ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №2 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.2

УДК 517.95

Лопушанський А.О.

РЕГУЛЯРНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФУЗІЙНО-ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ З УЗАГАЛЬНЕНИМИ ФУНКЦІЯМИ В ПРАВИХ ЧАСТИНАХ

Лопушанський А.О. *Регулярність розв'язків крайових задач для дифузійно-хвильового рівняння з узагальненими функціями в правих частинах* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — C. 279–289.

Доведено однозначну розв'язність першої крайової задачі для рівняння

$$u_t^{(\beta)} - a(t)u_{xx} = F(x,t), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T],$$

з дробовою похідною $u_t^{(\beta)}$ Рімана-Ліувілля порядку $\beta \in (0,2)$, додатним гладким коефіцієнтом $a(t)$, узагальненими функціями в правих частинах та встановлено деякі достатні умови регулярності його розв'язку за змінною t.

Ключові слова і фрази: похідна дробового порядку, узагальнена функція, крайова задача, вектор-функція Ґріна.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна

Вступ

У даній статті встановлюємо однозначну розв'язність першої крайової задачі для рівняння

$$u_t^{(\beta)} - a(t)u_{xx} = F(x,t), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T], \tag{1}$$

з дробовою похідною $u_t^{(\beta)}$ Рімана-Ліувілля порядку $\beta \in (0,2)$, додатним гладким коефіцієнтом $a(t)$, узагальненими функціями в правих частинах та знаходимо деякі достатні умови регулярності розв'язку за змінною t.

Відомо [12], що узагальнені розв'язки рівнянь з частинними похідними та сталими коефіцієнтами у випадку правої частини $F(x,t) = F_0(x) \cdot \delta(t)$ ($\delta(t)$ — дельта-функція Дірака, крапкою позначено прямий добуток узагальнених функцій) є нескінченно диференційовними за змінною t в узагальненому сенсі: значення $(u(\cdot,t), \varphi(\cdot))$ розв'язку $u(x,t)$ на довільній основній функції $\varphi(x)$ є нескінченно диференційовною функцією змінної t.

На прикладі дифузійно-хвильового рівняння показуємо, що подібною властивістю володіють розв'язки крайових задач для рівнянь з дробовою похідною за змінною t: у випадку узагальненої функції $F(x,t) = F_0(x) \cdot g(t)$ регулярність за змінною t узагальненого розв'язку першої крайової задачі для рівняння (1) визначається властивостями функцій

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K55.

$a(t)$ та $g(t)$, зокрема, при неперервних $a(t)$ та $g(t)$ розв'язок $u(x,t)$ задачі також є узагальненою функцією, неперервною за змінною t.

Цей результат використовується для доведення розв'язності деяких обернених крайових задач для такого рівняння з заданими узагальненими функціями у правих частинах.

1 Основні позначення та формулювання задачі

Використовуємо такі позначення: $Q_0 = (0,l) \times (0,T]$, $C_+[0,T]$ — клас неперервних на $[0,T]$ та обмежених знизу додатним числом функцій, $C_+^\infty[0,T] = C^\infty[0,T] \cap C_+[0,T]$, $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$ $(N = 1,2)$, $\mathfrak{D}(0,l)$, $\mathfrak{D}[0,l]$ — простори нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями відповідно в $\mathbb{R}^N$, $(0,l)$, $[0,l]$ [10, с. 13], $\mathfrak{D}(\overline{Q}_0) = \{v \in C^\infty(\overline{Q}_0) : (\frac{\partial}{\partial t})^k v|_{t=T} = 0, \quad k = 0,1,\dots\}$, $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^N)$, $\mathfrak{D}'(0,l)$, $\mathfrak{D}'[0,l]$, $\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$ — простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) відповідно на $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$, $\mathfrak{D}(0,l)$, $\mathfrak{D}[0,l]$, $\mathfrak{D}(\overline{Q}_0)$, (F,φ) — значення $F \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^N)$ на основній функції $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$, а також значення $F \in \mathfrak{D}'(0,l)$ на $\varphi \in \mathfrak{D}(0,l)$, $F \in \mathfrak{D}'[0,l]$ на $\varphi \in \mathfrak{D}[0,l]$, $F \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$ на $\varphi \in \mathfrak{D}(\overline{Q}_0)$, $\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0) \cap C[0,T] = \{F \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0) \,|\, (F(x,\cdot),\varphi(x)) \in C[0,T] \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0,l)\}$ — клас узагальнених функцій із $\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$, неперервних за змінною $t \in [0,T]$ [12].

Позначимо через $\widehat{*}$ операцію згортки узагальненої функції g та основної функції φ [10, с. 111], тобто $(g\widehat{*}\varphi)(x) = (g(\xi),\varphi(x+\xi))$. Нехай $f * g \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R})$ — згортка узагальнених функцій $f,g \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R})$, що на кожну основну функцію $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ діє за правилом $(f * g,\varphi) = (f, g\widehat{*}\varphi)$; $f(x) \cdot g(t) \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^2)$ — прямий добуток узагальнених функцій $f,g \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R})$, тобто узагальнена функція, що на кожну основну функцію $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^2)$ діє за правилом $(f \cdot g,\varphi) = (f(x),(g(t),\varphi(x,t)))$.

Зауважимо, що у випадку $g \in L_1(0,T)$ маємо

$$(f \cdot g,\varphi) = \Big(f(x), \int_0^T g(t)\varphi(x,t)dt\Big) = \int_0^T g(t)\big(f(x),\varphi(x,t)\big)dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^2).$$

Використаємо функцію (див. [12]) $f_\lambda \in \mathfrak{D}'_+(\mathbb{R}) = \{f \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}) : f = 0 \text{ при } t < 0\}$:

$$f_\lambda(t) = \frac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \qquad \text{при} \quad \lambda > 0$$

і $f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t)$ при $\lambda \le 0$, де $\Gamma(\lambda)$ — гама-функція, $\theta(t)$ — одинична функція Хевісайда. Правильні наступні співвідношення $f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}$, $f_\lambda \widehat{*} f_\mu = f_{\lambda+\mu}$.

Нагадаємо, що похідну $v_t^{(\beta)}(x,t)$ Рімана-Ліувілля функції $v(x,t)$ порядку $\beta > 0$ визначають за формулою

$$v_t^{(\beta)}(x,t) = f_{-\beta}(t) * v(x,t);$$

регуляризовану похідну дробового порядку [1],[2] за формулами:

$$D_t^\beta v(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{v_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \Big[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v(x,\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau - \frac{u(x,0)}{t^\beta}\Big]$$
$$= v_t^{(\beta)}(x,t) - f_{1-\beta}(t)v(x,0), \qquad \text{при} \quad \beta \in (0,1),$$

$$D_t^\beta v(x,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^t \frac{v_{\tau\tau}(x,\tau)}{(t-\tau)^{\beta-1}} d\tau = v_t^{(\beta)}(x,t) - f_{1-\beta}(t)v(x,0) - f_{2-\beta}(t)v_t(x,0),$$
$$\text{при} \quad \beta \in (1,2).$$

Нехай $C_{2,\beta}(Q_0) = \{v \in C(\bar{Q}_0) \mid v_{xx}, D_t^\beta v \in C(Q_0)\}$. Введемо оператори

$$L: \quad (Lv)(x,t) \equiv v_t^{(\beta)}(x,t) - a(t)v_{xx}(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{Q}_0, \qquad v \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0),$$

$$L^{reg}: \quad (L^{reg}v)(x,t) \equiv D_t^\beta v(x,t) - a(t)v_{xx}(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{Q}_0, \quad v \in C_{2,\beta}(Q_0),$$

$$\widehat{L}: \quad (\widehat{L}v)(x,t) \equiv f_{-\beta}\widehat{*}v(x,t) - a(t)v_{xx}(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{Q}_0, \quad v \in \mathfrak{D}(\overline{Q}_0),$$

та функційний простір

$$X(\overline{Q}_0) = \{v \in \mathfrak{D}(\overline{Q}_0) : v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0, \quad t \in [0,T]\}.$$

Як у [9] показуємо, що для $v \in C^{2,\beta}(Q_0)$, $\psi \in X(\bar{Q}_0)$ правильна формула Ґріна

$$\int_{Q_0} v(y,\tau)(\widehat{L}\psi)(y,\tau)dyd\tau = \int_{Q_0} (L^{reg}v)(y,\tau)\psi(y,\tau)dyd\tau + \int_0^T a(\tau)\big[v(0,\tau)\psi_y(0,\tau) - v(l,\tau)\psi_y(l,\tau)\big]d\tau + \int_0^l v(y,0)dy \int_0^T f_{1-\beta}(\tau)\psi(y,\tau)d\tau + \int_0^l v_\tau(y,0)dy \int_0^T f_{2-\beta}(\tau)\psi(y,\tau)d\tau.$$

Розглянемо першу крайову задачу

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0) = F_1(x), \quad x \in [0,l], \tag{3}$$

$$u_t(x,0) = F_2(x), \quad x \in [0,l], \tag{4}$$

для рівняння (1) при $\beta \in (0,2)$ (умова (4) відсутня у випадку $\beta \in (0,1]$) за одного з наступних припущень:

(A) $a \in C_+^\infty[0,T]$, $F \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$, $F_j \in \mathfrak{D}'[0,l]$, $j = 1,2$,

(B) $a \in C_+[0,T]$, $F(x,t) = F_0(x) \cdot g(t)$, $g \in C[0,T]$, $F_j \in \mathfrak{D}'[0,l]$, $j = 0,1,2$.

Розв'язком задачі (1)–(4) за припущення (A) (або (B)) називається функція $u \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$, що задовольняє тотожність

$$(u, \widehat{L}\psi) = (F,\psi) + \sum_{j=1}^{2} \left(F_j, \int_0^T f_{j-\beta}(t)\psi(\cdot,t)dt\right) \qquad \forall\ \psi \in X(\bar{Q}_0). \tag{5}$$

2 Властивості спряжених операторів Ґріна

Означення. *Вектор-функція $(G_0(x,t,y,\tau), G_1(x,t,y,\tau), G_2(x,t,y,\tau))$, така що при достатньо гладких g_0, g_1, g_2 функція*

$$v(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau)g_0(y,\tau)dy + \sum_{j=1}^{2} \int_0^l G_j(x,t,y,0)g_j(y)dy, \quad (x,t) \in \overline{Q}_0, \tag{6}$$

є класичним (класу $C_{2,\beta}(Q_0)$) розв'язком першої крайової задачі

$$D_t^\beta u - a(t)u_{xx} = g_0(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_0 \times (0,T],$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad x \in [0,l], t \in [0,T],$$

$$u(x,0) = g_1(x), \ \ u_t(x,0) = g_2(x), \quad x \in [0,l],$$

називається вектор-функцією Ґріна цієї задачі.

З означення випливає, що
$(LG_0)(x,t,y,\tau) = \delta(x-y,t-\tau), \quad (x,t),(y,\tau) \in Q_0;$
$G_j(0,t,y,\tau) = G_j(l,t,y,\tau) = 0, \quad y \in (0,l), t,\tau \in (0,T], j = 0,1,2;$
$G_1(x,0,y,0) = \delta(x-y), \quad \frac{\partial}{\partial t}G_2(x,0,y,0) = \delta(x-y), \quad x,y \in (0,l).$
Як при доведенні леми 1 із [9] показуємо, що

$$G_j(x,t,y,0) = f_{j-\beta}(t) * G_0(x,t,y,0), \quad (x,t) \in Q_0, \quad y \in (0,l), \quad j = 0,1,2. \tag{7}$$

Теорема 1. *При $a \in C_+[0,T]$ вектор-функція Ґріна першої крайової задачі* (1)–(4) *існує.*

Доведення. Враховуючи формулу (7), достатньо довести існування головної функції Ґріна $G_0(x,t,y,\tau)$. Як у [4], [7] для задачі Коші та у [5] для загальних параболічних крайових задач, її існування можна довести методом Леві, використовуючи відомий фундаментальний розв'язок даного рівняння зі сталим коефіцієнтом a [3].

Існування функції $G_0(x,t,y,\tau)$ можна також довести методом рядів Фур'є. Справді, вибираючи у формулі Ґріна за функції $\psi_k \in X(\overline{Q}_0)$ розв'язки рівнянь

$$(\widehat{L}\psi_k)(y,t) = \varphi_k(x,t,y,\tau),$$

де послідовність $\varphi_k(x,t,y,\tau)$ $(k \to \infty)$ є дельта-видною, із формули Ґріна після граничного переходу при $k \to \infty$ одержуємо зображення (6) розв'язку задачі (1)–(4), де $G_0(x,t,y,\tau)$ (границя послідовності ψ_k у $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^2)$) як функція (y,τ) є розв'язком задачі

$$\begin{gathered}(\widehat{L}_{y,\tau}G_0)(x,t,y,\tau) = \delta(x-y,t-\tau), \quad (x,t),(y,\tau) \in Q_0,\\ G_0(x,t,0,\tau) = G_0(x,t,l,\tau) = 0, \quad G_0(x,t,y,T) = G_{0\tau}(x,t,y,T) = 0.\end{gathered} \tag{8}$$

Шукаємо G_0 у вигляді

$$G_0(x,t,y,\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} S_m(x,t,\tau)\omega_m(y), \tag{9}$$

де $\omega_m(y)$ — ортонормовані власні функції стаціонарної крайової задачі

$$\omega_m'' + \lambda_m\omega_m = 0, \quad y \in (0,l), \quad \omega_m(0) = \omega_m(l) = 0.$$

Підставляючи (9) у рівняння задачі (8), матимемо

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[f_{-\beta}(\tau)\widehat{*}S_m(x,t,\tau) + \lambda_m a(\tau)S_m(x,t,\tau)\right]\omega_m(y) = \sum_{m=1}^{\infty} (\delta(x-y),\omega_m(y))\omega_m(y)\delta(t-\tau),$$

звідки, враховуючи, що $(\delta(x-y),\omega_m(y)) = \omega_m(x)$, одержуємо задачі для $S_m(x,t,\tau)$:

$$\begin{gathered}f_{-\beta}(\tau)\widehat{*}S_m(x,t,\tau) + \lambda_m a(\tau)S_m(x,t,\tau) = \omega_m(x)\delta(t-\tau),\\ S_m(x,t,T) = S_{m\tau}(x,t,T) = 0, \quad m = 1,2,\ldots.\end{gathered} \tag{10}$$

Кожна з задач (10) зводиться до лінійного інтегрального рівняння

$$S_m(x,t,\tau) + \lambda_m f_\beta(\tau)\widehat{*}(a(\tau)S_m(x,t,\tau)) = f_\beta(t-\tau)\omega_m(x). \tag{11}$$

Методом послідовних наближень знаходимо його розв'язок у вигляді рівномірно збіжного при $x \in [0,l]$, $0 \le \tau < t \le T$, ряду

$$S_m(x,t,\tau) = \Big[f_\beta(t-\tau) + \sum_{p=0}^{\infty}(-\lambda_m)^p \underbrace{f_\beta(\tau)\widehat{*}\Big(a(\tau)\Big(f_\beta(\tau)\widehat{*}\Big(\ldots a(\tau)\Big(f_\beta(\tau)\widehat{*}\Big(a(\tau)}_{p} f_\beta(t-\tau)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big]\omega_m(x).$$

Зокрема, у випадку $a(\tau) = a = const > 0$ матимемо

$$S_m(x,t,\tau) = \sum_{p=0}^{\infty} (-a\lambda_m)^p f_{(p+1)\beta}(t-\tau)\omega_m(x)$$
$$= (t-\tau)^{\beta-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{[-a\lambda_m(t-\tau)^\beta]^p}{\Gamma(p\beta+\beta)} \omega_m(x) = (t-\tau)^{\beta-1} E_\beta\big(-a\lambda_m(t-\tau)^\beta\big)\omega_m(x),$$

де $E_\beta(z) = E_{\beta^{-1}}(z,\beta) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} \frac{z^p}{\Gamma(p\beta+\beta)}$ — функція Міттаг-Лефлера [2], що при великих $|z|$ має оцінку $E_\beta(z) \le \frac{C}{|z|}$, $C = C(\beta)$ — деяка додатна стала. Тоді збіжність ряду (9) випливає з рівномірної збіжності ряду

$$\frac{C}{a(t-\tau)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\omega_m(x)\omega_m(y)|}{\lambda_m}, \quad x,y \in [0,l], \quad 0 \le \tau < t \le T.$$

В загальному випадку, при $a_0 \le a(t) \le A_0$ для всіх $t \in [0,T]$ оцінюємо у виразі для $S_m(x,t,\tau)$ суму двох сусідніх доданків:

$$\lambda_m^{2k} \underbrace{f_\beta(\tau)\widehat{*}\Big(a(\tau)\Big(f_\beta(\tau)\widehat{*}\Big(\ldots a(\tau)f_\beta(\tau)\widehat{*}\Big(a(\tau)f_\beta(t-\tau)}_{2k}\Big)\Big)\Big)\Big)$$
$$-\lambda_m^{2k+1} \underbrace{f_\beta(\tau)\widehat{*}\Big(a(\tau)\Big(f_\beta(\tau)\widehat{*}\Big(\ldots a(\tau)f_\beta(\tau)\widehat{*}\Big(a(\tau)f_\beta(t-\tau)}_{2k+1}\Big)\Big)\Big)\Big)$$
$$\le \lambda_m^{2k}\Big[A_0^{2k} f_{(2k+1)\beta}(t-\tau) - \lambda_m a_0^{2k+1} f_{(2k+2)\beta}(t-\tau)\Big]$$
$$\le \lambda_m^{2k}\Big[c^{2k} f_{(2k+1)\beta}(t-\tau) - \lambda_m c^{2k+1} f_{(2k+2)\beta}(t-\tau)\Big]$$

при деякому $c < a_0$ та всіх $\lambda_m \ge \frac{A_0^{2k}-c^{2k}}{a_0^{2k+1}-c^{2k+1}} \cdot \frac{f_{(2k+1)\beta}(t-\tau)}{f_{(2k+2)\beta}(t-\tau)} = \frac{A_0^{2k}-c^{2k}}{a_0^{2k+1}-c^{2k+1}} \cdot \frac{\Gamma(2k\beta+2\beta)}{\Gamma(2k\beta+\beta)(t-\tau)^\beta}$. Зауважимо, що згідно з [11, с. 67] $\frac{\Gamma(2k\beta+2\beta)}{\Gamma(2k\beta+\beta)} = O((2k\beta)^\beta)$ для великих k. Тоді при великих $\lambda_m(t-\tau)^\beta$ матимемо

$$|S_m(x,t,\tau)| \le (t-\tau)^{\beta-1} E_\beta(-c\lambda_m(t-\tau)^\beta)|\omega_m(x)|, \quad x \in [0,l], \quad 0 \le \tau < t \le T.$$

Отже, при $a \in C_+[0,T]$ матимемо аналогічну до випадку сталої функції a оцінку розв'язку рівняння (11) при великих $\lambda_m(t-\tau)^\beta$, а звідси рівномірну при $x,y \in [0,l]$, $0 \le \tau < t \le T$, збіжність ряду (9). Головна функція Ґріна задачі (1)–(4) існує. ☐

Наслідок 1. *Правильні оцінки*

$$|G_i(x,t+\Delta t,y,\tau,a) - G_i(x,t,y,\tau,a)| \le M_i(x,t,y,\tau,a)|\Delta t|^\gamma, \quad (x,t),(y,\tau) \in \overline{Q}_0, \qquad (12)$$

де $0 < \gamma < 1$*, невід'ємні функції* $M_i(x,t,y,\tau,a)$ *мають такі ж оцінки, як* $G_i(x,t,y,\tau,a)$*,* $i = 0,1,2$*, відповідно із заміною* β *на* $\beta-\gamma$*.*

Доведення. Використовуючи зображення (9), матимемо

$$G_0(x,t+\Delta t,y,\tau,a) - G_0(x,t,y,\tau,a) = \sum_{m=1}^{\infty} [S_m(x,t+\Delta t,\tau,a) - S_m(x,t,\tau,a)]\omega_m(y). \qquad (13)$$

Для функцій $Z_m(x,t,\tau,\Delta t,a) = S_m(x,t+\Delta t,\tau,a) - S_m(x,t,\tau,a)$ одержуємо інтегральні рівняння

$$Z_m(x,t,\tau,\Delta t,a) + \lambda_m f_\beta(\tau)\widehat{*}(a(\tau)Z_m(x,t,\tau,\Delta t,a)) = [f_\beta(t+\Delta t-\tau) - f_\beta(t-\tau)]\omega_m(x)$$

вигляду (11). Оскільки $f_\beta(t+\Delta t-\tau) - f_\beta(t-\tau) = f_{-\lambda}(t) * [f_{\beta+\lambda}(t+\Delta t-\tau) - f_{\beta+\lambda}(t-\tau)]$, при $1-\beta<\lambda<1$, якщо $\beta\in(0,1)$, та $\lambda<2-\beta$, якщо $\beta\in(1,2)$, маємо $\beta+\lambda-1=\gamma\in(0,1)$ та $\beta-\gamma=1-\lambda>0$, то враховуючи нерівність

$$|(t+\Delta t-\tau)^\gamma - (t-\tau)^\gamma| = (t-\tau)^\gamma\Big|\Big(1+\frac{\Delta t}{t-\tau}\Big)^\gamma - 1\Big| \le |\Delta t|^\gamma,$$

одержуємо

$$|f_\beta(t+\Delta t-\tau) - f_\beta(t-\tau)| \le f_{1-\lambda}(t-\tau)|\Delta t|^\gamma = f_{\beta-\gamma}(t-\tau)|\Delta t|^\gamma.$$

Як в доведенні теореми 1 знаходимо функції $Z_m(x,t,y,\tau,\Delta t,a)$, що матимуть такі ж оцінки, як розв'язки рівнянь (11) із заміною β на $\beta-\gamma$ та множником $|\Delta t|^\gamma$. Враховуючи зображення (13), одержуємо оцінку (12) при $j=0$. Інші оцінки в наслідку одержуємо з таких самих міркувань та враховуючи співвідношення (7). □

Використовуватимемо надалі позначення $G_j(x,t,y,\tau,a)$ замість $G_j(x,t,y,\tau)$, $j=0,1,2$. Згідно з методом Леві, для функцій $G_0(x,t,y,\tau,a)$ та $G_j(x,t,y,0,a)$ правильні такі ж оцінки, як для параметриксів $G(x-y,t-\tau,a(\tau))$, $f_{j-\beta}(t)*G(x-y,t,0,a(0))$, $j=1,2$, відповідно [4], [7], [8].

Згідно з [3], фундаментальна функція $G(x,t,a)$ оператора L зі сталим коефіцієнтом $a>0$ має вигляд

$$G(x,t,a) = \frac{\pi^{-1/2}t^{\beta-1}}{|x|}H^{2,0}_{1,2}\left(\frac{|x|^2}{4at^\beta}\middle|\begin{matrix}(\beta,\beta) & \\ (1,1) & (1/2,1)\end{matrix}\right),$$

де $H^{m,n}_{p,q}\left(z\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right)$ — H-функція Фокса [6].

Використовуючи властивості H-функцій Фокса (як у [9]), метод Леві та враховуючи результати [13], знаходимо оцінки для компонент вектор-функції Ґріна та їх похідних. При $[a(t)]^{-1}\le R$ для всіх $t\in[0,T]$ матимемо

$$\Big|\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^k G_0(x,t,y,\tau,a)\Big| \le C_k^* R^{\frac{k+1}{2}}(t-\tau)^{\frac{\beta(1-k)}{2}-1}, \quad |x-y|^2 < 4(t-\tau)^\beta/R,$$

$$\Big|\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^k G_0(x,t,y,\tau,a)\Big| \le \frac{C_k(t-\tau)^{\beta-1}}{|x-y|^{k+1}}, \quad |x-y|^2 > 4(t-\tau)^\beta/R, \quad k=0,1,2,\dots,$$

$$\Big|\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^k G_j(x,t,y,0,a)\Big| \le C_{jk}^* R^{\frac{k+1}{2}} t^{j-1-(k+1)\frac{\beta}{2}}, \qquad |x-y|^2 < 4t^\beta/R,$$

$$\Big|\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^k G_j(x,t,y,0,a)\Big| \le \frac{\widehat{C}_{jk}t^{j-1}}{|x-y|}\Big(\frac{R|x-y|^2}{4t^\beta}\Big)^{\frac{1-j+k+\frac{1}{2}}{2-\beta}} e^{-c\left(\frac{R|x-y|^2}{4t^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}} \le C_{jk}R^{-\frac{1}{2-\beta}}|x-y|^{-1-\frac{2}{2-\beta}}t^{j-1+\frac{\beta}{2-\beta}},$$

$$|x-y|^2 > 4t^\beta/R, \quad j=1,2, \qquad c=(2-\beta)\beta^{\beta(2-\beta)},$$

$C_k, C_k^*, C_{jk}, C_{jk}^*, \hat{C}_{jk}$ $(j=1,2, k=0,1,2,\dots)$ — деякі додатні сталі.

Використовуватимемо спряжені оператори Ґріна

$$(\widehat{\mathfrak{G}}_0\varphi)(y,\tau) = \int_\tau^T dt \int_0^l G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi(x,t)dx,$$
$$(\widehat{\mathfrak{G}}_j\varphi)(y) = \int_0^T dt \int_0^l G_j(x,t,y,0,a)\varphi(x,t)dx, \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\bar{Q}_0), \quad j=1,2.$$

Як у [9] доводимо, що для кожної $\psi \in X(\bar{Q}_0)$

$$(\widehat{\mathfrak{G}}_0(\widehat{L}\psi))(y,\tau) = \psi(y,t), \quad (y,t) \in \bar{Q}_0,$$

$$(\widehat{\mathfrak{G}}_j(\widehat{L}\psi))(y) = \int_0^T f_{j-\beta}(t)\psi(y,t)dt, \quad y \in [0,l], \quad j=1,2, \tag{14}$$

а при $a \in C_+^\infty[0,T]$

$$\widehat{\mathfrak{G}_0} : \mathfrak{D}(\bar{Q}_0) \to X(\bar{Q}_0), \qquad \widehat{\mathfrak{G}_j} : \mathfrak{D}(\bar{Q}_0) \to C^\infty[0,l], \quad j=1,2. \tag{15}$$

Теорема 2. *За припущення (A) існує єдиний розв'язок $u \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$ першої крайової задачі* (1)–(4). *Розв'язок визначений за формулою*

$$(u,\varphi) = (F, \widehat{\mathfrak{G}}_0\varphi) + \sum_{j=1}^{2}(F_j, \widehat{\mathfrak{G}}_j\varphi) \quad \forall\ \varphi \in \mathfrak{D}(\bar{Q}_0). \tag{16}$$

Теорема доводиться за схемою доведення теореми 1 у [9] із використанням наведених вище властивостей (14) та (15) спряжених операторів Ґріна.

Введемо оператори

$$(\widehat{G}_0\varphi)(y,t,\tau) = \int_0^l G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi(x)dx,$$
$$(\widehat{G}_j\varphi)(y,t) = \int_0^l G_j(x,t,y,0,a)\varphi(x)dx, \quad j=1,2, \quad \varphi \in \mathfrak{D}[0,l].$$

Лема 1. *Нехай $a \in C_+[0,T]$. Тоді при $\max\limits_{t\in[0,T]}[a(t)]^{-1} \le R$, довільних $0 \le \tau < t \le T$ правильні оцінки*

$$\begin{aligned} \left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k(\widehat{G}_0\varphi)(y,t,\tau)\right| &\le c_0\|\varphi\|_{C^k[0,l]} \cdot (t-\tau)^{\beta/2-1}[\sqrt{R} + (t-\tau)^{\beta/2}], \\ \left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k(\widehat{G}_j\varphi)(y,t)\right| &\le c_j\|\varphi\|_{C^k[0,l]} \cdot t^{j-1}, \quad j=1,2, \quad k=0,1,2,\ldots, \end{aligned} \tag{17}$$

а також

$$\begin{aligned} \left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k(\widehat{G}_0\varphi)(y,t,\tau)\right| &\le c_0^*\sqrt{R}\|\varphi\|_{C^{k-1}[0,l]} \cdot (t-\tau)^{\beta/2-1}, \\ \left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k(\widehat{G}_j\varphi)(y,t)\right| &\le c_j^*\|\varphi\|_{C^{k-1}[0,l]} \cdot [\sqrt{R}t^{j-1-\beta/2} + t^{j-1}], \quad j=1,2, \quad k=1,2,\ldots, \end{aligned} \tag{18}$$

c_j, c_j^* $(j=0,1,2)$ — додатні сталі.

Доведення. Використовуючи оцінки головної функції Ґріна, при $\varphi \in C[0,l]$ для всіх $t \in [0,T]$ знаходимо

$$\Big|\int_0^l G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi(x)dx\Big|$$
$$\leq \Big(\int_{|x-y|<2(t-\tau)^{\beta/2}/\sqrt{R}}\Big|G_0(x,t,y,\tau,a)\Big|dx+\int_{|x-y|>2(t-\tau)^{\beta/2}/\sqrt{R}}\Big|G_0(x,t,y,\tau,a)\Big|dx\Big)\cdot\|\varphi\|_{C[0,l])}$$
$$\leq \Big(\int_{|x-y|<2(t-\tau)^{\beta/2}/\sqrt{R}}C_0^*R^{\frac{1}{2}}(t-\tau)^{\frac{\beta}{2}-1}dx+\int_{|x-y|>2(t-\tau)^{\beta/2}/\sqrt{R}}\frac{C_0(t-\tau)^{\beta-1}}{|x-y|}dx\Big)\cdot\|\varphi\|_{C[0,l]}$$
$$\leq \big(2C_0^*(t-\tau)^{\beta-1}+l\frac{C_0}{2}\sqrt{R}(t-\tau)^{\beta/2-1}\big)\|\varphi\|_{C[0,l]}\leq c_0\|\varphi\|_{C[0,l]}\cdot(t-\tau)^{\frac{\beta}{2}-1}[\sqrt{R}+(t-\tau)^{\frac{\beta}{2}}],$$

$c_0=const>0$ і при $\varphi\in C[0,l]$ для всіх $(y,\tau)\in\overline{Q}_0$, $t\in[0,T]$ функції $(G_0\varphi)(y,t,\tau)$ $(y\in[0,l]$, $0\leq\tau<t\leq T)$ є неперервними.

Оскільки $\Big|\int_0^l\frac{\partial}{\partial y}G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi(x)dx\Big|=\Big|\int_0^l G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi'(x)dx\Big|$ при $\varphi\in C^1[0,l]$, то з попередньої оцінки одержуємо

$$\Big|\frac{\partial}{\partial y}\int_0^l G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi(x)dx\Big|\leq c_0\|\varphi\|_{C^1[0,l]}\cdot(t-\tau)^{\frac{\beta}{2}-1}[\sqrt{R}+(t-\tau)^{\frac{\beta}{2}}],\tag{19}$$

і при $\varphi\in C^1[0,l]$ для всіх $(y,\tau)\in\overline{Q}_0$, $t\in[0,T]$ функції $\frac{\partial}{\partial y}(G_0\varphi)(y,t,\tau)$ $(y\in[0,l]$, $0\leq\tau<t\leq T)$ є неперервними.

З іншого боку, застосовуючи оцінку похідної функції $G_0(x,t,y,\tau,a)$, при $\varphi\in C[0,l]$ для всіх $t\in[0,T]$ матимемо

$$\Big|\int_0^l\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi(x)dx\Big|$$
$$\leq\Big(\int_{|x-y|<2(t-\tau)^{\beta/2}/\sqrt{R}}C_1^*R(t-\tau)^{-1}dx+\int_{|x-y|>2(t-\tau)^{\beta/2}/\sqrt{R}}\frac{C_1(t-\tau)^{\beta-1}}{|x-y|^2}dx\Big)\cdot\|\varphi\|_{C[0,l]}$$
$$\leq c_0^*\sqrt{R}\|\varphi\|_{C[0,l]}\cdot(t-\tau)^{\frac{\beta}{2}-1},\quad c_0^*=const>0.\tag{20}$$

Із оцінок (19) та (20) за допомогою інтегрування частинами знаходимо відповідно оцінки (17) та (18) для $\widehat{G}_0\varphi$.

При $\varphi\in C[0,l]$, $j=1,2$, оцінимо

$$\Big|\int_0^l\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^kG_j(x,t,y,0,a)\varphi(x)dx\Big|\leq\Big[\int_{y-\frac{2t^{\beta/2}}{\sqrt{R}}}^{y+\frac{2t^{\beta/2}}{\sqrt{R}}}C_{jk}^*R^{\frac{k+1}{2}}t^{j-1-(k+1)\frac{\beta}{2}}dx$$
$$+\int_{|x-y|>\frac{2t^{\beta/2}}{\sqrt{R}}}\frac{C_{jk}t^{j-1+\frac{\beta}{2-\beta}}}{R^{\frac{1}{2-\beta}}|y-x|^{1+\frac{2}{2-\beta}}}dx\Big]\cdot\|\varphi\|_{C[0,l]}\leq c_{jk}^*[\sqrt{R}^kt^{j-1-\frac{k\beta}{2}}+t^{j-1}]\cdot\|\varphi\|_{C[0,l]},$$

$c_{jk}^*=const>0$, $k=0,1,2,\ldots$, а, отже, при $\varphi\in C[0,l]$ функції $(G_j\varphi)(y,\tau)$ неперервні в $\overline{Q}_0$, $j=1,2$.

Використовуючи одержані оцінки при $k=0$ $(k=1)$ та інтегрування частинами, як вище, знаходимо оцінки (17) (відповідно (18)) для випадку $j=1,2$. $\square$

Теорема 3. *За припущення (B) існує єдиний розв'язок* $u \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0) \cap C[0,T]$ *першої крайової задачі* (1)–(4), *він визначений за формулою*

$$\big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big) = \int_0^t g(\tau)\big(F_0(\cdot),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\big)d\tau + \sum_{j=1}^{2}\big(F_j(\cdot),(\widehat{G}_j\varphi)(\cdot,t,\tau)\big) \qquad \forall\ \varphi \in \mathfrak{D}[0,l], \quad t \in [0,T]. \tag{21}$$

Доведення. Тепер $F(x,t) = F_0(x)\cdot g(t)$ — прямий добуток узагальнених функцій $F_0 \in \mathfrak{D}'[0,l]$, $g \in C[0,T]$. Ясно, що така узагальнена функція належить $\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$ (навіть $F \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0) \cap C[0,T]$, оскільки для $g \in C[0,T]$ та довільної $\varphi \in \mathfrak{D}[0,l]$ функція $(F_0(x)\cdot g(t),\varphi(x)) = (F_0,\varphi)g(t)$ є неперервною на $[0,T]$). Тому за теоремою 2 при $a \in C_+^\infty[0,T]$ існує єдиний розв'язок $u \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$ першої крайової задачі (1)–(4), визначений за формулою (16). Покажемо існування розв'язку $u \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0) \cap C[0,T]$ цієї задачі за припущення (B) та що для нього правильне зображення (21).

Узагальнені функції в обмеженій області мають скінченний порядок сингулярності [10]: існують такі цілі числа k_0, k_1, k_2 та функції $g_{0k}, g_{1k}, g_{2k} \in L_1(0,l)$, що

$$(F_j(y),\varphi(y)) = \sum_{k=0}^{k_j}\int_0^l g_{jk}(y)\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^k\varphi(y)dy \quad \forall\ \varphi \in \mathfrak{D}[0,l], \quad j = 0,1,2. \tag{22}$$

Використовуючи зображення (22) та лему 1, переконуємося, що для довільної $\varphi \in \mathfrak{D}[0,l]$ функції у правій частині формули (21)

$$\int_0^t g(\tau)(F_0(y),(\widehat{G_0}\varphi)(y,t,\tau))d\tau = \sum_{k=0}^{k_0}\int_0^t g(\tau)\Big[\int_0^l g_{0k}(y)\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^k(\widehat{G_0}\varphi)(y,t,\tau)dy\Big]d\tau,$$

$$(F_j(y),(\widehat{G_0}\varphi)(y,t)) = \sum_{k=0}^{k_j}\int_0^l g_{jk}(y)\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^k(\widehat{G_j}\varphi)(y,t)dy, \quad j = 1,2,$$

неперервні на $[0,T]$, та правильні оцінки

$$\Big|\int_0^t g(\tau)(F_0(y),(\widehat{G_0}\varphi)(y,t,\tau))d\tau\Big|$$
$$\le c_0\sum_{k=0}^{k_0}\|\varphi\|_{C^k[0,l]}\cdot\int_0^t|g(\tau)|\Big[\int_0^l|g_{0k}(y)|dy\Big]\Big[(t-\tau)^{\beta-1}+\sqrt{R}(t-\tau)^{\beta/2-1}\Big]d\tau \le b_0t^{\beta/2},$$

$$|(F_j(y),(\widehat{G_0}\varphi)(y,t))| \le c_j\sum_{k=0}^{k_j}\|\varphi\|_{C^k[0,l]}\cdot t^{j-1}\int_0^l|g_{jk}(y)|dy = b_jt^{j-1}, \quad j = 1,2,$$

b_j $(j = 0,1,2)$ — деякі додатні сталі. Отже, права частина у формулі (21) визначена та функція (21) неперервна за змінною $t \in [0,T]$.

Покажемо, що функція (21) задовольняє тотожність (5). За лемою 1 при довільних $0 \le \tau < t \le T$, $\varphi \in \mathfrak{D}[0,l]$, маємо $(\widehat{G}_j\varphi)(\cdot,t,\tau) \in \mathfrak{D}[0,l]$, а також $(\widehat{G}_j(\widehat{L}\psi))(\cdot,t,\tau) \in \mathfrak{D}[0,l]$ для кожної $\psi \in X(\overline{Q}_0)$, та визначено $(u,\widehat{L}\psi) = \int_0^T\big(u(\cdot,t),(\widehat{L}\psi)(\cdot,t)\big)dt$. Згідно з формулою (21),

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \big(u(\cdot,t),(\widehat{L}\psi)(\cdot,t)\big)dt \\
&= \int_0^T \Big(\int_0^t g(\tau)\big(F_0(y),(\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(y,t,\tau)\big)d\tau\Big)dt + \sum_{j=1}^{2}\int_0^T \big(F_j(y),(\widehat{G}_j(\widehat{L}\psi))(y,t,\tau)\big)dt \\
&= \Big(F_0(y),\int_0^T \Big(\int_0^t g(\tau)(\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(y,t,\tau)d\tau\Big)dt\Big) + \sum_{j=1}^{2}\int_0^T \big(F_j(y),(\widehat{G}_j(\widehat{L}\psi))(y,t,\tau)\big)dt \\
&= \Big(F_0(y),\int_0^T g(\tau)\Big(\int_\tau^T \widehat{G}_0(\widehat{L}\psi)(y,t,\tau)dt\Big)d\tau\Big) + \sum_{j=1}^{2}\Big(F_j(y),\int_0^T (\widehat{G}_j(\widehat{L}\psi))(y,t,\tau)dt\Big) \\
&= \big(F_0(y)\cdot g(\tau),(\widehat{\mathfrak{G}}_0(\widehat{L}\psi))(y,\tau)\big) + \sum_{j=1}^{2}\big(F_j,\widehat{\mathfrak{G}}_j(\widehat{L}\psi)\big).
\end{aligned}
$$

Скориставшись формулами (14) (правильними при $a \in C_+[0,T]$), одержуємо

$$
(u,\widehat{L}\psi) = (F_0(y)\cdot g(\tau),\psi(y,\tau)) + \sum_{j=1}^{2}\Big(F_j,\int_0^T f_{j-\beta}(t)\psi(\cdot,t)dt\Big) \qquad \forall\ \psi \in X(\bar{Q}_0),
$$

тобто тотожність (5). За означенням функція (21) є розв'язком задачі (1)–(4) шуканого класу. Єдиність розв'язку задачі доводиться як у [9]. □

Наслідок 2. *За умов теореми 3 також усі похідні* $\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)^k u$, $k = 1,2,\dots$, *розв'язку задачі неперервні за змінною* $t \in [0,T]$: $\big(\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)^k u(x,\cdot),\varphi(x)\big) \in C[0,T]$ *для кожної* $\varphi \in \mathfrak{D}(0,l)$.

Зауваження 1. *Для рівняння* (1) *з загальнішим вільним членом — узагальненою функцією* $F \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0) \cap C[0,T]$ *(замість* $F_0 \cdot g$*), при* $F_j \in \mathfrak{D}'[0,l]$, $j = 1,2$, *та навіть* $a \in C_+^\infty[0,T]$ *таким способом не можемо довести, що розв'язок задачі* (1)–(4) *належить* $\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0) \cap C[0,T]$. *Справді, тепер використовуємо зображення*

$$
(F(y,\tau),\varphi(y,\tau)) = \sum_{k=0}^{K_0}\sum_{p=0}^{P_0}\int_0^T d\tau\int_0^l g_{0kp}(y,\tau)\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^k\Big(\frac{\partial}{\partial\tau}\Big)^p\varphi(y,\tau)dy \quad \forall\ \varphi \in \mathfrak{D}(\overline{Q}_0)
$$

із деякими $g_{0kp} \in L_1(\overline{Q}_0)$, $k = 0,\dots,K_0$, $p = 0,\dots,P_0$. *Однак при* $P_0 > 0$ *та* $\varphi \in \mathfrak{D}[0,l]$ *функції* $\big(\frac{\partial}{\partial\tau}\big)^p(\widehat{G}_0\varphi)(y,t,\tau)$ *мають загалом неінтегровні особливості.*

Зауваження 2. *Розглянуто задачі в одновимірному просторовому випадку. Результати поширюються на випадок* $Q_0 = \Omega \times (0,T]$, *де* Ω *— обмежена область в* $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$.

REFERENCES

[1] Caputo M. *Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent–II*. Geophys. J. R. Astr. Soc. 1967, **13**, 529–539. doi:10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x

[2] Djrbashian M. M. Integral transformations and representations of functions in complex domain. Nauka, Moscow, 1999. (in Russian)

[3] Sheng D. J. *Time- and space-fractional partial differential equations*. J. Math. Phys. 2005, **46** (1), 13504–13511. doi:10.1063/1.1819524

[4] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2004.

[5] Ivasyshen S.D. Green matrices of parabolic boundary value problems. Vyshcha shkola, Kyiv, 1990. (in Russian)

[6] Kilbas A.A., Saigo M. H-Transforms: theory and applications. In: Prudnikov A.P., Dunkl C.F., Glaeske H.-J., Saigo M. (Eds.) Analytical Methods and Special Functions, **9**. Chapman and Hall/CRC, London-Washington, 2004.

[7] Kochubei A.N. *Fractional-order diffusion*. Differential Equations 1990, **26**, 485–492. (in Russian)

[8] Kochubei A.N., Eidelman S.D. *Equations of one-dimensional fractional-order diffusion*. Dop. NAS of Ukraine 2003, **12**, 11–16. (in Russian)

[9] Lopushans'ka H.P., Lopushans'kyi A.O. *Space–time fractional Cauchy problem in spaces of generalized functions*. Ukrainian Math. J. 2013, **64** (8), 1215-1230. doi:10.1007/s11253-013-0711-z (translation of Ukr. Mat. Zhurn. 2012, **64** (8), 1067–1079)

[10] Shilov G.E. Mathematical Analysis. Nauka, Moscow, 1965. (in Russian)

[11] Titchmarsh E. The Theory of Functions. Oxford University Press, USA, 1976.

[12] Vladimirov V.S. Equations of Mathematical Physics. Nauka, Moskow, 1981. (in Russian)

[13] Voroshylov A.A., Kilbas A.A. *Conditions of the existence of classical solution of the Cauchy problem for diffusion-wave equation with Caputo partial derivative*. Dokl. Ak. Nauk 2007, **414** (4), 1–4. (in Russian)

Надійшло 18.09.2013

Lopushanskyj A.O. *Regularity of the solutions of the boundary value problems for diffusion-wave equation with generalized functions in right-hand sides*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 279–289.

We prove the unique solvability of the first boundary value problem of equation

$$u_t^{(\beta)} - a(t)\Delta u = F(x,t), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T],$$

with Riemann-Liouville fractional derivative $u_t^{(\beta)}$ of the order $\beta \in (0,2)$, positive smooth coefficient $a(t)$ and generalized functions in right-hand sides. We obtain some sufficient conditions of the regularity of its solution as variable t.

Key words and phrases: fractional derivative, generalized function, boundary value problem, Green vector-function.

Лопушанский А.О. *Регулярность решений краевых задач для диффузионно-волнового уравнения с обобщенными функциями в правых частях* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 279–289.

Доказана однозначная разрешимость первой краевой задачи для уравнения

$$u_t^{(\beta)} - a(t)u_{xx} = F(x,t), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T],$$

с дробной производной $u_t^{(\beta)}$ Римана-Лиувилля порядка $\beta \in (0,2)$, положительным гладким коэффициентом $a(t)$, обобщенными функциями в правых частях и установлено некоторые достаточные условия регулярности ее решения по переменной t.

Ключевые слова и фразы: производная дробного порядка, обобщенная функция, краевая задача, вектор-функция Грина.