УДК 001(09)
Лісковець С.М.
Луцький національний технічний університет

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОКРЕМИХ ПЛОСКИХ ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ КРИВИХ

Лісковець С.М. Методи дослідження окремих плоских трансцендентних кривих. Представлені узагальнені результати досліджень маловідомих праць обчислювача та математика Я.П. Кулика (1793 - 1863), які присвячені вивченню властивостей деяких плоских трансцендентних кривих, зокрема – однаково напружених ланцюгових ліній, ліній «ланцюгового моста», тощо. Приділена увага механізму виведення основних формул, аналізу характеристик даних ліній.
Ключові слова: однаково напружена ланцюгова лінія, лінія «ланцюгового моста», характеристики ліній.
Рис. 2., Літ. 4.

Лисковец С.М. Методы исследования некоторых плоских трансцендентных кривых. Представлены обобщенные результаты исследования малоизвестных работ вычислителя и математика Я.Ф. Кулика (1793 - 1863), которые посвящены изучению свойств некоторых плоских трансцендентных кривых, а именно, одинаково напряженных цепных линий, линий «цепного моста». Уделено внимание механизму вывода основных формул, анализу характеристик данных линий.
Ключевые слова: одинаково напряженная цепная линия, линия «цепного моста», характеристики линий.

Liskovets S.M. The methods of research of some plane transcendental curves. The generalized results of researches of lesser – known works by mathematician and numerator I.F.Kulyk are submitted, which are dedicated of studying on properties of some plane transcendental curves, especially – equally intense catenary «chain bridge», etc. Attention is paid on the mechanism of withdrawal of basic formulas, signature analysis of data lines.
Keywords: chain equally hard line, «chain bridge», characteristics of lines.

Постановка проблеми. Питаннями створення математичних моделей плоских кривих в цілому, та кривих, що мають широке практичне використання зокрема, займалося багато вчених в різні історичні часи. Проблема пошуку оптимальної та вдосконаленої моделі дослідження кривих практичного застосування є актуальною в будь-який історичний період. Для отримання узагальнених найбільш раціональних напрацювань неабияку роль відіграє ґрунтовне вивчення шляхів вирішення проблем вченими попередніх поколінь.

Мета дослідження полягає в узагальненні розробок та напрацювань математика XIX століття Я.П. Кулика стосовно вивчення питань, що пов’язані з деякими плоскими трансцендентними кривими, зокрема з кривими практичного використання – однаково напруженими ланцюговими лініями, лініями «ланцюгового моста». Роботи вченого відповідної тематики практично не досліджувалися істориками математики, тому мета статті носить також інформативно-пізнавальний характер.

Виклад основного матеріалу дослідження.

Згідно з історичними довідками, форму кривої провисання, яку пізніше назвали „ланцюговою лінією“, вперше досліджував Галілео Галілей (1564–1642), розробляючи кінематичні методи для знаходження дотичних та нормалей до кривих. Даний метод дав початок дослідженню траєкторій і складних рухів, визначенню дотичних в будь-якій точці траєкторії. Потрібно зазначити, що Галілей криву провисання вважав за параболу і, відповідно, всі основні підрахунки були зроблені для траєкторій, які мали вигляд параболи. Параметром такої параболи Галілей визначив висоту падіння точки, що збільшена в чотири рази, і яка потрібна для того, щоб надавати точці швидкість рівну початковій горизонтальній швидкості [1, с. 165–166].

Ланцюгові лінії використовувалися, в першу чергу, для розрахунків пов’язаних з провисанням дротів, тобто мали практичний інтерес, а отже, потребували детального вивчення. Крім того, поверхня, яка утворюється обертанням дуги ланцюгової лінії навколо осі *OX*, що називається катеноїдом, є мінімальною поверхнею і представляє також практичний інтерес. Вперше катеноїд описав Л. Ейлер, який досліджував властивості плоских кривих. Він розробив методи знаходження кривих та сімейств кривих, що задовольняють спеціальним властивостям. Ейлер поставив перед вченими-послідовниками окремі задачі, що мали відношення до детального дослідження властивостей як плоских, так і просторових кривих та поверхонь, що утворюють криві в результаті обертання навколо координатних осей [2, с. 116–117].

Дослідженням плоских кривих ліній Я.П. Кулик захопився ще на початку своєї наукової діяльності. В 1832 році в Празі з’явилася праця „Theorie und Tafeln der Kettenlinie“ („Теорія і таблиці ланцюгових ліній") [3]. Автор зауважував, що серед плоских кривих ланцюгова лінія виділяється багатьма цікавими властивостями, не дивлячись на те, що вона є найпростішою серед трансцендентних кривих та повністю визначається своїми параметрами. Він писав про криву: „її можна точно виміряти, центр її ваги розташований під кривими, які тісно пов'язані кінцевими точками, а поверхня того тіла, яка утворюється завдяки повороту ланцюгової лінії навколо горизонтальної осі, є найбільшою чи найменшою, залежно від осі обертання [3, с. 2]". Крім того, дуже важливим та широким було застосування цих кривих в будівництві, зазначав Кулик. Вони є лінійною опорою так званих дротових та ланцюгових мостів, склепів, куполів, збудовані випуклості на кшталт кривих є лише тоді довговічними, якщо у них дотримується достатня кількість ліній опори [3, с. 2].

Вчений дав таке пояснення кривої, яку досліджував: „Якщо нитку, яка є одночасно важкою, але повністю гнучкою, підвісити тонкими кінцями за два нерухомих пункти *A* та *B*, то у стані рівноваги утворюється крива *AMB*, яку називають ланцюговою лінією. Точка *M* - довільна точка кривої [3,с. 3]".

В роботі виведені всі основні формули, що відносяться до ланцюгових ліній. Слід відмітити, що математичний апарат представлений автором дуже детально.

В першу чергу, представлене рівняння ланцюгової лінії:

$$y = \frac{1}{2} p \left(e^{\frac{x}{p}} + e^{-\frac{x}{p}} \right),$$

або

$$x = p\lambda \frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p},$$

де p - параметр ланцюгової лінії. Знаком λ Кулик позначав натуральний логарифм.

В статті „Теорія та таблиці ланцюгової лінії" багато уваги приділено знаходженню формул для обчислення основних характеристик кривої: радіуса кривизни, амплітуди, довжини дуги. При цьому запропоновані різні варіанти формул в залежності від початкових даних. Автор зазначав, що одним із завдань роботи є створення математичної бази для знаходження характеристик ланцюгової лінії, маючи кут положення точки кривої. Кулик не лише вивів формули, але й побудував таблицю, за допомогою якої, знаючи кут υ положення точки M_0, можна відшукати координати точки (*x*,*y*), довжину дуги S від точки до вершини кривої, радіус кривизни *R*, нормаль *N*, параметр *t*, яким автор позначив заглиблення точки. Таблиця побудована для всіх кутів υ від 1^0 до 85^0.

Продовжив дослідження про ланцюгові лінії взагалі та про лінії ланцюгового моста Кулик в роботі „Untersuchungen über die Kettenbrückenlinie" („Дослідження про лінії ланцюгового моста") [4], яка з'явилася в Празі у 1838 році. За словами автора, основною метою роботи є точне пояснення якостей тих кривих ліній, які беруть на себе роль підвісних ланцюгів ланцюгового моста, в той час, коли вони крім своєї власної ваги, мусять витримувати разом з проїзною частиною ще вагу підпираючих жердин [4, с. 3]. Вчений саме такі лінії називав лініями ланцюгових мостів. Термін „лінії ланцюгового моста" вперше ввів Кулик (про цей факт зазначав сам автор у вступі до своєї роботи).

Автор зауважував, що коли розглядати лінію ланцюгового моста як параболу, еліпс і т.д., тоді довжину підпираючих жердин можна розрахувати заздалегідь, але тоді виникає необхідність експериментальним шляхом скоротити, в залежності від обставин, підпираючі жердини, або ж замінити їх на довші, поки приблизно не буде досягнуто передбачуваної лінійності проїзної частини. В іншому випадку, що найчастіше і траплялося, проїзна частина була не горизонтальною, а з вгнутою серединою.

В роботі запропонований, порівняно нескладний, метод викривлення конічних перерізів, який через свою простоту міг би викликати, за словами автора, інтерес у конструкторів та інженерів. Крім того, таблиці для необхідних підрахунків, що наведені в роботі, істотно відрізнялися від всіх відомих на той час високою точністю.

В першій частині праці „Однаково напружена ланцюгова лінія" автор розглядав загальну ланцюгову лінію та відхилену від неї криву лінію, яка утворюється внаслідок зміни напруження вздовж лінії ланцюгового моста. Вчений зазначав, що загальна ланцюгова лінія утворюється тоді, коли гнучкий та рівномірно товстий ланцюг буде прикріплений на кінцях таким чином, щоб усі елементи вільно висіли. Навантаження, яке існує в окремих точках, стабільно зростає з середини ланцюгової лінії, тобто з її вищої точки, і в точках підвішування воно саме найбільше [4, с.4]. Продовжуючи дослідження, вчений запропонував розглядати нерівномірно товстий ланцюг, який має таку властивість: міцність ланцюга зростає від середини до двох кінців в такому ж відношенні як збільшується напруження. В такому випадку можна стверджувати, що ланцюг із загальної ланцюгової лінії утворює відхилену криву лінію, яка може через однакову міцність, або однакове напруження всіх її частин називатися однаково напруженою ланцюговою лінією [4,с. 5].

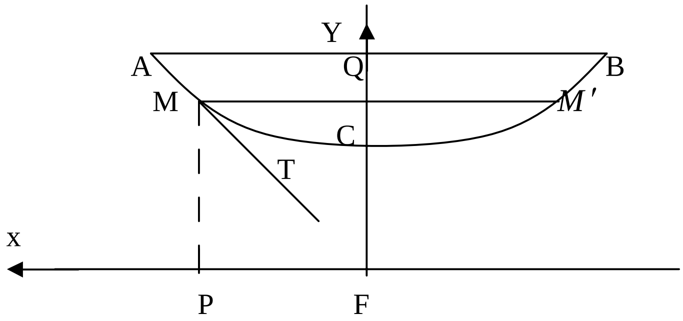

Рис.1. Ланцюгова лінія

Нехай точки A, B, C представляють загальну ланцюгову лінію (рис.1), де A, B – точки підвішування, а C – її вершина. Через будь-яку точку M заданої лінії проведена горизонталь MQ та дотична MT. Кут QMT називається кутом положення точки M. Якщо цей кут позначити υ, а довжину дуги CM від вершини S, тоді справедлива формула:

$$S = p \cdot tg\upsilon,$$

Величина *p* – параметр ланцюгової лінії, це довжина дуги точки, кут положення якої становить 45^0, тобто для $\upsilon = 45^0$, *S=p.*

Якщо через C провести вертикальну пряму C*Y* та до C*Y* провести перпендикуляр PF, який називається директрисою ланцюгової лінії, тоді можна визначити закони, за якими змінюються координати будь-якої точки M ланцюгової лінії (абсциса x=FP, ордината y=PM):

$$x = p \cdot \lambda tg\left(45^0 + \frac{1}{2}\upsilon\right),$$

$$y = p \cdot \sec\upsilon .$$

Довжина дуги обчислюється за формулою:

$$S = \sqrt{y^2 - p^2} \ .$$

Більш детально в роботі описане виведення формул, що відносяться до однаково напруженої ланцюгової лінії. Такий тип ліній був вперше введений саме Куликом. Підхід до виведення формул для обчислення довжини дуги однаково напруженої ланцюгової лінії аналогічний як для загальної ланцюгової лінії, але враховується напруження в будь-якій точці, вагу одиниці довжини лінії та поперечні перерізи ланцюга у вершинах дуги.

Довжина дуги однаково напруженої лінії обчислюється за формулою:

$$S = p \cdot \lambda(tg\upsilon + \sec\upsilon),$$

або

$$S = p \cdot \lambda\left(tg 45^0 + \frac{1}{2}\upsilon\right).$$

Розраховані таблиці для визначення дуги однаково напруженої ланцюгової лінії [4,с. 7]. Значення в таблиці залежать від кута положення точки лінії. Наведені дані для всіх кутів, що збільшуються на шість мінут.

Наприклад: для $\upsilon = 17^0 48'$ $S = 31{,}5790$;

$\upsilon = 17^0 42'$ $S = 31{,}3957$.

Дані в таблиці наводяться для параметра p=100, але автором розроблений математичний механізм для користування таблицями з іншим параметром p'.

Для полегшення роботи з однаково напруженою ланцюговою лінією будуються окремі таблиці, зокрема:

– „Координати, довжини дуг, напруження та кути положення однаково напруженої ланцюгової лінії“;

– „Кути положення точок підвішування“.

Стаття наповнена поетапними математичними виведеннями. Вчений запропонував в кількох варіантах формули, що обчислюють ті, чи інші характеристики за різними вихідними даними, обґрунтовує спосіб підрахунку необхідних логарифмів, які забезпечують більшу точність.

Так, для однаково напруженої ланцюгової лінії виведені такі формули для знаходження координат точок:

$$x = p\upsilon,$$
$$y = p(\lambda \sec \upsilon + 1)$$

де p – параметр кривої (директриса), υ – кут положення точки, що обчислюється в радіанній мірі, параметр λ позначає натуральний логарифм.

Напруження Т точки кривої обчислення за формулою:

$$T = ph \sec \frac{x}{p},$$

де h – відстань від точки до осі ординат.

Вивівши формули для обчислення характеристик однаково напруженої ланцюгової лінії, Кулик зробив такі висновки [4,с. 9–10]:

Однаково напружена лінія:

– є трансцендентною кривою;

– складається з двох нескінченних ліній, оскільки для $\upsilon = 90^0$, x переходить в $\frac{1}{2}\rho\pi$, а y стає нескінченним;

– оскільки для $\upsilon = 0$, $x = 0$ і $y = p$, то всі точки ланцюгової лінії лежить на відстані y=p;

– оскільки для одночасно додатної і від’ємної величини x, величина y залишається незмінною, то вісь координат поділяє криву на дві рівні частини;

– для абсцис більших за $\frac{1}{2}\rho\pi$ немає ніяких точок кривої;

– всі однаково натягнуті ланцюгові лінії є подібними, отже, відповідні плоскі фігури, що обмежені лініями – подібні .

Значна частина досліджень Кулика присвячена ланцюговим лініям практичного використання, а саме лініям ланцюгового моста. Автор визначив рівняння таких ліній при умові, що вага несучих ланцюгів разом з вагою несучих жердин та проїзної частини приєднуються до одного горизонтального навантаження.

Нехай А, В – точки підвішування, С – вершина кривої АМВ, кут РМТ (υ) – це кут положення точки М, СР=х, МР=y, АЕ=d – напіврозмах, СЕ=t – поглиблення всередині лінії, $A'B'$ – проїзна частина, CD=p – параметр кривої (рис. 2).

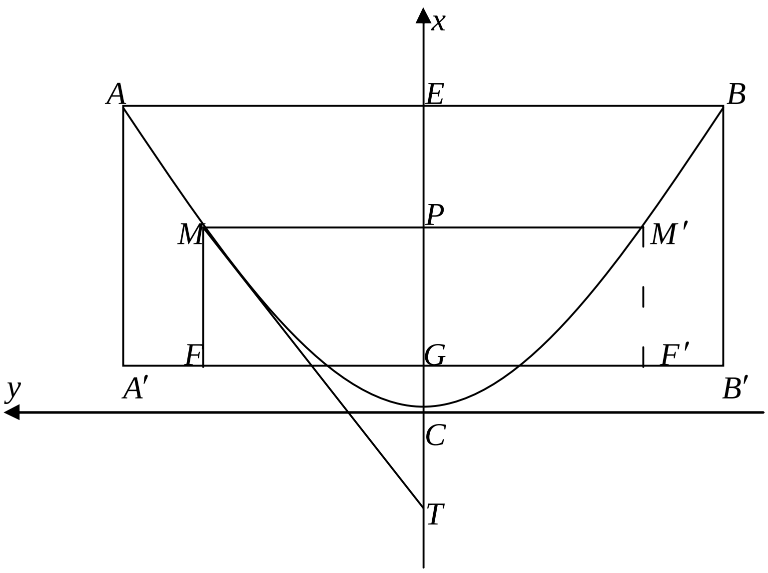

Рис. 2. Лінія ланцюгового моста

Через h вчений позначав вагу одиниці довжини, наприклад, поєднується вага одиниці довжини основи ланцюгів та проїзної частини з навантаженням. Для напруження T в точці M справедливі співвідношення

$$T\sin\upsilon = hy\,, \qquad T\cos\upsilon = ph\,,$$

тому, що вага ланцюгової дуги MC, розташованої в тій самій частині FG проїзної частини, розглядається як єдине горизонтальне навантаження.

Кулик довів, що справедлива формула:

$$T = h\sqrt{p^2 + y^2}\,.$$

Згідно з підрахунками автора, рівняння лінії ланцюгового моста має вигляд:

$$y^2 = 2px\,, \qquad \text{або} \qquad y^2 = \frac{d^2x}{t} \qquad \left(d^2 = 2pt\right).$$

Рівняння задають лінію параболічного типу з відповідним параметром.

В полярній системі координат рівняння лінії ланцюгового моста має вигляд:

$$r \approx \frac{\frac{1}{2}p}{1+\cos a}\,,$$

а – кут нахилу точки кривої.

Вчений стверджував, що отримати найбільшу точність довжини дуги такої лінії можна за формулою:

$$S = \frac{1}{4}p\left(tg\upsilon\cdot\sec\upsilon + \lambda tg\left(45^0 + \frac{1}{2}\upsilon\right)\right).$$ [4,с. 20].

В роботі подається поетапне виведення даної формули з детальним поясненням.

Дослідник розрахував „Таблицю координат лінії ланцюгового моста“ та відповідних логарифмів, які суттєво зменшують громіздкі математичні підрахунки.

Я.П. Кулик зауважував, що у ланцюгових мостів навантаження ланцюгів є набагато важливішим ніж разом взяті вага підпираючих жердин (несучих стержнів), вага проїзної частини та вага випадкового навантаження моста. Своїми підрахунками вчений довів, що, у випадку об’єднання останнього навантаження з першим, можна отримати однаково напружену ланцюгову лінію, яка є ближчою до лінії ланцюгового моста, ніж до параболи. Із ще більшою точністю можна визначити ланцюгову лінію моста, якщо кожне навантаження виділити у відповідності до свого напрямку та розрахувати окремо. Зроблені відповідні підрахунки для випадку, коли навантаження ланцюгів діє в напрямку дотичних окремих точок лінії, а вага проїзної частини, несучих стержнів та вага випадкового навантаження моста розглядається як горизонтальне навантаження ланцюгів.

В розділі „Про лінії ланцюгового моста“ виводяться формули для характеристик даної лінії, ввів нові поняття, такі як модуль лінії k, кут кривої ω, які, як стверджує автор, більш точно описують саму лінію. Так, координати точок лінії можна обчислити за формулами:

$$x = \frac{p}{\sqrt{k}} \cdot \omega , \qquad y = \frac{p}{k} \lambda \sec \omega + p .$$

Важливими повинні бути розрахунки відповідних навантажень, які б максимально впливали на міцність та безпеку ланцюгових мостів.

Висновки

Дослідження, математичний апарат та розрахунки, описані в роботах [3,4], є підґрунтям для теоретичних напрацювань при вивченні деяких плоских трансцендентних кривих. Достатньо обґрунтованим є представлений аналіз однаково напруженої ланцюгової лінії та лінії «ланцюгового моста», а також їх практичне використання. Підхід до створення відповідної математичної бази кривих, методи розрахунків та обчислень характеристик ланцюгових ліній можуть розширити та доповнити напрацьований матеріал даної тематики.

1. Рыбников К.А. История математики / К.А. Рыбников. – М.: Из-во МГУ, 1974. – 455 с.
2. Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. [Сборник статтей под редак. Боголюбова Н.Н., Михайлова Г.К., Юшкевича А.П.] – М.:Наука, 1988. – 518 с.
3. Kulik J.P. Theorie und Tafeln der Kettenlinie / J.P. Kulik. – Prag, 1832. – 50 s.
4. Kulik J.P. Untersuchungen über die Kettenbrückenlinie / J.P. Kulik – Prag, 1838. – 38 s.