УДК 548.52
Боднар Д.І., Дутчак Б.І., Михальчук Р.І.
Луцький національний технічний університет

# ДЕЯКІ НЕРІВНОСТІ ДЛЯ СЕРЕДНІХ ГАРМОНІЙНИХ, ЇХ КОНТИНУАЛЬНІ АНАЛОГИ ТА ЗАСТОСУВАННЯ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ

**Д.І. Боднар, Б.І. Дутчак, Р.І. Михальчук Деякі нерівності для середніх гармонійних, їх континуальні аналоги та застосування в системах автоматичного регулювання.** Встановлено декілька нерівностей, як дискретного так і континуального характеру типу обернених середніх гармонійних.
**Ключові слова:** нерівність, диференціал, середнє гармонійне, функціонал, сума, інтеграл.
**Форм. 11. Літ. 2.**

**Д.И. Боднар, Б.И. Дутчак, Р.И. Михальчук Некоторые неравенства для средних гармонических, их континуальные аналоги и применение в системах автоматического регулирования.** Установлено несколько неравенств, как дискретного так и континуального характера типа обратных средних гармонических.
**Ключевые слова:** неравенство, функционал, среднее гармоническое, функционал, сумма, интеграл.

**D. Bodnar, B. Dutchak, R. Mykhalchuk Some inequalities for harmonic means, their continuum analogs and application in control systems.** Several discrete and continuum inequalities of the inverse harmonic mean type are obtained in the paper.
**Keywords:** inequality, differential, harmonic mean, functional, sum, integral.

**Вступ.** Задача дослідження та побудови аналітичної теорії гіллястих ланцюгових дробів [1] та їх континуального аналогу інтегральних ланцюгових дробів [2] зумовили появу нерівностей, які представляють на нашу думку і самостійний інтерес. Далі такі нерівності будуть наводитись в хронологічному порядку відповідно до того, як вони були встановлені.

**Основна частина.**

Теорема 1. Для додатніх дійсних чисел $x_i$ та $y_i$ $(i=\overline{1,n};)$ мають місце нерівності

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i)^{-1}\right)^{-1}+\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i)^{-1}\right)^{-1}\le\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{-1}\right)^{-1}. \tag{1}$$

Доведення здійснюється методом математичної індукції.

При $n=1$ нерівність (1) очевидна, при $n=2$ справедливість встановлюється безпосередньо при допомозі елементарних обчислень.

Запровадивши позначення

$\overline{x}_{n-1}^{-1}=x_{n-1}^{-1}+x_n^{-1},\ \overline{y}_{n-1}^{-1}=y_{n-1}^{-1}+y_n^{-1}$ і спираючись на індукцію,одержимо

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}\right)^{-1}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^{-1}\right)=\left(\sum_{i=1}^{n-2}x_i^{-1}+\overline{x}_{n-1}^{-1}\right)^{-1}+\left(\sum_{i=1}^{n-2}y_i^{-1}+\overline{y}_{n-1}^{-1})\right)^{-1}$$

$$\le\left(\sum_{i=1}^{n-2}(x_i+y_i)^{-1}+(\overline{x}_{n-1}+\overline{y}_{n-1})^{-1}\right)^{-1}\le\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{-1}\right)^{-1}$$

Остання нерівність слідує з (1),де $n=2$ і на місце $x_1,x_2,y_1,y_2$ покладено $x_{n-1},x_n,y_{n-1},y_n$ відповідно. Послідовно застосовуючи нерівність (1) встановлена.

Теорема 2. Нехай $(x_{1j};x_{2j};x_{3j}...x_{nj})$ $(j=\overline{1,k})$ впорядкована сукупність дійсних додатніх чисел. Тоді

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n}x_{ij}^{-1}\right)^{-1}\le\left(\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{k}x_{ij})^{-1}\right)^{-1}. \tag{2}$$

Теорема 3. Справедливою є нерівність

$$\sum_{j=1}^{n}(\delta_j+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i})^{-1}\le\frac{n}{n+\delta_{сер}}. \tag{3}$$

де $x_i,\delta_j$ $(i=1,\overline{n};\ j=1,\overline{n})$ додатні дійсні числа, а

$$\delta_{сер} = n(x_1^{-1} + x_2^{-1} + \ldots + x_n^{-1})^{-1}.$$

Доведення. Перш за все переконуємось що

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}\right)^{-1} = 1$$

а далі вводимо позначення $x_{ij} = \dfrac{x_i}{x_j}$ $(i, j = \overline{1,n})$ $x_{n+1}, j = \delta_j^{-1}(j = \overline{1,n})$ і застосовуємо (2).

Одержимо:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\delta_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}\right)^{-1} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_{ij}^{-1}\right) \le \sum_{i=1}^{n+1}\left(\left(\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\right)^{-1}\right)^{-1} = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{x_i}{x_j}\right)^{-1} + \frac{\delta_{сер}}{n}\right)^{-1} = \frac{n}{n+\delta_{сер}}.$$

Як наслідок з попередньої теореми слідує нерівність

$$\sum_{j=1}^{n}(\delta + \sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i})^{-1} \le \frac{n}{n+\delta}. \qquad (4)$$

де $\delta$ - невід'ємне дійсне число.

Теорема 4. Нехай $\delta$ – невід'ємне дійсне число. Має місце нерівність

$$\sum_{i=1}^{n}(\delta + \sum_{j=1}^{n}\frac{x_i}{x_j})^{-1} \ge (\delta+1)^{-1}, \quad x_i > 0 \qquad (5)$$

Доведення. Перш за все переконаємось в справедливості нерівності

$$\left(1+\delta+Ax+\frac{x}{y}\right)^{-1} + \left(1+\delta+Ay+\frac{y}{x}\right)^{-1} \ge \left(1+\delta+A\frac{xy}{x+y}\right)^{-1}, \qquad (6)$$

де $\delta \ge 0$, $A \ge 0$, $x > 0$, $y > 0$ – довільні додатні числа. Після нескладних обчислень остання нерівність зводиться до виду

$$\delta^2 + 2\delta + 2\delta A\frac{xy}{x+y} \ge 0.$$

Нерівність (5) доведемо методом математичної індукції. При $n = 1$ ця нерівність очевидна, при $n = 2$ справедливість (5) слідує з нерівності (6), якщо взяти $A = 0$. Запровадивши позначення $\overline{x}_{n-1}^{-1} = x_{n-1}^{-1} + x_n^{-1}$, тобто $\overline{x}_{n-1} = \dfrac{x_{n+1}x_n}{x_{n-1}+x_n}$ і застосувавши (6), де $A = x_1^{-1} + x_2^{-1} + \ldots + x_{n-2}^{-1}$, $x = x_{n-1}$, $y = x_n$ одержимо

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\delta + \sum_{j=1}^{n}\frac{x_i}{x_j}\right)^{-1} = \sum_{i=1}^{n-2}\left(\delta + \sum_{j=1}^{n}\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_i}{\overline{x}_{n-1}}\right)^{-1} + \left(\delta + \sum_{j=1}^{n}\frac{x_{n-1}}{x_j} + 1 + \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^{-1} +$$

$$+\left(\delta + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{x_n}{x_j} + \frac{x_{n-2}}{x_n} + 1\right)^{-1} \ge \sum_{i=1}^{n-2}\left(\delta + \sum_{j=1}^{n-2}\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_i}{\overline{x}_{n-1}}\right)^{-1} + \left(\delta + \sum_{j=1}^{n-2}\frac{\overline{x}_{n-1}}{x_j} + \frac{\overline{x}_{n-1}}{\overline{x}_{n-1}}\right)^{-1} \ge (\delta+1)^{-1}.$$

Теорема 5. Нехай $x(t) > 0$ - довільна функція з простору $C_{[a;b]}$, а $\delta > 0$ – деяке число. Тоді:

$$\int_a^b \frac{d\tau}{\delta + x(\tau)\int_a^b \frac{dt}{x(t)}} \le \frac{b-a}{\delta + (b-a)}.$$

Доведення. Дослідимо на екстремум функціонал

$$F[x(\cdot)] = \int_a^b \frac{d\tau}{\delta + x(\tau)\int_a^b \frac{dt}{x(t)}}.$$

Диференціал Гато даного функціонала буде рівний:

$$dF[x(\cdot)] = dF(x;h) = \frac{d}{d\varepsilon} F\left[x(t) + \varepsilon h(t)\right]\Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon}\left(\int_a^b \frac{d\tau}{\delta + \left(x(\tau) + \varepsilon h(\tau)\right)\int_a^b \frac{dt}{\delta + \left(x(\tau) + \varepsilon \int_a^b \frac{dt}{x(t) + \varepsilon h(t)}\right)}}\right)\Bigg|_{\varepsilon=0} =$$

$$= -\int_a^b \frac{1}{\left(\delta + x(t)\int_a^b \frac{dt}{x(t)}\right)^2}\left[h(t)\int_a^b \frac{dt}{x(t)} - x(\tau)\int_a^b \frac{h(t)dt}{x^2(t)}\right]d\tau$$

де $0 < h(t) < 1$ , $h(t) \in C_{[a;b]}$, $h(a) = h(b)$

Скориставшись узагальненою теоремою про середнє значення, одержимо

$$dF(x;h) = -\frac{1}{\left(\delta + x(\xi)\int_a^b \frac{dt}{x(t)}\right)^2}\left[\int_a^b h(t)dt\int_a^b \frac{dt}{x(t)} - \int_a^b x(t)d\tau\int_a^b \frac{h(t)dt}{x^2(t)}\right] =$$

$$-\frac{1}{\left(\delta + x(\zeta)\int_a^b \frac{dt}{x(t)}\right)^2}\cdot\left[\int_a^b h(t)dt\int_a^b \frac{d\tau}{x(\tau)} - \int_a^b \frac{h(t)dt}{x^2(t)}\int_a^b x(\tau)d\tau\right] =$$

$$-\frac{1}{\left(\delta + x(\zeta)\int_a^b \frac{dt}{x(t)}\right)^2}\cdot\int_a^b h(t)\left[\int_a^b \frac{d\tau}{x(\tau)} - \frac{1}{x^2(t)}\int_a^b x(\tau)d\tau\right]dt$$

Прирівнюємо $dF(x;h)$ до нуля. На основі відомого факту варіаційного числення про рівність нулеві інтеграла від добутку двох функцій, отримаємо

$$\int_a^b \frac{d\tau}{x(\tau)} - \frac{1}{x^2(t)}\int_a^b x(\tau)d\tau \equiv 0.$$

Записане інтегральне рівняння має єдиний розв'язок $x(t) = const$, який являється екстремаллю для функціонала F.

Те, що при $x(t) = const$ функціонал F досягає максимуму слідує з того, що в цьому випадку $d^2F(x;h^2) < 0$.

В цьому легко переконатись, шляхом безпосередньої перевірки, обчисливши значення

$$d^2F(x;h^2) = \frac{d^2}{d\varepsilon^2} F(x(t) + \varepsilon \cdot h(t))\Big|_{\varepsilon=0},$$

при $x(t) = const.$

На цьому і завершуємо доведення теореми.

Теорема 6. Нехай $x(t)>0; y(t)>0$ - функції з простору $C_{[a;b]}$. Має місце нерівність.

$$\frac{1}{\int_a^b \frac{dt}{x(t)}}+\frac{1}{\int_a^b \frac{dt}{y(t)}}\leq\frac{1}{\int_a^b \frac{dt}{x(t)+y(t)}}\ . \tag{7}$$

Доведення. Використаємо нерівність (1).
Замінимо

$$x_i=\frac{x(\zeta_i)}{\Delta\zeta_i};\ y_i=\frac{y(\zeta_i)}{\Delta\zeta_i};\ (i=0;n-1),\ \Delta\zeta_i=\frac{b-a}{n}$$

$\zeta_i$ - довільні точки на проміжках розбиття $[a;b]$ на відрізки. А далі переходимо до границі при $n\to\infty$. Зауважимо, що знак рівності в нерівності (7) можливий при $y(t)\equiv\alpha x(t)$, де $\alpha>0$ - дійсне число.

Теорема 7. Має місце нерівність

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\int_a^b \frac{dt}{x_i(t)}}\leq\frac{1}{\int_a^b \frac{dt}{\sum_{i=1}^{n}x_i(t)}}, \tag{8}$$

де $x_i(t)-$ функції з $C_{[a;b]}$.

Доведення здійснюється методом математичної індукції.

При $n=2$ одержуємо нерівність (7).

Нехай нерівність (8) виконується $n=k$, тоді при $n=k+1$ отримуємо

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{\int_a^b \frac{dt}{x_i(t)}}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\int_a^b \frac{dt}{x_i(t)}}+\frac{1}{\int_a^b \frac{dt}{x_{k+1}}}\leq\frac{1}{\int_a^b \frac{dt}{\sum_{i=1}^{k}x_i(t)}}+\frac{1}{\int_a^b \frac{dt}{x_{k+1}(t)}}\leq\frac{1}{\int_a^b \sum_{i=1}^{k+1}x_i(t)}\ .$$

Нехай $X(t;\tau)$ додатня і неперервна функція на $[a;b]\times[a;b]$. І нехай при $\tau\to\tau_0$ $(\tau_0\in[a;b])$ функція $X(t;\tau)$ рівномірно прямує до $z(t)=X(t;\tau_0)$ . Розіб'ємо проміжок $[a;b]_\tau$ на n рівних частин. Тоді $X(t;\zeta_i)=z_i(t)>0$ - неперервні функції однієї змінної на $[a;b]_t$, де $\zeta_i$ - деякі точки з проміжків розбиття.

Застосовуючи (8), можна записати

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta\zeta_i}{\int_a^b \frac{dt}{X(t;\zeta_i)}}\leq\frac{1}{\int_a^b \frac{dt}{\sum_{i=1}^{n}X(t;\zeta_i)}\Delta\zeta_i}\ .$$

Переходимо до границі при $n\to\infty$, що повністю можливо при накладених умовах. Одержимо

$$\int_a^b \frac{d\tau}{\int_a^b \frac{dt}{X(t;\tau)}}\leq\frac{1}{\int_a^b \frac{dt}{\int_a^b X(t;\tau)d\tau}}\ . \tag{9}$$

**Висновки.** Відомо, що якщо $f$ – опукла функція $(f''>0)$, $\rho(t);\ x(t)$ довільні додатні функції на $[a;b]$, то має місце нерівність Ієнсена

$$f\left(\frac{\int_a^b \rho(t)x(t)dt}{\int_a^b \rho(t)dt}\right) \le \frac{\int_a^b \rho(t)f[x(t)]dt}{\int_a^b \rho(t)dt} \,. \tag{10}$$

Як частинний випадок (10) при $\rho(t) \equiv 1;$ та $f(t) = \dfrac{1}{t}$ отримуємо нерівність

$$\left(\int_a^b \frac{dt}{x(x)}\right)^{-1} \le \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b x(t)dt \tag{11}$$

– аналог співвідношення між середніми гармонічним і арифметичним в $C_{[a;b]}$.

Застосовуючи (9), дамо оцінку лівої і правої сторони нерівності (8)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\int_a^b \frac{dt}{x_i(t)}} \le \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i(t)\right)dt$$

$$\left(\int_a^b \frac{dt}{\sum_{i=1}^{n} x_i(t)}\right)^{-1} \le \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i(t)\right)dt\,.$$

Тим самим встановлено, що отримана нерівність (8) більш точна, ніж відоме співвідношення (11) в тому розумінні, що

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\int_a^b \frac{dt}{\sum_{i=1}^{n} x_i(t)}\right)^{-1} \le \left(\int_a^b \frac{dt}{\sum_{i=1}^{n} x_i(t)}\right) \le \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i(t)\right)dt\,.$$

**Список використаних джерел.**

1. Д. И. Боднар. Ветвящиеся цепные дроби. Киев. Наукова думка 1986. - 174с.
2. Р. И. Михальчук. Континуальный аналог цепных дробей. Дисс. на соиск. уч.ст.к.ф-м.н. Луцк 1986.-120с.