

АНАЛІЗ ПОЛІВ ПЕРЕМІЩЕНЬ І НАПРУЖЕНЬ В ОРТОТРОПНИХ ТОРОЇДАЛЬНИХ ОБОЛОНКАХ ЗАЛЕЖНО ВІД ЗМІНИ ТОВЩИНИ І ВИКРИВЛЕННЯ ОСІ

На основі чисельно-аналітичного підходу виконано дослідження напружено-деформованого стану ортотропних тороїдальних оболонок змінної товщини. Задачу розв'язано на основі неklasичної теорії оболонок типу Тимошенка, що базується на моделі прямолінійного елемента. Систему диференціальних рівнянь із частинними похідними зведено до одновимірної задачі з використанням методу сплайн-апроксимації в одному координатному напрямку. Крайову задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь розв'язано стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації. Наведено дані про розподіл полів переміщень і напружень залежно від викривлення осі оболонки та параметра змінності товщини.

Зі збільшенням вимог до сучасних конструкцій широко застосовуються як конструктивні елементи оболонки складної форми зі змінними параметрами, що виготовлені з композитних матеріалів [5, 9, 13, 14, 18, 19]. До таких оболонок відносяться тороїдальні оболонки [2, 11] змінної жорсткості з ортотропних матеріалів. Вони знаходять застосування в різних галузях сучасної техніки: у машинобудуванні, в ракетно-космічній галузі та ін. Поряд з оболонками сталюї товщини широке застосування знаходять оболонки змінної товщини. Дослідження міцнісних характеристик оболонок такого типу пов'язане зі значними труднощами математичного та обчислювального характеру, обумовленими складністю системи диференціальних рівнянь у частинних похідних і відповідних граничних умов. Розрахунок напружено-деформованого стану таких оболонок необхідно виконувати на основі уточненої теорії оболонок типу Тимошенка [4, 8, 15].

У цій статті для дослідження впливу змінної товщини і викривлення осі оболонки на напружено-деформований стан тороїдальних оболонок застосовуємо підхід, що складається з двох етапів:

- 1) застосування методу сплайн-апроксимації уздовж твірної для зведення двовимірної задачі до одновимірної [1, 6, 7, 9, 10];
- 2) розв'язання одержаної одновимірної крайової задачі стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації [3, 5, 9, 16, 17].

1. Постановка задачі. Розглянемо замкнуті в поперечному перерізі усічені тороїдальні ортотропні оболонки змінної товщини з круговим поперечним перерізом (рис. 1), які знаходяться під дією внутрішнього нормального тиску. Координатну поверхню оболонки віднесемо до системи ортогональних криволінійних координат η , θ , де η – кут в осьовому перерізі, а θ – кут в поперечному перерізі оболонки, при цьому $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

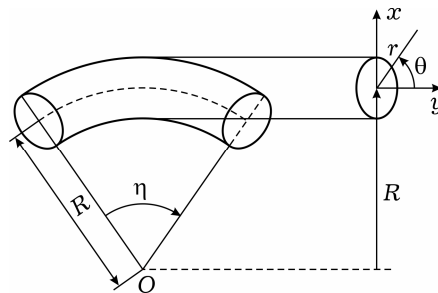


Рис. 1

Першу квадратичну форму серединної поверхні запишемо у вигляді [5]:

$$dS^2 = A_1^2 d\alpha_1^2 + A_2^2 d\alpha_2^2, \quad (1)$$

$$A_1 = R + r \sin \theta, \quad \alpha_1 = \eta, \quad \alpha_2 = \theta, \quad \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, \quad (2)$$

де R – радіус осьового кола, r – радіус кола в поперечному перерізі.

Оболонка перебуває під дією нормального тиску $q = q(\eta, \theta)$.

Товщина оболонки змінюється згідно із законом

$$h(\theta) = h_0(1 + \beta \cos 2\theta), \quad h_0 = \text{const}, \quad \beta < 1. \quad (3)$$

При цьому об'єм оболонки залишається постійним при зміні параметра β .

Оскільки вираз $\int_0^{2\pi} (1 + \beta \cos 2\theta) d\theta = 2\pi = \text{const}$ не залежить від θ , то

товщина всієї оболонки $H = \int_0^L \int_0^{2\pi} h(\eta, \theta) d\eta d\theta$ при різних значеннях β не

змінює свого значення, тобто виконується вимога збереження об'єму.

Напружено-деформований стан оболонки досліджуватимемо за уточненою теорією оболонок типу Тимошенка, що базується на гіпотезі прямої лінії. Суть цієї гіпотези полягає в тому, що прямолінійний елемент, нормальний до координатної поверхні недеформованої оболонки, після деформації залишається прямолінійним, але вже не перпендикулярним до деформованої координатної поверхні. При цьому припускається, що відсутнє обтіснення по товщині [8].

Відповідно до прийнятої гіпотези переміщення оболонки запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} u_\eta(\eta, \theta, \gamma) &= u(\eta, \theta) + \lambda \psi_\eta(\eta, \theta), \\ u_\theta(\eta, \theta, \gamma) &= v(\eta, \theta) + \lambda \psi_\theta(\eta, \theta), \\ u_\gamma(\eta, \theta, \gamma) &= w(\eta, \theta). \end{aligned} \quad (4)$$

У виразах (4) η, θ, γ – координати точок оболонки в напрямках твірної, напрямної та нормалі до вибраної координатної поверхні; ψ_η, ψ_θ – повні кути повороту прямолінійного елемента. Відповідно до (4) вирази для деформації записуються так [8]:

$$\begin{aligned} e_\eta(\eta, \theta, \gamma) &= \varepsilon_\eta(\eta, \theta) + \gamma \chi_\eta(\eta, \theta), \\ e_\theta(\eta, \theta, \gamma) &= \varepsilon_\theta(\eta, \theta) + \gamma \chi_\theta(\eta, \theta), \\ e_{\eta\theta}(\eta, \theta, \gamma) &= \varepsilon_{\eta\theta}(\eta, \theta) + \gamma 2\chi_{\eta\theta}(\eta, \theta), \\ e_{\eta\gamma}(\eta, \theta, \gamma) &= \gamma_\eta(\eta, \theta), \\ e_{\theta\gamma}(\eta, \theta, \gamma) &= \gamma_\theta(\eta, \theta), \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned} \varepsilon_\eta &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} v + k_1 w, & \varepsilon_\theta &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + k_2 w, \\ \varepsilon_{\eta\theta} &= \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u}{A_1} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{v}{A_2} \right), \\ \chi_\eta &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi_\eta}{\partial \eta} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \psi_\theta - k_1 \varepsilon_\eta, & \chi_\theta &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi_\eta}{\partial \theta} - k_2 \varepsilon_\theta, \\ \chi_{\eta\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\psi_\eta}{A_1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\psi_\eta}{A_2} \right) - \frac{k_1}{A_1} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} u \right) - \frac{k_2}{A_2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_\eta &= \Psi_\eta - \mathfrak{S}_\eta, & \gamma_\theta &= \Psi_\theta - \mathfrak{S}_\theta, \\
\mathfrak{S}_\eta &= -\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \eta} + k_1 u, & \mathfrak{S}_\theta &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + k_1 v, \\
k_1 &= \frac{1}{R + r \sin \theta}, & k_2 &= \frac{1}{r}.
\end{aligned} \tag{6}$$

У виразі (6) $\varepsilon_\eta, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{\eta\theta}$ – тангенціальні, а $\chi_\eta, \chi_\theta, \chi_{\eta\theta}$ – згинні деформації координатної поверхні; k_1, k_2 – кривини осьового кола та кола в поперечному перерізі відповідно; $\mathfrak{S}_\eta, \mathfrak{S}_\theta$ – кути повороту нормалі без урахування поперечних зсувів; $\gamma_\eta, \gamma_\theta$ – кути повороту нормалі, обумовлені поперечними зсувами.

Рівняння рівноваги мають вигляд

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \eta} (A_2 N_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (A_2 N_{\theta\eta}) + N_{\eta\theta} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + A_1 A_2 k_1 Q_\eta + A_1 A_2 q_\eta &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial \theta} (A_1 N_\theta) - N_\eta \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \eta} (A_2 N_{\eta\theta}) + A_1 Q_\theta + A_1 A_2 q_\theta &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial \eta} (A_2 Q_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (A_1 Q_\theta) - A_1 A_2 k_1 N_\eta - A_1 N_\theta + A_1 A_2 q_\eta &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial \eta} (A_2 M_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (A_1 M_{\eta\theta}) + M_{\eta\theta} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - A_1 A_2 Q_\eta &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial \theta} (A_1 M_\theta) - M_\eta \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \eta} (A_2 M_{\eta\theta}) - A_1 A_2 Q_\theta &= 0, \\
N_{\eta\theta} - k_2 M_{\eta\theta} - N_{\theta\eta} + k_1 M_{\eta\theta} &= 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

де $N_\eta, N_\theta, N_{\eta\theta}, N_{\theta\eta}$ – тангенціальні зусилля; Q_η, Q_θ – перерізувальні зусилля; $N_\eta, N_\theta, N_{\eta\theta}, N_{\theta\eta}$ – згинні і крутні моменти; $q_\eta, q_\theta, q_{\eta\theta}$ – компоненти поверхневого навантаження.

Співвідношення пружності для ортотропних оболонок щодо вибраної координатної поверхні запишемо так:

$$\begin{aligned}
N_\eta &= C_{11} \varepsilon_\eta + C_{12} \varepsilon_\theta, & N_\theta &= C_{12} \varepsilon_\eta + C_{22} \varepsilon_\theta, \\
N_{\eta\theta} &= C_{66} \varepsilon_{\eta\theta} + 2k_2 D_{66} \chi_{\eta\theta}, & N_{\theta\eta} &= C_{66} \varepsilon_{\eta\theta} + 2k_1 D_{66} \chi_{\eta\theta}, \\
M_\eta &= D_{11} \chi_\eta + D_{12} \chi_\theta, & M_\theta &= D_{12} \chi_\eta + D_{22} \chi_\theta, & M_{\eta\theta} &= 2D_{66} \chi_{\eta\theta}, \\
Q_\eta &= K_1 \gamma_\eta, & Q_\theta &= K_2 \gamma_\theta,
\end{aligned} \tag{8}$$

де

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{E_\eta h}{1 - \nu_\eta \nu_\theta}, & C_{12} &= \nu_\theta C_{11}, & C_{22} &= \frac{E_\theta h}{1 - \nu_\eta \nu_\theta}, & C_{66} &= G_{\eta\theta} h, \\
D_{11} &= \frac{E_\eta h^3}{12(1 - \nu_\eta \nu_\theta)}, & D_{12} &= \nu_\theta D_{11} \chi_\theta, \\
D_{22} &= \frac{E_\theta h^3}{12(1 - \nu_\eta \nu_\theta)}, & D_{66} &= \frac{G_{\eta\theta} h^3}{12}, \\
K_1 &= \frac{5}{6} G_{\eta\gamma}, & K_2 &= \frac{5}{6} G_{\theta\gamma}.
\end{aligned} \tag{9}$$

У виразах (9) E_η , E_θ , ν_η , ν_θ – модулі пружності і коефіцієнти Пуассона в напрямках η і θ ; $G_{\eta\theta}$, $G_{\eta\gamma}$, $G_{\theta\gamma}$ – модуль зсуву.

Співвідношення (6)–(8) є замкнутою системою диференціальних рівнянь із частинними похідними 10-го порядку. Для визначення довільності, що міститься у загальному інтегралі цієї системи, необхідно задати граничні умови на контурах оболонки при $\eta = \text{const}$. На відміну від класичної теорії оболонок, у якій на кожному контурі формулюються по чотири граничні умови, в уточненій теорії оболонок прийнята модель дозволяє задати на кожному контурі по п'ять граничних умов, що відповідає числу шуканих функцій. Граничні умови можна сформулювати через зусилля, моменти, переміщення і повні кути повороту нормалі.

Для визначення напружень в ортотропних тороїдальних оболонках виходитимемо із співвідношень закону Гука [15]:

$$\begin{aligned} e_\eta &= b_{11}\sigma_\eta + b_{12}\sigma_\theta, & e_\theta &= b_{12}\sigma_\eta + b_{22}\sigma_\theta, \\ e_{\eta\theta} &= b_{66}\tau_{\eta\theta}, & e_{\eta\gamma} &= b_{55}\tau_{\eta\gamma}, & e_{\theta\gamma} &= b_{44}\tau_{\theta\gamma}, \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{1}{E_\eta}, & b_{12} &= -\frac{\nu_\eta}{E_\eta}, & b_{22} &= \frac{1}{E_\theta}, \\ b_{66} &= \frac{1}{G_{\eta\theta}}, & b_{55} &= \frac{1}{G_{\eta\gamma}}, & b_{44} &= \frac{1}{G_{\theta\gamma}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Розв'язуючи рівність (10) відносно напружень і використовуючи (5), одержуємо вирази для напружень через деформації координатної поверхні:

$$\begin{aligned} (b_{11}b_{22} - b_{12}^2)\sigma_\eta &= b_{22}(\varepsilon_\eta + \gamma\chi_\eta) - b_{12}(\varepsilon_\theta + \gamma\chi_\theta), \\ (b_{12}^2 - b_{11}b_{22})\sigma_\theta &= b_{12}(\varepsilon_\eta + \gamma\chi_\eta) - b_{11}(\varepsilon_\theta + \gamma\chi_\theta), \\ b_{66}\tau_{\eta\theta} &= \varepsilon_{\eta\theta} + 2\gamma\chi_{\eta\theta}, & b_{55}\tau_{\eta\gamma} &= \gamma_\eta, & b_{44}\tau_{\theta\gamma} &= \gamma_\theta, & -\frac{h}{2} \leq \gamma \leq \frac{h}{2}. \end{aligned} \quad (12)$$

За розв'язувальні функції вибираємо переміщення u , v , w і повні кути повороту нормалі ψ_η , ψ_θ . З виразів (6)–(8) після деяких перетворень одержуємо систему розв'язувальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= L_1(u, v, w, \psi_\eta, \psi_\theta), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= L_2(u, v, w, \psi_\eta, \psi_\theta), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} &= L_3(u, v, w, \psi_\eta, \psi_\theta), \\ \frac{\partial^2 \psi_\eta}{\partial \theta^2} &= L_4(u, v, w, \psi_\eta, \psi_\theta), \\ \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial \theta^2} &= L_5(u, v, w, \psi_\eta, \psi_\theta). \end{aligned} \quad (13)$$

Одержана система розв'язувальних рівнянь (13) повністю наведена у статті [7]. Додаючи до системи розв'язувальних рівнянь граничні умови, одержуємо двовимірну крайову задачу, яку розв'язуємо зазначеним вище методом.

2. Числові результати. На підставі викладеного підходу розв'язано задачу про напружений стан замкнутих у поперечному перерізі зрізаних ортотропних оболонок змінної товщини і виконано числові розрахунки при таких вихідних даних: S – довжина дуги вздовж осі оболонки, $0 \leq S \leq L$,

$L = 60$, товщина змінюється згідно з законом $h(\theta) = h_0(1 + \beta \cos 2\theta)$ при $h_0 = 1$, $r = 15$, $\Delta\eta = \pi/3, \pi/2, 2\pi/3$, $\Delta\eta \cdot R = L$.

Механічні параметри оболонки мають такі значення [12]: $E_\eta = 5E$, $E_\theta = 1.25E$, $G_{\eta\theta} = 0.4E$, $G_{\eta\gamma} = G_{\theta\gamma} = 0.2E$, де E – модуль пружності; коефіцієнт Пуассона $\nu_\eta = 0.045$. Оболонка знаходиться під дією внутрішнього нормального тиску $q = q_0 = \text{const}$.

Досліджували вплив зміни кута осьового перерізу оболонки $\Delta\eta = \pi/3, \pi/2, 2\pi/3$ та зміни параметра товщини $\beta = 0, 0.3, 0.5, 0.7$ на поля переміщень і напружень у тороїдальних оболонках сталого об'єму.

Результати розв'язання задачі наведено на рис. 2 – рис. 4 у вигляді графіків розподілу прогину w в інтервалі $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ для жорстко закріплених контурів у серединному осьовому перерізі $S = L/2$ при вказаних вище значеннях $\Delta\eta = \pi/3, \pi/2, 2\pi/3$. Значення напружень $\sigma_\theta^+, \sigma_\theta^-$ на зовнішній і внутрішній поверхнях оболонки відповідно наведено в табл. 1, 2 у перерізах $S = 0.2L, 0.5L$ для різних значень β у точках $\theta = -\pi/2, 0, \pi/2$.

Спочатку проведемо аналіз розподілу переміщень залежно від викривлення осі оболонки. З рис. 2 – рис. 4 видно, що максимальна величина прогину змінюється у відношенні: 1.13 : 1.24 : 1.39; при $\theta = -\pi/2$ це відношення має вигляд: $-0.16 : -0.04 : 0.19$; при $\theta = \pi/2$: $-0.35 : 0.65 : 1.09$; при $\theta = 0$ маємо: 1.11 : 1.24 : 1.38. З цього випливає, що величина викривлення осі оболонки має найбільший вплив на значення прогинів при $\theta = -\pi/2$.

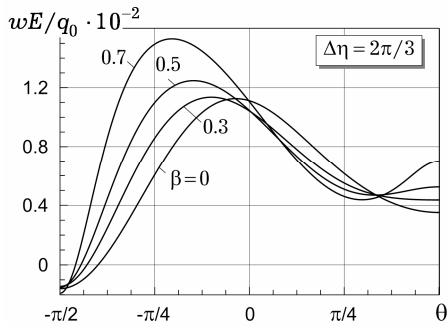


Рис. 2

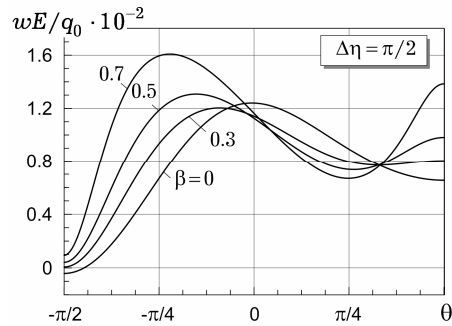


Рис. 3

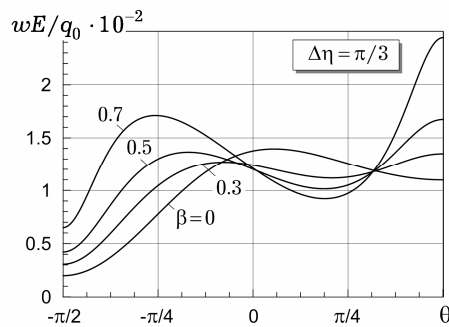


Рис. 4

Далі проведемо аналіз впливу зміни товщини оболонки на поля переміщень при викривленні осі. З рис. 2 – рис. 4 випливає, що максимальне значення прогину при $\beta = 0.7$ переміщується ліворуч від центру в такому відношенні: 0.2 : 0.25 : 0.25. При $\Delta\eta = 2\pi/3$ максимальне значення прогину при $\beta = 0.7$ збільшується до 1.53 порівняно з 1.13 при $\beta = 0$. Для $\theta = \pi/2$

величина $wE/10^2q_0$ досягає значення 0.69, а при $\theta = -\pi/2$ дорівнює -0.19 і майже співпадає зі значенням при сталій товщині ($\beta = 0$), при $\theta = 0$ $wE/10^2q_0 = 1.1$. При $\Delta\eta = \pi/2$ максимальне значення полів переміщення $wE/10^2q_0 = 1.61$ при $\beta = 0.7$ на відміну від 1.24 при $\beta = 0$. При $\theta = \pi/2$ $wE/10^2q_0 = 1.38$, при $\theta = -\pi/2$ маємо $wE/10^2q_0 = 0.09$, а при $\theta = 0$ приймає значення 1.16. При $\Delta\eta = \pi/3$ максимальне значення $wE/10^2q_0$ досягає 2.44 при $\beta = 0.7$, тоді як $wE/10^2q_0 = 1.39$ при $\beta = 0$. При $\theta = \pi/2$ маємо 2.44 і це значення є максимумом, при $\theta = -\pi/2$ значення $wE/10^2q_0 = 0.65$ і є мінімумом, а при $\theta = 0$ маємо $wE/10^2q_0 = 1.21$.

Важливо зазначити, що в околі точки $\theta/\pi \approx 0.35$ перетинаються всі графіки, що обумовлено тим, що товщина всіх оболонок приймає однакове значення.

У табл. 1, 2 наведено дані про розподіл полів напружень $\sigma_\theta^\pm/10q_0$ уздовж напрямної на зовнішній та внутрішній поверхнях оболонки при $S = 0.2L, 0.5L$ залежно від зміни товщини β в поперечному перерізі та викривлення осі. З таблиць бачимо, що максимальні напруження спостерігаються при $\theta = -\pi/2$. При постійній товщині ($\beta = 0$) при $S = 0.5L$ напруження $\sigma_\theta/10q_0$ залежать від викривлення осі таким чином: 10.85 : 11.27 : 11.72 – на зовнішній поверхні оболонки та 12.62 : 12.94 : 13.18 – на внутрішній.

Табл. 1

$\sigma_\theta^+ / 10q_0$					
S / L	θ	β			
		0	0.3	0.5	0.7
$\Delta\eta = 2\pi/3$					
0.2	$-\pi/2$	8.305	11.869	16.663	27.741
	0	5.9321	4.0402	3.1252	2.3181
	$\pi/2$	0.01303	0.85422	2.1608	5.5882
0.5	$-\pi/2$	10.849	15.141	20.817	33.808
	0	4.6052	3.2895	2.5602	1.7599
	$\pi/2$	0.26532	0.95002	1.4721	2.2748
$\Delta\eta = \pi/2$					
0.2	$-\pi/2$	8.5946	12.433	17.62	29.684
	0	7.1056	4.9135	3.8842	3.008
	$\pi/2$	1.3838	3.2302	5.8674	12.266
0.5	$-\pi/2$	11.27	15.69	21.549	34.994
	0	6.2153	4.5319	3.6255	2.6819
	$\pi/2$	1.8849	3.2147	4.5715	7.5625
$\Delta\eta = \pi/3$					
0.2	$-\pi/2$	9.2212	13.583	19.475	33.213
	0	8.6176	6.0289	4.8473	3.8763
	$\pi/2$	4.032	7.4323	12.071	22.881
0.5	$-\pi/2$	11.728	16.354	22.499	36.656
	0	8.3699	6.1869	5.0439	3.9151
	$\pi/2$	4.668	7.174	10.136	17.036

З даних табл. 1 випливає, що залежно від зміни товщини та викривлення осі при $S = 0.5L$ максимальні поля напружень $\sigma_{\theta}^+/10q_0$ на зовнішній поверхні оболонки змінюються у відношенні 15.14 : 20.82 : 33.81 при $\Delta\eta = 2\pi/3$, при $\Delta\eta = \pi/2$ це відношення має вигляд 15.69 : 21.55 : 34.99, а при $\Delta\eta = \pi/3$ маємо 16.35 : 22.49 : 36.65. Схожа картина спостерігається і на внутрішній поверхні оболонки. Максимальні поля напружень $\sigma_{\theta}^-/10q_0$ змінюються у такому відношенні: 17.44 : 23.71 : 37.83 при $\Delta\eta = 2\pi/3$, при $\Delta\eta = \pi/2$ маємо 17.89 : 24.33 : 38.87, а при $\Delta\eta = \pi/3$ маємо 16.35 : 22.49 : 36.65.

Табл. 2

		$\sigma_{\theta}^-/10q_0$			
S/L	θ	β			
		0	0.3	0.5	0.7
$\Delta\eta = 2\pi/3$					
0.2	$-\pi/2$	9.6501	13.313	18.144	29.134
	0	5.4071	4.0289	3.3981	2.8706
	$\pi/2$	0.63212	1.0888	1.9191	4.3852
0.5	$-\pi/2$	12.616	17.444	23.712	37.834
	0	4.2041	3.3004	2.8812	2.5327
	$\pi/2$	0.95921	1.2298	1.4617	1.7249
$\Delta\eta = \pi/2$					
0.2	$-\pi/2$	9.8501	13.728	18.878	30.7
	0	6.6798	5.064	4.3463	3.7784
	$\pi/2$	2.0518	3.188	4.9962	9.8297
0.5	$-\pi/2$	12.937	17.887	24.326	38.87
	0	5.9521	4.7361	4.1844	3.7479
	$\pi/2$	2.7255	3.3944	4.1985	6.036
$\Delta\eta = \pi/3$					
0.2	$-\pi/2$	10.298	14.553	20.244	33.454
	0	8.4147	6.4803	5.6484	5.0299
	$\pi/2$	4.6785	6.927	10.26	18.664
0.5	$-\pi/2$	13.181	18.247	24.861	39.883
	0	8.3782	6.7287	5.9947	5.4417
	$\pi/2$	5.6239	7.1242	9.1369	14.028

1. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолли Дж. Теория сплайнов и ее приложения. – Москва: Мир, 1972. – 318 с.
2. Булгаков В. Н. Статика тороидальных оболочек. – Киев: Изд-во АН УССР, 1962. – 100 с.
3. Голушко С. К., Немировский Ю. В. Прямые и обратные задачи механики композитных пластин и оболочек вращения. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 432 с.
4. Григолоук Э. И., Коган Е. А. Статика упругих слоистых оболочек. – Москва: НИИ механики Моск. ун-та, 1999. – 215 с.
5. Григоренко Я. М. Изотропные и анизотропные оболочки вращения переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1973. – 228 с.
5. Григоренко Я. М. Некоторые подходы к численному решению линейных и нелинейных задач теории оболочек в классической и уточненной постановках // Прикл. механика. – 1996. – 32, № 6. – С. 3–39.

Те саме: Grigorenko Ya. M. Approaches to the numerical solution of linear and nonlinear problems in shell theory in classical and refined formulations // Int. Appl. Mech. – 1996. – 32, No. 6. – P. 409–442.

6. Григоренко Я. М., Авраменко Ю. О. До розв'язання в уточненій постановці задач статички тороїдальних оболонок з жорстко закріпленими торцями // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2012. – **55**, № 3. – С. 127–131.
7. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Голуб Г. П. Статика анизотропних оболонок с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. думка, 1987. – 216 с.
8. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: Академ-періодика, 2006. – 472 с.
9. Завьялов Ю. С., Квасов Ю. И., Мирошниченко В. М. Методы сплайн-функций. – Москва: Наука, 1980. – 352 с.
10. Кларк Р., Рейсснер Э. Изгиб труб с криволинейной осью // *Проблемы механики.* – Москва: Изд-во иностр. лит., 1955. – С. 125–149.
Те саме Clark R. A., Reissner E. Bending of curved tubes // *Adv. Appl. Mech.* – 1951. – **2**. – Р. 93–122.
11. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропных тел. – Москва: Наука, 1977. – 415 с.
12. Підстригач Я. С. Вибрані праці. – Київ: Наук. думка, 1995. – 460 с.
13. Подстригач Я. С., Швец Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 344 с.
14. Тимошенко С. П. Курс теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1972. – 501 с.
15. Grigorenko Ya. M., Rozhok L. S. Discrete Fourier-series method in problems of bending of variable-thickness rectangular plates // *J. Eng. Math.* – 2003. – **46**, No. 3-4. – Р. 269–280.
16. Grigorenko Ya. M., Rozhok L. S. Equilibrium of elastic hollow inhomogeneous cylinders of corrugated elliptic cross-section // *J. Eng. Math.* – 2006. – **54**, No. 2. – Р. 145–157.
17. Piskunov V. G., Rasskazov A. O. Evolution of the theory of laminated plates and shells // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, No. 2. – Р. 135–166.
Те саме: Пискунов В. Г., Рассказов А. О. Развитие теории слоистых пластин и оболочек // *Прикл. механика.* – 2002. – **38**, № 2. – С. 22–57.
18. Soldatos K. P. Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross-section. A survey // *Appl. Mech. Rev.* – 1999. – **52**, No. 8. – Р. 237–274.

АНАЛИЗ ПОЛЕЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ В ОРТОТРОПНЫХ ТОРОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧКАХ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТОЛЩИНЫ И ИСКРИВЛЕНИЯ ОСИ

На основе численно-аналитического подхода выполнено исследование напряженно-деформированного состояния ортотропных тороидальных оболочек переменной толщины. Задача решается на основе неклассической теории оболочек типа Тимошенко, которая базируется на модели прямолинейного элемента. Система дифференциальных уравнений в частных производных сводится к одномерной задаче с использованием метода сплайн-аппроксимации в одном координатном направлении. Краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений решается устойчивым численным методом дискретной ортогонализации. Приводятся данные о распределении полей перемещений и напряжений в зависимости от искривления оси оболочки и параметра переменности толщины.

ANALYSIS OF DISPLACEMENTS AND STRESSES FIELDS OF ORTHOTROPIC TOROIDAL SHELLS DEPENDING ON CHANGE IN THE THICKNESS AND CURVATURE OF SHELL AXIS

A numerical-analytic approach was used to analysis of the stress-strain state of orthotropic toroidal shells of varying thickness. The problem is solved on the basis of non-classical shell theory of Timoshenko type, which is based on the model of a straight-line element. The system of partial differential equations is reduced to the one-dimensional problem within the method of spline-approximation in one coordinate direction. The boundary-value problem for a system of ordinary differential equations is solved by a stable numerical method of discrete orthogonalization. The data about distribution of displacements and stresses fields are presented depending on curvature of the shell axis and variability thickness parameter.

Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Одержано
01.12.12