ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (1), 59–63
doi:10.15330/cmp.6.1.59-63

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №1, С.59–63

Косован В.М., Маслюченко В.К.

ПРО ПОЛІНОМІАЛЬНІСТЬ НАРІЗНО СТАЛИХ ФУНКЦІЙ

Вивчається, які необхідні і які достатні умови має задовольняти підмножина E числової площини $\mathbb{R}^2$ для того, щоб кожна нарізно стала функція $f : E \to \mathbb{R}$ була поліноміальною і разом з тим існувала нарізно стала і не стала функція $f_0 : E \to \mathbb{R}$.

Ключові слова і фрази: поліноміальність, нарізно стала функція.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

1. Для множини $E \subseteq \mathbb{R}^2$ символи $S_{0,0}(E), P_0(E)$ і $P(E)$ означають відповідно множини всіх нарізно сталих, сталих і поліноміальних функцій $f : E \to \mathbb{R}$. У працях [1, 2] було введено поняття hv-зв'язності множини E і показано, що рівність $S_{0,0}(E) = P_0(E)$ виконується тоді і тільки тоді, коли множина E є hv-зв'язною. Там же був наведений приклад множини E (графік функції Діріхле), для якої $S_{0,0}(E) \nsubseteq P_0(E)$, але $S_{0,0}(E) \subseteq P(E)$. Тому постало природне питання про опис тих множин E, для яких $S_{0,0}(E) \nsubseteq P_0(E)$ і $S_{0,0}(E) \subseteq P(E)$. У цій роботі ми доводимо деякі необхідні і деякі достатні умови для цього. Вони були анонсовані в [3].

2. Нагадаємо, що *hv-ланцюжком* в добутку $X \times Y$, що з'єднує точки $p' = (x', y')$ і $p'' = (x'', y'')$ з $X \times Y$, називається така скінченна послідовність точок $p_k = (x_k, y_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, з цього добутку, що $p_0 = p'$, $p_n = p''$ і для кожного $k = 1, \ldots, n$ виконується хоча б одна з рівностей $x_{k-1} = x_k$ або $y_{k-1} = y_k$. Множина E в добутку $X \times Y$ називається *hv-зв'язною*, якщо для будь-яких її точок p' і p'' існує hv-ланцюжок $p_0, p_1, \ldots, p_n$, який їх з'єднує і складається з елементів $p_k \in E$.

Легко перевірити, що об'єднання довільної сім'ї hv-зв'язних множин буде hv-зв'язною множиною, якщо перетин будь-яких двох її непоржніх елементів непорожній. Тому для кожної точки p з $E \subseteq X \times Y$ існує найбільша hv-зв'язна множина C в E, яка містить цю точку p. Вона називається *компонентою hv-зв'язності* множини E. Різні компоненти hv-зв'язності множини E обов'язково не перетинаються, а вся множина E подається у вигляді диз'юнктного об'єднання всіх своїх компонент hv-зв'язності.

Для підмножини $C \subseteq \mathbb{R}^2$ і точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ покладемо $C^x = \{v \in \mathbb{R} : (x, v) \in C\}$ і $C_y = \{u \in \mathbb{R} : (u, y) \in C\}$. Символом $|M|$ ми позначатимемо потужність множини M.

Теорема 1. *Нехай $\mathcal{C}$ — система всіх компонент hv-зв'язності підмножини E добутку $X \times Y$ непорожніх множин X і Y, Z — довільна множина, яка має хоча б два елементи. Тоді функція $f : E \to Z$ буде нарізно сталою тоді і лише тоді, коли для кожного $C \in \mathcal{C}$ звуження $f|_C$ є сталим.*

УДК 517.51
2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C30, 54E35.

Доведення. Достатність. Нехай звуження $f|_C$ стале для кожного $C \in \mathcal{C}$. Зауважимо, що кожна множина $P^x = \{x\} \times Y$ чи $P_y = X \times \{y\}$ перетинає щонайбільше одну компоненту hv-зв'язності множини E. Справді, нехай, наприклад, $P^x \bigcap C_1 \neq \varnothing$ і $P^x \bigcap C_2 \neq \varnothing$ для деяких $x \in X$; $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$. Покладемо $C = C_1 \bigcup C_2$ і покажемо, що множина C є hv-зв'язною. Для цього досить показати, що точки $p' \in C_1$ і $p'' \in C_2$ зв'язуються деяким hv-ланцюжком, що складається з точок з C. Для цього візьмемо точки $q' \in P^x \bigcap C_1$ і $q'' \in P^x \bigcap C_2$. Оскільки множина C_1 є hv-зв'язною, то її точки p' і q' зв'язуються деяким hv-ланцюжком $p_1, \ldots, p_n$ в C_1. Так само, точки q'' і p'' зв'язуються деяким hv-ланцюжком $q_1, \ldots, q_m$ в C_2. Тоді послідовність $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_m$ буде hv-ланцюжком в C, що з'єднує точки p' і p''. Таким чином, множина C є hv-зв'язною і $C \subseteq E$. Тоді обов'язково $C_1 = C = C_2$, адже C_1 і C_2 — це компоненти hv-зв'язності множини E. Отже, $C_1 = C_2$.

Нехай $x_0 \in pr_X(E)$. Тоді існує такий елемент $y_0 \in Y$, що $p_0 = (x_0, y_0) \in E$. Розглянемо ту компоненту hv-зв'язності C_0 множини E, що $p_0 \in C_0$. За доведеним вище $C_0^{x_0} = E^{x_0}$. Тоді $f^{x_0} = (f|_{C_0})^{x_0}$, отже, функція f^{x_0} стала, бо таким є звуження $f|_{C_0}$. Так само доводиться сталість горизонтальних розрізів f_{y_0}.

Необхідність. Нехай $f \in S_{0,0}(E)$ і $C \in \mathcal{C}$. Оскільки множина C є hv-зв'язною, то за теоремою 1 з праці [2] звуження $f|_C$ є сталим. $\square$

3. Зараз ми отримаємо ряд необхідних умов для того, щоб $S_{0,0}(E) \subseteq P(E)$ і $S_{0,0}(E) \nsubseteq P_0(E)$. Нагадаємо, що *поліноміальною функцією* $f : E \to \mathbb{R}$ на підмножині E числової площини $\mathbb{R}^2$ називають звуження на E деякого полінома $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Сукупність таких функцій позначається через $P(E)$. Для множини $C \in \mathbb{R}$ введемо множини

$$A(C) = \{x \in \mathbb{R} : |C^x| \geq \aleph_0\} \quad \text{i} \quad B(C) = \{y \in \mathbb{R} : |C_y| \geq \aleph_0\}.$$

Теорема 2. *Нехай $E \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathcal{C}$ — система всіх компонент hv-зв'язності множини E, $S_{0,0}(E) \nsubseteq P_0(E)$ і $S_{0,0}(E) \subseteq P(E)$. Тоді:*

(i) $1 < |\mathcal{C}| < \aleph_0$;

(ii) якщо $A(C_0) \neq \varnothing$ для деякого $C_0 \in \mathcal{C}$, то $B(C) = \varnothing$ для всіх $C \in \mathcal{C} \setminus \{C_0\}$;

(iii) якщо $B(C_0) \neq \varnothing$ для деякого $C_0 \in \mathcal{C}$, то $A(C) = \varnothing$ для кожного $C \in \mathcal{C} \setminus \{C_0\}$;

(iv) множина $\{C \in \mathcal{C} : A(C) \neq \varnothing$ або $B(C) \neq \varnothing\}$ скінченна.

Доведення. (i) Оскільки $S_{0,0}(E) \subseteq P_0(E)$ тоді і тільки тоді, коли множина E є hv-зв'язною, тобто коли вона має лише одну компоненту hv-зв'язності, а саме $\mathcal{C} = \{E\}$, то у випадку $S_{0,0}(E) \nsubseteq P_0(E)$ обов'язково $|\mathcal{C}| > 1$.

Припустимо, що система $\mathcal{C}$ нескінченна. Тоді існує така нескінченна послідовність елементів E_n з $\mathcal{C}$, що $E_n \neq E_m$ при $n \neq m$. Оскільки при $n \neq m$ виходять різні компоненти hv-зв'язності E_n і E_m множини E, то $E_n \bigcap E_m = \varnothing$. Крім того, $E_n \neq \varnothing$ для кожного $n \in N$, отже, для кожного номера n існує точка $p_n = (x_n, y_n) \in E_n$.

Припустимо, що послідовність точок p_n площини $\mathbb{R}^2$ має хоча б одну граничну точку $p_0 = (x_0, y_0)$ в цій площині. Тоді існує така підпослідовність $(p_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ послідовності $(p_n)_{n=1}^{\infty}$, що $p_{n_k} \to p_0$ при $k \to \infty$. Покладемо $q_k = p_{n_k}$ і $F_k = E_{n_k}$ при $k = 1, 2, \ldots$. Визначимо функцію $f : E \to \mathbb{R}$, покладаючи $f(p) = 0$, якщо $p \in A = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_{2m}$, і $f(p) = 1$, якщо $p \in B = E \setminus A$. Очевидно, що функція f є сталою на кожній компоненті hv-зв'язності $C \in \mathcal{C}$. Тому побудована функція f є нарізно сталою за теоремою 1.

Покажемо, що функція f не є поліноміальною. Нехай це не так, тобто існує такий поліном $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, що $g|_E = f$. Оскільки поліноми — це неперервні функції і $q_k \to p_0$, то і $g(q_k) \to g(p_0)$. Але $g(q_{2m}) = f(q_{2m}) = 0$, бо $q_{2m} \in F_{2m} \subseteq A$, а $g(q_{2m-1}) = f(q_{2m-1}) = 1$, бо $q_{2m-1} \in F_{2m-1} \subseteq B$. Виходить, що послідовність чисел $g(q_k)$ розбіжна, що призводить до суперечності.

Припустимо тепер, що послідовність $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ не має скінченної граничної точки в площині $\mathbb{R}^2$. Для точки $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ розглянемо максимум-норму

$$|p| = max\{|x|, |y|\}$$

і для кожного номера k квадрат

$$Q_k = \{p \in \mathbb{R}^2 : |p| \le k\}.$$

Зрозуміло, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ множина $\{p_n : p_n \in Q_k\}$ обов'язково скінченна. Справді, якби для деякого k вона була нескінченною, то за лемою Больцано-Вейєрштрасса послідовність $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ мала би граничну точку в квадраті Q_k, що суперечить припущенню. Отже, для кожного номера k існує такий номер n_k, що $|p_n| > k$ при $n > n_k$. Це показує, що $|p_n| \to +\infty$, коли $n \to \infty$, тобто для кожного числа $\Delta > 0$ існує такий номер N, що $|p_n| > \Delta$, як тільки $n > N$.

Виберемо числа $c_n = e^{|p_n|}$ і побудуємо функцію $f : E \to \mathbb{R}$, для якої $f(p) = c_n$, якщо $p \in E_n$ для деякого n і $f(p) = 0$, якщо $p \in E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Функція f буде нарізно сталою, бо вона стала на кожній компоненті hv-зв'язності множини E. Покажемо, що функція f не може бути поліноміальною на E. Нехай це не так. Тоді існує такий поліном

$$g(x, y) = \sum_{k,j=0}^{m} a_{k,j} x^k y^j,$$

що $g|_E = f$. Зробимо оцінку $g(x, y)$, якщо для точки $p = (x, y)$ виконується нерівність $|p| \ge 1$. Оскільки $|x| \le |p|$, $|y| \le |p|$, то

$$|q(x, y)| \le \sum_{k,j=0}^{m} |a_{k,j}||x|^k |y|^j \le \sum_{k,j=0}^{m} |a_{k,j}||p|^{k+j} \le \sum_{k,j=0}^{m} |a_{k,j}||p|^{2m} = \gamma |p|^{2m},$$

де константа $\gamma = \sum_{k,j=0}^{m} |a_{k,j}|$ не залежить від точки p.

При $n > n_1$ будемо мати, що $|p_n| > 1$, отже, $|g(p_n)| \le \gamma |p_n|^{2m}$. Але $g(p_n) = f(p_n) = e^{|p_n|}$ для кожного n. Тому $e^{|p_n|} \le \gamma |p_n|^{2m}$ при $n > n_1$. Але, як добре відомо, $lim_{t \to +\infty} \frac{t^{2m}}{e^t} = 0$. Тому існує таке число $\Delta_0 > 0$, що

$$\frac{t^{2m}}{e^t} < \frac{1}{\gamma}$$

при $t > \Delta_0$. Але $|p_n| \to +\infty$ при $n \to \infty$. Отже, існує такий номер n, що $n > n_1$ і $|p_n| > \Delta_0$. Тоді $\frac{|p_n|^{2m}}{e^{|p_n|}} < \frac{1}{\gamma}$, звідки випливає, що $e^{|p_n|} > \gamma |p_n|^{2m}$, але це неможливо, бо $n > n_1$.

Таким чином, ми з'ясували, що $|\mathcal{C}| < \aleph_0$.

(ii) Нехай $C_0 \in \mathcal{C}$, $A(C) \neq \varnothing$ і $x_0 \in A(C_0)$. Візьмемо $C \in \mathcal{C}$ таке, що $C \neq C_0$, і покажемо, що $B(C) = \varnothing$.

Нехай це не так, тобто $B(C) \neq \varnothing$. Візьмемо $y_0 \in B(C)$. За означенням множин $A(C)$ і $B(C)$ будемо мати, що $|C_0^{x_0}| \ge \aleph_0$ і $|C_{y_0}| \ge \aleph_0$.

Розглянемо функцію $f : E \to \mathbb{R}$ таку, що $f(p) = 0$, якщо $p \in C_0$, і $f(p) = 1$, якщо $p \in E \setminus C_0$. Ясно, що f — нарізно стала функція, бо вона стала на кожній компоненті hv-зв'язності множини E. Оскільки $S_{0,0}(E) \subseteq P(E)$, то існує такий поліном $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, що $g|_E = f$. За побудовою,

$$g^{x_0}(y) = g(x_0, y) = f(x_0, y) = 0$$

для кожного $y \in C_0^{x_0} = E^{x_0}$, отже, многочлен $g^{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ перетворюється в нуль в нескінченній кількості точок, а тому $g^{x_0}(y) = 0$ для всіх $y \in \mathbb{R}$.

Далі,

$$g_{y_0}(x) = g(x, y_0) = f(x, y_0) = 1$$

для будь-якого $x \in C_{y_0} = E_{y_0}$. Отже, многочлен $g_{y_0} - 1$ перетворюється в нуль на нескінченній множині C_{y_0}, а значить $g_{y_0}(x) - 1 = 0$ на $\mathbb{R}$, тобто $g_{y_0}(x) = 1$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Але тоді

$$0 = g^{x_0}(y_0) = g(x_0, y_0) = g_{y_0}(x_0) = 1,$$

отже, $0 = 1$. Ця абсурдна рівність показує, що наше припущення не вірне, отже, $B(C) = \varnothing$ для всіх $C \in (C) \setminus \{C_0\}$.

Так само доводиться і властивість *(iii)*.

(iv) Нехай множина $\{C \in \mathcal{C} : A(C) \neq \varnothing$ або $B(C) \neq \varnothing\}$ — нескінченна. Тоді нескінченною буде одна з множин $\{C \in \mathcal{C} : A(C) \neq \varnothing\}$ чи $\{C \in \mathcal{C} : B(C) \neq \varnothing\}$. Припустимо, для певності, що $\{C \in \mathcal{C} : A(C) \neq \varnothing\}$ — нескінченна множина.

Виберемо нескінченну послідовність таких різних множин $C_n \in \mathcal{C}$, що $A(C_n) \neq \varnothing$ для кожного n. Тоді для кожного n існує елемент $x_n \in A(C_n)$. Для цього елемента множина $C_n^{x_n}$ нескінченна. Послідовність точок $x_n \in \mathbb{R}$ обов'язково має хоча б одну граничну точку x_0, скінченну чи нескінченну, для якої існує така підпослідовність $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ послідовності (x_n), що $x_{n_k} \to x_0$.

Для спрощення запису покладемо $t_k = x_{n_k}$ і $D_k = C_{n_k}$. Розглянемо функцію $f : E \to \mathbb{R}$, для якої $f(p) = 1$, якщо $p \in \bigcup_{j=1}^{\infty} D_{2j}$, і $f(p) = 0$, якщо $p \in E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} D_{2j}$. Оскільки функція f стала на кожній компоненті hv-зв'язності множини E, то $f \in S_{0,0}(E)$. Тоді за умовою $f \in P(E)$, отже, існує такий многочлен $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, що $g|_E = f$. Для довільного j маємо, що

$$g^{t_{2j}}(y) = g(t_{2j}, y) = f(t_{2j}, y) = 1$$

для довільного $y \in D_{2j}^{t_{2j}}$. Оскільки множина $D_{2j}^{t_{2j}}$ нескінченна, то $g^{t_{2j}}(y) = 1$ для кожного $y \in \mathbb{R}$ і довільного $j \in \mathbb{N}$. Так само,

$$g^{t_{2j-1}}(y) = 0$$

для довільного $y \in \mathbb{R}$ і $j \in \mathbb{N}$.

Зафіксуємо якусь точку $y_0 \in \mathbb{R}$. Для многочлена $g_{y_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ будемо мати

$$g_{y_0}(t_{2j}) = g^{t_{2j}}(y_0) = 1, \qquad g_{y_0}(t_{2j-1}) = g^{t_{2j-1}}(y_0) = 0.$$

Тому послідовність чисел $g_{y_0}(t_k)$ розбігається, але це неможливо, бо для скінченного x_0 ми будемо мати $g_{y_0}(t_k) \to g_{y_0}(x_0)$ на основі неперервності функції g_{y_0}, а для нескінченного x_0 обов'язково $g_{y_0}(t_k) \to \infty$, якщо $g_{y_0} \neq 0$, або $g_{y_0}(t_k) = 0 \to 0$, якщо $g_{y_0} = 0$. Отримана суперечність показує, що наше припущення хибне, і тим самим властивість *(iv)* доведена. □

4. Перейдемо до розгляду достатніх умов.

Теорема 3. *Нехай множина E має рівно n різних компонент hv-зв'язності $C_1, \ldots, C_n$, причому $n \geq 2$. Припустимо, що всі проекції $pr_1(C_1), \ldots, pr_1(C_n)$ на вісь абсцис або всі проекції $pr_2(C_1), \ldots, pr_2(C_n)$ на вісь ординат скінченні. Тоді $S_{0,0}(E) \not\subseteq P_0(E)$ і $S_{0,0}(E) \subseteq P(E)$.*

Доведення. Припустимо, що $pr_1(C_k)$ — скінченна множина для кожного $k = 1, \dots, n$ і $f \in S_{0,0}(E)$. Покажемо, що $f \in P(E)$.

Зрозуміло, що
$$pr_1(E) = \bigsqcup_{k=1}^{n} pr_1(C_k).$$
За умовою для кожного $k = 1, \dots, n$ існують такі різні точки $x_{k,j}$, де $j = 1, \dots, m_k$, що
$$pr_1(C_k) = \{x_{k,j} : j = 1, \dots, m_k\}.$$
Оскільки $f \in S_{0,0}(E)$, то $f|_{C_k}$ — це стала функція для кожного $k = 1, \dots, n$ за теоремою 1 з [2]. Тобто, існують такі числа c_k, що $f(p) = c_k$ на C_k. За інтеполяційною теоремою Лагранжа існує такий поліном $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що
$$g(x_{k,j}) = c_k \text{ при } j = 1, \dots, m_k$$
для кожного $k = 1, \dots, n$. Покладемо $h(x, y) = g(x)$ для кожного $x \in \mathbb{R}$ і $y \in \mathbb{R}$. Ясно, що функція $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — це поліном, при цьому
$$h^{x_{k,j}}(y) = h_y(x_{k,j}) = g(x_{k,j}) = c_k = f^{x_{k,j}}(y)$$
для кожного $y \in \mathbb{R}$ і довільних $k = 1, \dots, n$ та $j = 1, \dots, m_k$. Тому $h|_E = f$. Таким чином, $f \in P(E)$. □

References

[1] Kosovan V.M., Maslyuchenko V.K. *Separately constant functions*. In: Proc. of the Intern. Conf. dedicated to the 100th anniversary of M.M. Bogolyubov and to the 70th anniversary of M.I. Nahnybida, Chernivtsi, Ukraine, June 8–13, 2009, Knygy XXI, Chernivtsi, 2009, 80. (in Ukrainian)

[2] Kosovan V.M., Maslyuchenko V.K. *On separately constant and constant linear functions*. Sci. Bull. Chernivtsi Univ. Math. Series 2011, **1** (3), 44–48. (in Ukrainian)

[3] Kosovan V.M., Maslyuchenko V.K. *On the polynomiality of separately constant functions*. In: Proc. of the Intern. Conf. "Recent problems in the theory of probability and mathematical analysis", Vorohta, Ukraine, February 25–March 3, 2013, Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, 2013, 59–60. (in Ukrainian)

Надійшло 17.10.2013

Kosovan V.M., Maslyuchenko V.K. *On the polynomiality of separately constant functions*. Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (1), 59–63.

We establish necessary conditions and sufficient conditions on a set $E \subseteq \mathbb{R}^2$ under which every separately constant function $f : E \to \mathbb{R}$ is polynomial and there exist a separately constant function $f_0 : E \to \mathbb{R}$ which is not constant.

Key words and phrases: polynomiality, separately constant function.

Косован В.М., Маслюченко В.К. *О полиномиальности раздельно постоянных функций* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №1. — С. 59–63.

Изучается, каким необходимым и каким достаточным условиям должно удовлетворять подмножество E числовой плоскости $\mathbb{R}^2$ для того, чтобы каждая раздельно постоянная функция $f : E \to \mathbb{R}$ была полиномиальной и вместе с тем существовала раздельно постоянная и не постоянная функция $f_0 : E \to \mathbb{R}$.

Ключевые слова и фразы: полиномиальность, раздельно постоянная функция.