. 1152–1164.
9. Aleksander M.B., Balaban S.M., Karpinski M., Rajba S.A., Chyzh V.M. Information security environment in wireless sensor networks. Ternopil: Ternopil Ivan Pul'uj National Technical University, 2016. 224 p.
10. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. Москва: ТОО «Янус», 1995. 520 с.
11. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. Киев: Наук. думка, 1984. 344 с.
12. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд. Москва: Наука, 1968. 513 с.
13. Панченко Б.Е., Сайко И.Н. Высокоточные максимальные напряжения в задаче о взаимодействии упругих волн с системой цилиндрических полостей в условиях плоской деформации. *Кибернетика и системный анализ.* 2015. Т. 51, № 5. С. 139–148.
14. Панченко Б.Е. Решение двумерных задач дифракции упругих волн на цилиндрических неоднородностях: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Сум. гос. ун-т. Сумы, 1996. 125 с.
15. Назаренко А.М., Панченко Б.Е., Ложкин А.М. Метод сингулярных интегральных уравнений в задачах дифракции упругих волн на цилиндрических включениях. *Вісник СумДУ. Сер. Фізика, математика, механіка.* 2004. № 8. С. 144–150.
16. Фильштинский Л.А. Периодические решения теории упругости для цилиндра в R^3 . *Теорет. и прикл. механика.* Харьков: Основа, 1990. Вып. 21. С. 13–20.
17. Абаполова Е.А., Солдатов А.П. К теории сингулярных интегральных уравнений на гладком контуре. *Научные ведомости. Сер. Математика. Физика.* 2010. № 5 (76), вып. 18. С. 6–20.
18. Киясов С.Н. Исследование разрешимости и оценки числа решений одного класса сингулярных интегральных уравнений. *Сибирский математический журнал.* 2000. Т. 41, № 6. С. 1357–1362.
19. Шешко М.А., Шуляев Д.С., Расолько Г.А., Мастяница В.С. К вопросу обусловленности матрицы линейной алгебраической системы, возникающей при аппроксимации сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши. *Дифференц. уравнения.* 1999. Т. 35, № 9. С. 1278–1285.
20. Химич А.Н., Молчанов И.Н., Попов А.В. Численное программное обеспечение интеллектуального МІМД-компьютера Инпарком. Київ: Наук. думка, 2007. 220 с.
21. Химич А.Н., Молчанов И.Н., Попов А.В., Чистякова Т.В., Яковлев М.Ф. Параллельные алгоритмы решения задач вычислительной математики. Киев: Наук. думка, 2008. 247 с.
22. Khimich A.N., Popov A.V., Polyanko V.V. Algorithms of parallel computations for linear algebra problems with irregularly structured matrices. *Cybernetic and Systems Analysis.* 2011. Vol 47, N 6. P. 973–985.
23. Pao Y.H., Mow C.C. Dynamic stress concentration in an elastic plate with rigid circular inclusion. *Proc. Fourth U.S. National Congress of Applied Mechanics, ASME.* Vol. 1. Oxford; London; New York; Paris: Pergamon Press., 1962. P. 335–345.

Надійшла до редакції 27.12.2018

Б.Є. Панченко, Ю.Д. Ковальов, І.М. Сайко

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО РОДУ ТА З НЕВИЗНАЧУВАНИМ ІНДЕКСОМ У ЗАДАЧІ ПРО ДИФРАКЦІЮ ПЛОСКИХ ХВИЛЬ НА НЕРУХОМОМУ ВКЛЮЧЕННІ

Анотація. Шляхом зведення до двох різних типів систем сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) проведено чисельне дослідження задачі математичної фізики про дію стаціонарних хвиль плоскої деформації на нерухоме включення (затиснений отвір) з довільним контуром, що інтегроване в нескінченне ізотропне середовище. Задачу розв'язано з використанням системи СІР першого роду, а також СІР другого роду з невизначуваним індексом. Обумовленість моделей досліджено з використанням кластерних високоточних обчислень.

Ключові слова: сингулярні інтегральні рівняння, індекс рівняння, число обумовленості, числовий експеримент, дифракція плоских хвиль, нерухоме жорстке включення (затиснений отвір).

B.E. Panchenko, Yu.D. Kovalev, I.N. Saiko

NUMERICAL ANALYSIS OF SYSTEMS OF SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH AN INDEFINABLE INDEX IN THE PROBLEM OF THE DIFFRACTION OF PLANE WAVES ON A RIGID INCLUSION

Abstract. By reducing the systems of singular integral equations (SIE) to two types, we have carried out a numerical analysis of the problem of mathematical physics about the interaction of stationary plane strain waves with a rigid inclusion (cavity with a clamped contour) located in an infinite isotropic elastic medium. The problem is solved using the systems of SIEs of the 1st and 2nd kinds, where the latter has an indefinable index. The conditionality of the models is analyzed using cluster high-precision computational schemes.

Keywords: singular integral equations, equation index, condition number, numerical experiment, plane wave diffraction, rigid stiff inclusion (clamped cavity).

Панченко Борис Евгеньевич,

доктор физ.-мат. наук, профессор Одесской национальной академии связи им. А.С. Попова,
e-mail: pr-bob@ukr.net.

Ковалев Юрий Дмитриевич,

кандидат физ.-мат. наук, доцент Одесской национальной академии им. А.С. Попова, доцент,
e-mail: kovalev@ukr.net.

Сайко Игорь Николаевич,

кандидат техн. наук, младший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: igor.sayko1988@gmail.com.