ISSN 2075-9827 **http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp**
Карпатські математичні публікації, Т.5, №2 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.2

УДК 517.53

ГЛОВА Т.Я.[1], ФІЛЕВИЧ П.В.[2]

ПРО ОДНУ ОЦІНКУ R-ТИПУ ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ ТА ЇЇ ТОЧНІСТЬ

Глова Т.Я., Філевич П.В. *Про одну оцінку R-типу цілого ряду Діріхле та її точність* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — С. 208–216.

Нехай (λ_n) — невід'ємна зростаюча до $+\infty$ послідовність, $\tau = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n}$, а ρ — додатне число. З класичної теореми Ж. Валірона випливає, що для кожного цілого ряду Діріхле вигляду $F(s) = \sum a_n e^{s\lambda_n}$ правильна оцінка

$$\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\ln \sup\{|F(s)| : \operatorname{Re} s = \sigma\}}{e^{\rho\sigma}} \le e^{\rho\tau} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lambda_n}{e\rho} |a_n|^{\frac{\rho}{\lambda_n}}.$$

В роботі доведено точність цієї оцінки.

Ключові слова і фрази: цілий ряд Діріхле, максимум модуля, максимальний член, R-тип.

[1] Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна
[2] Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна
E-mail: hlova_taras@ukr.net (Глова Т.Я.), filevych@mail.ru (Філевич П.В.)

ВСТУП

Нехай Λ — клас невід'ємних зростаючих до $+\infty$ послідовностей $\lambda = (\lambda_n)$. Для послідовності $\lambda \in \Lambda$ через $\mathcal{D}(\lambda)$ позначимо клас цілих (абсолютно збіжних в $\mathbb{C}$) рядів Діріхле вигляду

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

які не зводяться до експоненціальних поліномів, і нехай

$$\tau(\lambda) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n}.$$

Покладемо $\mathcal{D} = \cup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{D}(\lambda)$. Максимум модуля і максимальний член ряду (1) визначимо відповідно за рівностями

$$M(\sigma, F) = \sup\{|F(s)| : \operatorname{Re} s = \sigma\}, \qquad \mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| e^{\sigma\lambda_n} : n \in \mathbb{N}_0\},$$

де $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, і для кожного $\rho \in (0, +\infty)$ (надалі ρ вважаємо фіксованим) покладемо

$$T(F) = \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\ln M(\sigma, F)}{e^{\rho\sigma}}, \qquad t(F) = \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{e^{\rho\sigma}}, \qquad K(F) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lambda_n}{e\rho} |a_n|^{\frac{\rho}{\lambda_n}}.$$

Величина $T(F)$ називається [2, с. 178] R-типом (типом за Ріттом) ряду F. З нерівності $M(\sigma, F) \ge \mu(\sigma, F)$ (аналог нерівності Коші) випливає, що $T(F) \ge t(F)$. Крім того, легко

2010 *Mathematics Subject Classification:* 30B50, 30D10, 30D15, 30D20.

довести (див. нижче лему 5), що $t(F) = K(F)$ для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}$. Отже, завжди $T(F) \geq K(F)$.

Ж.Ф. Рітт [5] довів, що умова $\tau(\lambda) = 0$ є достатньою для того, щоб R-тип кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$ можна було обчислити за формулою $T(F) = K(F)$. Зазначимо, що твердження Ж.Ф. Рітта випливає з наступної теореми Ж. Валірона [9] (див. також [2, с. 184], [4], [1]): *якщо $A > 0$ і $\tau(\lambda) < A$, то для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$ виконується співвідношення*

$$M(\sigma, F) = o(\mu(\sigma + A, F)), \quad \sigma \to +\infty. \tag{2}$$

Справді, використовуючи (2), отримуємо

$$T(F) \leq \varlimsup_{\sigma \to +\infty} \frac{\ln \mu(\sigma + A, F)}{e^{\rho\sigma}} = e^{\rho A} \varlimsup_{\sigma \to +\infty} \frac{\ln \mu(\sigma + A, F)}{e^{\rho(\sigma + A)}} = e^{\rho A} t(F) = e^{\rho A} K(F).$$

З довільності $A > \tau(\lambda)$ випливає, що

$$T(F) \leq e^{\rho\tau(\lambda)} K(F), \tag{3}$$

а тому $T(F) = K(F)$ за умови $\tau(\lambda) = 0$. Крім того, якщо $\tau(\lambda) < +\infty$ і $K(F) = 0$, то й $T(F) = 0$, а тому $T(F) = K(F)$. Згідно з нерівністю $T(F) \geq K(F)$, рівність $T(F) = K(F)$ правильна і у випадку $K(F) = +\infty$.

Метою нашої роботи є доведення наступних теорем, які вказують на точність оцінки (3).

Теорема 1. *Нехай послідовність $\lambda \in \Lambda$ така, що $\tau(\lambda) < +\infty$, $K \in [0, +\infty]$ і $T \in [K, e^{\rho\tau(\lambda)} K]$. Тоді існує ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$, для якого $K(F) = K$ і $T(F) = T$.*

Теорема 2. *Нехай послідовність $\lambda \in \Lambda$ така, що $\tau(\lambda) = +\infty$, $K \in [0, +\infty]$ і $T \in [K, +\infty]$. Тоді існує ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$, для якого $K(F) = K$ і $T(F) = T$.*

Зауваження 1. *З теорем 1 і 2 випливає, що для кожної послідовності $\lambda \in \Lambda$ такої, що $\tau(\lambda) > 0$, існує ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$, для якого $T(F) > K(F)$. Отже, у випадку $\tau(\lambda) > 0$, на відміну від випадку $\tau(\lambda) = 0$, R-тип ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$ не можна, взагалі кажучи, обчислити за формулою $T(F) = K(F)$.*

Зауваження 2. *Нехай $\lambda \in \Lambda$, а $\lambda^* = (\lambda_k^*)$ — підпослідовність послідовності λ. Розглянемо довільний ряд Діріхле $F^* \in \mathcal{D}(\lambda^*)$ вигляду*

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* e^{s\lambda_k^*}, \quad s = \sigma + it, \tag{4}$$

і для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ покладемо $a_n = a_k^*$, якщо $\lambda_n = \lambda_k^*$ для деякого $k \in \mathbb{N}_0$, і $a_n = 0$, якщо λ_n не є членом підпослідовності λ^*. Тоді для ряду Діріхле (1) *з так визначеними коефіцієнтами a_n маємо $F(s) \equiv F^*(s)$, а тому $F \in \mathcal{D}(\lambda)$. Отже, якщо для деякої підпослідовності λ^* послідовності λ існує ряд Діріхле $F^* \in \mathcal{D}(\lambda^*)$, що володіє певною властивістю, то існує ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$, який володіє цією ж властивістю.*

Зауваження 3. *Легко довести, що для кожної послідовності $\lambda \in \Lambda$ і довільної сталої величини $K \in [0, +\infty]$ існує такий ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$, що $T(F) = K(F) = K$. Справді, з* *кожної послідовності $\lambda \in \Lambda$ можна виділити таку додатну підпослідовність $\lambda^* = (\lambda_k^*)$, що $\tau(\lambda^*) = 0$. Покладемо тоді*

$$a_k^* = \left(\frac{K_k e\rho}{\lambda_k^*}\right)^{\frac{\lambda_k^*}{\rho}}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{5}$$

де (K_k) — довільна додатна послідовність, що прямує до K (у випадку $K = +\infty$ беремо $K_k = \sqrt{\lambda_k^*}$ для всіх $k \in \mathbb{N}_0$), і розглянемо ряд Діріхле вигляду (4). За наведеною нижче лемою 2 цей ряд є цілим, а тому $F^* \in \mathcal{D}(\lambda^*)$. Крім того, для нього, як легко перевірити, $K(F^*) = K$. Тоді $T(F^*) = K(F^*) = K$ за наведеним вище твердженням Ж.Ф. Рітта. Залишилось врахувати зауваження 2.

1 Допоміжні результати

Наведемо деякі допоміжні результати, якими скористаємося при доведенні теорем 1 і 2. Наступну лему доведено в роботі М.М. Шеремети [6].

Лема 1. *З довільної послідовності $\lambda \in \Lambda$, для якої $\tau(\lambda) > \tau > 0$, можна виділити таку підпослідовність $\lambda^* = (\lambda_k^*)$, що $\ln k \le \tau\lambda_k^* + 1$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і $\ln k_j \ge \tau\lambda_{k_j}^*$ для деякої зростаючої послідовності (k_j) натуральних чисел.*

Нехай $\lambda \in \Lambda$. Розглянемо довільний (не обов'язково цілий) ряд Діріхле вигляду (1) і покладемо

$$B(F) = \{\sigma \in (-\infty, +\infty) : |a_n|e^{\sigma\lambda_n} = o(1), n \to \infty\}, \qquad \beta(F) = \begin{cases} -\infty, & B(F) = \varnothing; \\ \sup B(F), & B(F) \ne \varnothing. \end{cases}$$

Легко довести (див., напр., [7, с. 10]), що

$$\beta(F) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}.$$

Приймемо також

$$h_0(F) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{-\ln|a_n|}.$$

Правильна така лема (див., напр., [7, с. 10, 12]).

Лема 2. *Нехай $\lambda \in \Lambda$, а F — довільний ряд Діріхле вигляду (1). Якщо $\tau(\lambda) = 0$ або $h_0(F) < 1$, то для того, щоб цей ряд був цілим, необхідно і досить, щоб виконувалась умова $\beta(F) = +\infty$.*

Для кожної послідовності $\lambda \in \Lambda$ введемо позначення

$$\tau_1(\lambda) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n \ln \lambda_n}.$$

Зауважимо, що якщо $\tau(\lambda) < +\infty$, то $\tau_1(\lambda) = 0$.

Лема 3. *Нехай $\lambda \in \Lambda$, а F — довільний ряд Діріхле вигляду (1). Якщо $\tau_1(\lambda) < \frac{1}{\rho}$ і $K(F) < +\infty$, то цей ряд є цілим.*

Доведення. Зафіксуємо таке додатне число K, що $K(F) < K$. Тоді з означення величини $K(F)$ отримуємо

$$|a_n| \le \left(\frac{Ke\rho}{\lambda_n}\right)^{\frac{\lambda_n}{\rho}}, \quad n \ge n_0.$$

Отже,

$$h_0(F) \le \rho \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n \ln \frac{\lambda_n}{Ke\rho}} = \rho\tau_1(\lambda) < 1.$$

Крім того,

$$\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n|} \ge \frac{1}{\lambda_n}\frac{\lambda_n}{\rho}\ln\frac{\lambda_n}{Ke\rho} = \frac{1}{\rho}\ln\frac{\lambda_n}{Ke\rho}, \quad n \ge n_0,$$

звідки випливає, що $\beta(F) = +\infty$. Залишилось зіслатись на лему 2. □

Нехай Ω — клас додатних на $(-\infty, +\infty)$ функцій Φ таких, що Φ' є додатною, неперервною, зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$ функцією. Для функції $\Phi \in \Omega$ нехай φ — обернена до Φ' функція. Функція φ є неперервною, зростаючою до $+\infty$ на $(0, +\infty)$. Покладемо

$$\Psi(\sigma) = \sigma - \frac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)}, \quad \sigma \in (-\infty, +\infty).$$

Функція Ψ називається, як відомо, спряженою за Ньютоном з Φ і є зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$.

Лема 4. *Нехай* $\lambda \in \Lambda$, F *— довільний ряд Діріхле вигляду* (1) *такий, що* $\beta(F) = +\infty$, *і* $\Phi \in \Omega$. *Тоді* $\ln \mu(\sigma, F) \le \Phi(\sigma)$, $\sigma \ge \sigma_0$, *якщо і лише якщо* $\ln |a_n| \le -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$, $n \ge n_0$.

Лему 4 доведено в [7, с. 18-19] у припущенні, що F є цілим рядом Діріхле (тоді, зрозуміло, $\beta(F) = +\infty$). Однак, як легко переконатись, в доведенні використовується лише умова $\beta(F) = +\infty$ (яка може виконуватися і для ряду Діріхле, що не є цілим).

Прийнявши $\Phi(\sigma) = te^{\rho\sigma}$, $\sigma \in (-\infty, +\infty)$, де t — додатне число, з леми 4 отримуємо такий наслідок.

Лема 5. *Нехай* $\lambda \in \Lambda$, F *— довільний ряд Діріхле вигляду* (1) *такий, що* $\beta(F) = +\infty$, *а* t *— додатне число. Тоді* $\ln \mu(\sigma, F) \le te^{\rho\sigma}$, $\sigma \ge \sigma_0$, *якщо і лише якщо*

$$|a_n| \le \left(\frac{te\rho}{\lambda_n}\right)^{\frac{\lambda_n}{\rho}}, \quad n \ge n_0.$$

Для ряду Діріхле F вигляду (1) і всіх $n \in \mathbb{N}_0$ покладемо $S_n = \sum_{k=n}^{\infty} |a_k|$. Правильний наступний критерій цілості ряду (1) (див., напр., [2, с. 116]).

Лема 6. *Нехай* $\lambda \in \Lambda$. *Для того, щоб ряд Діріхле* F *вигляду* (1) *був цілим, необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{S_n} = +\infty.$$

Поряд з рядом F вигляду (1) розглянемо ряд Діріхле

$$\tilde{F}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n e^{s\lambda_n}. \tag{6}$$

Якщо ряд F є цілим, то за лемою 6 маємо $\beta(\tilde{F}) = +\infty$, тобто для ряду (6) його максимальний член $\mu(\sigma, \tilde{F}) = \max\{S_n e^{\sigma\lambda_n} : n \in \mathbb{N}_0\}$ є визначеним для кожного $\sigma \in (-\infty, +\infty)$. Більше того, якщо коефіцієнти a_n ряду F є невід'ємними числами і $\varepsilon > 0$, то, як доведено в [8], виконуються нерівності

$$\mu(\sigma, \tilde{F}) \le M(\sigma, F) \le M(0, F) + \frac{\sigma}{\varepsilon}\mu(\sigma + \varepsilon, \tilde{F}), \quad \sigma \in (-\infty, +\infty).$$

Використовуючи ці нерівності, легко довести (див. також [3]) таке твердження.

Лема 7. *Для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}$ вигляду* (1) *з невід'ємними коефіцієнтами a_n правильна рівність $T(F) = t(\tilde{F})$.*

2 Доведення теореми 1

Нехай послідовність $\lambda \in \Lambda$ така, що $\tau(\lambda) < +\infty$, $K \in [0, +\infty]$ і $T \in [K, e^{\rho\tau(\lambda)}K]$. Доведемо, що тоді існує ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$, для якого $K(F) = K$ і $T(F) = T$.

Згідно із зауваженням 3, доведення потребує лише випадок, коли $\tau(\lambda) > 0$, $K \in (0, +\infty)$ і $T \in (K, e^{\rho\tau(\lambda)}K]$ (в інших випадках $K = T$).

Нехай $\tau = \frac{1}{\rho}\ln\frac{T}{K}$. Тоді $0 < \tau \le \tau(\lambda)$. Виберемо довільну додатну підпослідовність $\lambda^* = (\lambda_k^*)$ послідовності λ таку, що $\tau(\lambda^*) = \tau$ (якщо $0 < \tau < \tau(\lambda)$, то існування такої підпослідовності випливає з леми 1, а якщо $\tau = \tau(\lambda)$, то візьмемо $\lambda^* = (\lambda_{n+1})$). Покладемо

$$a_k^* = \left(\frac{Ke\rho}{\lambda_k^*}\right)^{\frac{\lambda_k^*}{\rho}}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Розглянемо ряд Діріхле (4) з так визначеними коефіцієнтами a_k^*. Оскільки $\tau(\lambda^*) = \tau < +\infty$ і для ряду F^* маємо, як легко бачити, $K(F^*) = K < +\infty$, то за лемою 3 цей ряд є цілим. Отже, $F^* \in \mathcal{D}(\lambda^*)$.

Доведемо, що $T(F^*) = e^{\rho\tau}K = T$. Застосовуючи нерівність (3) до ряду F^*, маємо $T(F^*) \le e^{\rho\tau}K$, а тому досить довести, що $T(F^*) \ge e^{\rho\tau}K$.

З рівності $\tau(\lambda^*) = \tau$ випливає існування додатної збіжної до τ послідовності (τ_k) і зростаючої послідовності (k_p) натуральних чисел таких, що

$$\ln k \le \tau_k\lambda_k^*, \quad k \in \mathbb{N}_0; \qquad \ln k_p = \tau_{k_p}\lambda_{k_p}^*, \quad p \in \mathbb{N}_0. \tag{7}$$

Для всіх $p \in \mathbb{N}_0$ покладемо

$$m_p = \left[\frac{k_p + 1}{2}\right], \qquad \sigma_p = \frac{1}{\rho}\ln\frac{\lambda_{k_p}^*}{e^{\rho\tau}K\rho}.$$

Оскільки коефіцієнти ряду F^* є невід'ємними числами, то

$$M(\sigma, F^*) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* e^{\sigma\lambda_k^*}, \quad \sigma \in (-\infty, +\infty), \tag{8}$$

а тому для всіх $p \in \mathbb{N}_0$ маємо

$$M(\sigma_p, F^*) \ge \sum_{k=m_p}^{k_p} a_k^* e^{\sigma_p\lambda_k^*} = \sum_{k=m_p}^{k_p}\left(\frac{Ke\rho}{\lambda_k^*}\right)^{\frac{\lambda_k^*}{\rho}}\left(\frac{\lambda_{k_p}^*}{e^{\rho\tau}K\rho}\right)^{\frac{\lambda_k^*}{\rho}} \ge \sum_{k=m_p}^{k_p}\left(\frac{e}{e^{\rho\tau}}\right)^{\frac{\lambda_k^*}{\rho}} \ge \sum_{k=m_p}^{k_p}\frac{e^{\frac{\lambda_{m_p}^*}{\rho}}}{e^{\tau\lambda_{k_p}^*}}$$
$$= (k_p - m_p + 1)e^{\frac{\lambda_{m_p}^*}{\rho} - \tau\lambda_{k_p}^*} > \frac{k_p}{2}e^{\frac{\lambda_{m_p}^*}{\rho} - \tau\lambda_{k_p}^*} = e^{\tau_{k_p}\lambda_{k_p}^* - \ln 2 + \frac{\lambda_{m_p}^*}{\rho} - \tau\lambda_{k_p}^*};$$

крім того,

$$\lambda^*_{m_p} \geq \frac{\ln m_p}{\tau_{m_p}} \geq \frac{\ln k_p - \ln 2}{\tau_{m_p}} = \frac{\tau_{k_p}\lambda^*_{k_p} - \ln 2}{\tau_{m_p}}.$$

Тоді, врахувавши, що $\sigma_p \to +\infty$, $p \to \infty$, і $\tau_k \to \tau$, $k \to \infty$, отримуємо

$$T(F^*) \geq \varlimsup_{p\to\infty} \frac{\ln M(\sigma_p, F^*)}{e^{\rho\sigma_p}} \geq e^{\rho\tau} K\rho \varlimsup_{p\to\infty} \frac{\tau_{k_p}\lambda^*_{k_p} - \ln 2 + \frac{1}{\rho\tau_{m_p}}(\tau_{k_p}\lambda^*_{k_p} - \ln 2) - \tau\lambda^*_{k_p}}{\lambda^*_{k_p}} = e^{\rho\tau}K.$$

Отже, ми довели, що для підпослідовності λ^* існує такий ряд Діріхле $F^* \in \mathcal{D}(\lambda^*)$, що $K(F^*) = K$ і $T(F^*) = T$. Тому (див. зауваження 2) існує такий ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$, що $K(F) = K$ і $T(F) = T$. Теорему доведено.

3 Доведення теореми 2

Нехай послідовність $\lambda \in \Lambda$ така, що $\tau(\lambda) = +\infty$, $K \in [0, +\infty]$ і $T \in [K, +\infty]$. Доведемо, що тоді існує ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$, для якого $K(F) = K$ і $T(F) = T$.

Можемо вважати, згідно із зауваженням 3, що $K \in [0, +\infty)$ і $T \in (K, +\infty]$ (в іншому разі $K = T$). Далі розглядаємо окремо три випадки у залежності від значень, яких можуть набувати величини K і T.

Випадок 1: $K \in (0, +\infty)$, $T \in (K, +\infty)$. Покладемо $\tau = \frac{1}{\rho}\ln\frac{T}{K}$. Тоді $0 < \tau < +\infty$, а тому за лемою 1 з послідовності λ можемо вибрати таку підпослідовність $\lambda^* = (\lambda^*_k)$, що $\tau(\lambda^*) = \tau$. За теоремою 1 існує ряд Діріхле $F^* \in \mathcal{D}(\lambda^*)$, для якого $K(F^*) = K$ і $T(F^*) = e^{\rho\tau(\lambda^*)}K = T$. Тому (див. зауваження 2) існує такий ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$, що $K(F) = K$ і $T(F) = T$.

Випадок 2: $K \in [0, +\infty)$, $T = +\infty$. Використовуючи лему 1, легко довести, що з послідовності λ можна виділити таку додатну підпослідовність $\lambda^* = (\lambda^*_k)$, що $\tau(\lambda^*) = +\infty$ і $\tau_1(\lambda^*) < \frac{1}{\rho}$.

Оскільки $\tau(\lambda^*) = +\infty$, то існують додатна зростаюча до $+\infty$ послідовність (τ_k) і зростаюча послідовність (k_p) натуральних чисел, для яких виконуються рівності (7). Для кожного $k \in \mathbb{N}_0$ покладемо

$$K_k = \begin{cases} K, & \text{якщо } K \in (0, +\infty); \\ \frac{1}{\sqrt{\tau_k}}, & \text{якщо } K = 0. \end{cases}$$

Тоді

$$\lim_{k\to\infty} K_k = K, \qquad \lim_{k\to\infty} \tau_k K_k = +\infty. \tag{9}$$

Розглянемо ряд Діріхле (4) з коефіцієнтами a^*_k, визначеними за (5). Використовуючи першу з рівностей (9), легко отримуємо, що $K(F^*) = K < +\infty$. Крім того, $\tau_1(\lambda^*) < \frac{1}{\rho}$. Тоді за лемою 3 розглянутий ряд є цілим. Отже, $F^* \in \mathcal{D}(\lambda^*)$.

Доведемо, що $T(F^*) = +\infty$. Для всіх $p \in \mathbb{N}_0$ покладемо

$$m_p = \left[\frac{k_p + 1}{2}\right], \qquad \sigma_p = \frac{1}{\rho}\ln\frac{\lambda^*_{k_p}}{K_{k_p}e\rho}.$$

Оскільки коефіцієнти ряду F^* є невід'ємними числами, то виконується (8), а тому для всіх $p \in \mathbb{N}_0$ маємо

$$M(\sigma_p, F^*) \geq \sum_{k=m_p}^{k_p} a_k^* e^{\sigma_p \lambda_k^*} = \sum_{k=m_p}^{k_p} \left(\frac{K_k e\rho}{\lambda_k^*}\right)^{\frac{\lambda_k^*}{\rho}} \left(\frac{\lambda_{k_p}^*}{K_{k_p} e\rho}\right)^{\frac{\lambda_k^*}{\rho}} \geq \sum_{k=m_p}^{k_p} 1 = k_p - m_p + 1 > \frac{k_p}{2}.$$

Тоді, врахувавши, що $\sigma_p \to +\infty$, $p \to \infty$, і скориставшись другою з рівностей (9), отримуємо

$$T(F^*) \geq \varlimsup_{p\to\infty} \frac{\ln M(\sigma_p, F^*)}{e^{\rho\sigma_p}} \geq \varlimsup_{p\to\infty} \frac{\ln k_p - \ln 2}{\lambda_{k_p}^*} K_{k_p} e\rho = e\rho \varlimsup_{p\to\infty} \tau_{k_p} K_{k_p} = +\infty.$$

Отже, ми довели, що для підпослідовності λ^* існує такий ряд Діріхле $F^* \in \mathcal{D}(\lambda^*)$, що $K(F^*) = K$ і $T(F^*) = +\infty$. Тому (див. зауваження 2) існує такий ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$, що $K(F) = K$ і $T(F) = +\infty$.

Випадок 3: $K = 0$, $T \in (0, +\infty)$. З рівності $\tau(\lambda) = +\infty$ випливає існування додатної зростаючої до $+\infty$ послідовності (τ_n) і зростаючої послідовності (n_k) натуральних чисел таких, що $\ln n \leq \tau_n \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}_0$; $\ln n_k = \tau_{n_k} \lambda_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}_0$. При цьому, зрозуміло, послідовність (n_k) можемо вважати зростаючою настільки швидко, що для кожного $k \in \mathbb{N}_0$ виконуються нерівності

$$\left[\frac{n_{k+1}}{2}\right] > n_k, \qquad \left(\frac{(T+1)e\rho}{\lambda_{n_{k+1}}}\right)^{\frac{\lambda_{n_{k+1}}}{\rho}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{Te\rho}{\lambda_{n_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}}{\rho}}. \tag{10}$$

Приймемо $m_k = \left[\frac{n_k}{2}\right]$. Тоді $m_k < n_k < m_{k+1}$ за першою з нерівностей (10). За індукцією, використовуючи другу з нерівностей (10), отримуємо

$$\left(\frac{(T+1)e\rho}{\lambda_{n_{k+j}}}\right)^{\frac{\lambda_{n_{k+j}}}{\rho}} \leq \frac{1}{2^j} \left(\frac{Te\rho}{\lambda_{n_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}}{\rho}}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Нехай $K_k = Te^{-\tau_{n_k}\rho}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Зауважимо, що послідовність (K_k) є спадною до нуля. Для довільного $n \in \mathbb{N}_0$ покладемо $a_n = 0$, якщо $n \notin [m_k, n_k]$ для кожного $k \in \mathbb{N}_0$, і нехай

$$a_n = \left(\frac{K_k e\rho}{\lambda_n}\right)^{\frac{\lambda_n}{\rho}},$$

якщо $n \in [m_k, n_k]$ для деякого $k \in \mathbb{N}_0$. Розглянемо ряд Діріхле (1) з так визначеними коефіцієнтами a_n і зауважимо, що його можна зобразити у вигляді

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=m_k}^{n_k} a_n e^{s\lambda_n}.$$

Зрозуміло, що $K(F) = 0$. Доведемо, що ряд F є цілим і для нього $T(F) = T$.

Нехай $a > 0$ — фіксоване число. Тоді функція $y = \left(\frac{ae}{x}\right)^x$ є спадною до нуля на півінтервалі $[a, +\infty)$. Отже, якщо $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N}_0 : \lambda_{m_k} \geq \rho K_0\}$, то для всіх $k \geq k_0$ і кожного $n \in [m_k, n_k]$ маємо $a_{m_k} \geq a_n \geq a_{n_k} > a_{m_{k+1}}$. Тому, прийнявши

$$T_k = \frac{\lambda_{n_k}}{e\rho} e^{\tau_{n_k}\rho} \left(\frac{K_k e\rho}{\lambda_{m_k}}\right)^{\frac{\lambda_{m_k}}{\lambda_{n_k}}}, \qquad R_k = \frac{\lambda_{m_k}}{e\rho} e^{\tau_{n_k}\rho - \frac{\rho}{\lambda_{m_k}}} \left(\frac{K_k e\rho}{\lambda_{n_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}}{\lambda_{m_k}}},$$

для всіх $k \geq k_1$ отримуємо

$$\sum_{n=m_k}^{n_k} a_n \leq n_k a_{m_k} = e^{\tau_{n_k}\lambda_{n_k}} \left(\frac{K_k e\rho}{\lambda_{m_k}}\right)^{\frac{\lambda_{m_k}}{\rho}} = \left(\frac{T_k e\rho}{\lambda_{n_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}}{\rho}}, \tag{12}$$

$$\sum_{n=m_k}^{n_k} a_n \geq \frac{n_k}{e} a_{n_k} = e^{\tau_{n_k}\lambda_{n_k}-1} \left(\frac{K_k e\rho}{\lambda_{n_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}}{\rho}} = \left(\frac{R_k e\rho}{\lambda_{m_k}}\right)^{\frac{\lambda_{m_k}}{\rho}}. \tag{13}$$

Оскільки

$$\lambda_{n_k} \geq \lambda_{m_k} \geq \frac{\ln m_k}{\tau_{m_k}} \geq \frac{\ln n_k - 1}{\tau_{n_k}} = \lambda_{n_k} - \frac{1}{\tau_{n_k}}, \quad k \geq k_2,$$

то для всіх $k \geq k_2$ маємо $\lambda_{n_k} - \lambda_{m_k} = \frac{\theta_k}{\tau_{n_k}}$, $0 \leq \theta_k \leq 1$, звідки, зокрема, випливає співвідношення $\frac{\lambda_{n_k}}{\lambda_{m_k}} \to 1$, $k \to \infty$.

Далі покажемо, що $\lim_{k\to\infty} T_k = \lim_{k\to\infty} R_k = T$. Справді, оскільки $K_k = Te^{-\tau_{n_k}\rho}$, то при $k \to \infty$ отримуємо

$$\begin{aligned}
T_k = \frac{\lambda_{n_k}}{e\rho} e^{\tau_{n_k}\rho} \left(\frac{Te\rho}{e^{\tau_{n_k}\rho}\lambda_{m_k}}\right)^{\frac{\lambda_{m_k}}{\lambda_{n_k}}} &= T\left(\frac{\lambda_{n_k}}{\lambda_{m_k}}\right)^{\frac{\lambda_{m_k}}{\lambda_{n_k}}} \left(\frac{e^{\tau_{n_k}\rho}\lambda_{n_k}}{Te\rho}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}-\lambda_{m_k}}{\lambda_{n_k}}} \\
&= T\left(\frac{\lambda_{n_k}}{\lambda_{m_k}}\right)^{\frac{\lambda_{m_k}}{\lambda_{n_k}}} \left(\frac{e^{\tau_{n_k}\rho}\lambda_{n_k}}{Te\rho}\right)^{\frac{\theta_k}{\lambda_{n_k}\tau_{n_k}}} \to T, \\
R_k = \frac{\lambda_{m_k}}{e\rho} e^{\tau_{n_k}\rho - \frac{\rho}{\lambda_{m_k}}} \left(\frac{Te\rho}{e^{\tau_{n_k}\rho}\lambda_{n_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}}{\lambda_{m_k}}} &= e^{-\frac{\rho}{\lambda_{m_k}}} T\left(\frac{\lambda_{m_k}}{\lambda_{n_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}}{\lambda_{m_k}}} \left(\frac{Te\rho}{e^{\tau_{n_k}\rho}\lambda_{m_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}-\lambda_{m_k}}{\lambda_{m_k}}} \\
&= e^{-\frac{\rho}{\lambda_{m_k}}} T\left(\frac{\lambda_{m_k}}{\lambda_{n_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}}{\lambda_{m_k}}} \left(\frac{Te\rho}{e^{\tau_{n_k}\rho}\lambda_{m_k}}\right)^{\frac{\theta_k}{\lambda_{m_k}\tau_{n_k}}} \to T.
\end{aligned}$$

Покладемо $S_p = \sum_{n=p}^{\infty} a_n$, $p \in \mathbb{N}_0$ і зафіксуємо довільне $\varepsilon \in (0, \min\{1, T\})$. З (12) випливає, що

$$\sum_{n=m_k}^{n_k} a_n \leq n_k a_{m_k} \leq \left(\frac{(T+\varepsilon)e\rho}{\lambda_{n_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}}{\rho}}, \quad k \geq k_3(\varepsilon).$$

Використовуючи (11), для всіх $p \in (n_k, n_{k+1}]$ і $k \geq k_4(\varepsilon)$ маємо

$$\begin{aligned}
S_p &= \sum_{n=m_k}^{n_k} a_n + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=m_{k+j}}^{n_{k+j}} a_n \leq \left(\frac{(T+\varepsilon)e\rho}{\lambda_{n_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}}{\rho}} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{(T+1)e\rho}{\lambda_{n_{k+j}}}\right)^{\frac{\lambda_{n_{k+j}}}{\rho}} \\
&\leq \left(\frac{(T+\varepsilon)e\rho}{\lambda_{n_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}}{\rho}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left(\frac{Te\rho}{\lambda_{n_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}}{\rho}} \leq 2\left(\frac{(T+\varepsilon)e\rho}{\lambda_{n_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}}{\rho}} \leq \left(\frac{(T+2\varepsilon)e\rho}{\lambda_{n_k}}\right)^{\frac{\lambda_{n_k}}{\rho}} \leq \left(\frac{(T+2\varepsilon)e\rho}{\lambda_p}\right)^{\frac{\lambda_p}{\rho}}.
\end{aligned}$$

Звідси і з леми 6 випливає, що ряд F є цілим. Крім того, розглянувши поряд з рядом F ряд $\tilde{F}$, визначений за (6), і застосувавши до ряду $\tilde{F}$ лему 5, отримуємо нерівність $\ln \mu(\sigma, \tilde{F}) \leq (T+2\varepsilon)e^{\rho\sigma}$, $\sigma \geq \sigma_0(\varepsilon)$. Тоді $t(\tilde{F}) \leq T + 2\varepsilon$.

З іншого боку, за (13) для всіх $k \geq k_5(\varepsilon)$ маємо

$$S_{m_k} > \sum_{n=m_k}^{n_k} a_n > \left(\frac{(T-\varepsilon)e\rho}{\lambda_{m_k}}\right)^{\frac{\lambda_{m_k}}{\rho}},$$

а тому за лемою 5 існує така зростаюча до $+\infty$ послідовність (σ_n), що

$$\ln \mu(\sigma_n, \tilde{F}) > (T-\varepsilon)e^{\rho\sigma_n}, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Тоді $t(\tilde{F}) \geq T - \varepsilon$.

Отже, $T-\varepsilon \leq t(\tilde{F}) \leq T + 2\varepsilon$, звідки, завдяки довільності $\varepsilon \in (0, \min\{1, T\})$, отримуємо $t(\tilde{F}) = T$. Тоді $T(F) = T$ за лемою 7. Теорему 2 повністю доведено.

REFERENCES

[1] Filevich P.V. *On Valiron's theorem on the relations between the maximum modulus and the maximal term of an entire Dirichlet series*. Russ. Math. 2004, **48** (4), 63–69. (translation of Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat. 2004, **4** (503), 66–72. (in Russian))

[2] Leont'ev A.F. Series of exponents. Nauka, Moscow, 1976. (in Russian)

[3] Mulyava O.M., Filevych P.V. *On the growth of an entire Dirichlet series with nonnegative coefficients*. Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech. Math. 2003, **62**, 89–94. (in Ukrainian)

[4] Prytula Ya.Ya. *On the maximum modulus and the maximal term of an entire Dirichlet series*. Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech. Math. 1995, **43**, 25–30. (in Ukrainian)

[5] Ritt J.F. *On certain points in the theory of Dirichlet series*. Amer. J. Math. 1928, **50**, 73–83.

[6] Sheremeta M.N. *Behavior of the maximum of the absolute value of an entire Dirichlet series outside an exceptional set*. Math. Notes 1995, **57** (2), 198–207. doi:10.1007/BF02309154 (translation of Mat. Zametki 1995, **57** (2), 283–296. (in Russian))

[7] Sheremeta M.M. Entite Dirichlet series. ISDO, Kyiv, 1993. (in Ukrainian)

[8] Sheremeta M.M. *On the growth of an entire Dirichlet series*. Ukrainian Math. J. 1999, **51** (8), 1296–1302. doi:10.1007/BF02592520 (translation of Ukr. Mat. Zhurn. 1999, **51** (8), 1149–1153. (in Ukrainian))

[9] Valiron G. *Sur l'abscisse de convergence des series de Dirichlet*. Bull. Soc. Math. France 1924, **52**, 86–98.

Надійшло 25.09.2013

Hlova T.Ya., Filevych P.V. *On an estimation of R-type of entire Dirichlet series and its exactness*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 208–216.

Let (λ_n) be a nonnegative sequence, increasing to $+\infty$, $\tau = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n}$, and ρ be a positive number. It follows from a classical theorem of G. Valiron that for every Dirichlet series of the form $F(s) = \sum a_n e^{s\lambda_n}$ we have

$$\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\ln \sup\{|F(s)| : \operatorname{Re} s = \sigma\}}{e^{\rho\sigma}} \leq e^{\rho\tau} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lambda_n}{e\rho} |a_n|^{\frac{\rho}{\lambda_n}}.$$

The exactness of this estimation is proved in the paper.

Key words and phrases: entire Dirichlet series, maximum modulus, maximum term, R-type.

Глова Т.Я., Филевич П.В. *Об одной оценке R-типа целого ряда Дирихле и ее точности* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 208–216.

Пусть (λ_n) — неотрицательная возрастающая к $+\infty$ последовательность, $\tau = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n}$, а ρ — положительное число. Из классической теоремы Ж. Валирона следует, что для каждого целого ряда Дирихле вида $F(s) = \sum a_n e^{s\lambda_n}$ имеет место оценка

$$\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\ln \sup\{|F(s)| : \operatorname{Re} s = \sigma\}}{e^{\rho\sigma}} \leq e^{\rho\tau} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lambda_n}{e\rho} |a_n|^{\frac{\rho}{\lambda_n}}.$$

В работе доказано точность этой оценки.

Ключевые слова и фразы: целый ряд Дирихле, максимум модуля, максимальный член, R-тип.